第 58 卷 第 8 期 2009 年 8 月
1000-3290/2009/58(08)/5142-08

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.58, No.8, August, 2009

非完整映射理论与刚体定点转动的几何描述*

王 勇[1)] 郭永新[2)†] 吕群松[3)] 刘 畅[4)]

1)(广东医学院基础学院,东莞 523808)

2)(辽宁大学物理学院,沈阳 110036)

3)(广东医学院实验管理处,东莞 523808)

4)(北京理工大学应用力学系,北京 100081)

(2009 年 1 月 8 日收到;2009 年 3 月 24 日收到修改稿)

利用非完整映射方法,从一个已知 Riemann 空间构造一个嵌入其中的 Riemann-Cartan 空间.作为特例,研究从 Euclidean 空间构造 Weitzenbock 空间的方法.基于 d'Alembert-Lagrange 原理和非完整映射,将一个 Riemann 空间的测地线对应于另一个 Riemann-Cartan 空间的自平行线.把这种非完整映射理论应用到刚体定点转动问题上,得到了刚体运动的欧拉方程是欧拉角描述的 Riemann 位形空间的测地线方程,而在刚体角速度对应的准坐标空间上是常挠率 Riemann-Cartan 空间的自平行线方程的结论.

关键词:欧拉角,非完整映射,Riemann-Cartan 空间,自平行线

PACC:0320

1. 引 言

基于流形和纤维丛理论的现代微分几何学在物理学中的广泛应用,极大地促进了物理学的发展,成为规范物理学诸多研究领域的重要数学工具.其中,分析力学的几何化对非完整力学[1—3]的发展起了重要的推动作用,它不仅深化了对非完整力学的理论研究,而且推动了其应用研究,这使得约束系统几何动力学成为目前该研究领域的主流方向之一[4—10].在引力的规范理论中,将时空几何从 Riemann 空间推广到 Riemann-Cartan 空间,建立了物质的能量动量和自旋与 Riemann-Cartan 时空的曲率和挠率的关系,从而推广了 Einstein 的广义相对论[11—13].近些年,人们认识到其他一些具有奇异特性的物理问题,也和 Riemann-Cartan 空间有着内在的联系,即这些问题中物理系统的奇异特性联系着演化空间的非欧特性——Riemann-Cartan 空间的挠率[14—20].根据这一思想,可以将物理问题在 Euclidean 空间和 Riemann 空间中的奇异性质描述为一个 Riemann-Cartan 空间中挠率,从而为解决具有奇异物理性质的问题提供了新途径.因此,由系统演化空间的非欧特性来构造一个 Riemann-Cartan 空间的挠率,从而实现物理模型奇异性质的几何化,是一个有重要意义的问题.20 世纪 90 年代,德国学者 Kleinert 及其合作者提出了通过把低维 Riemann-Cartan 空间嵌入到高维 Euclidean 空间来研究 Riemann-Cartan 空间挠率的新方法[16—19],并将这一方法引入到对非完整约束系统的研究中,揭示了非完整约束与 Riemann-Cartan 空间挠率之间的联系[20].我们在最近的工作[14, 21]中将这一方法做了推广,借助非完整映射将 Riemann-Cartan 空间嵌入到 Riemann 空间中,这在约束系统动力学的研究中相当于包含了完整约束条件,使 Euclidean 空间中完整约束系统的位形空间约化为低维 Riemann 空间,而系统所受到的非完整约束则进一步增加了位形空间的挠率,使之成为 Riemann-Cartan 空间.利用 d'A1embert-Lagrange 原理所得到的非完整力学的 Chetaev 动力学方程为该空间的自平行线方程,而利用 Hamilton 变分原理得到的 vakonomic 动力学方程为该空间的短程线(测地线)方程[14, 20].

本文将进一步完善和深化 Riemann-Cartan 空间

* 国家自然科学基金(批准号:10872084 和 10472040)、辽宁省优秀青年科研人才培养基金(批准号:3040005)、辽宁省高校科研基金(批准号:2008S098)、辽宁省高等学校优秀人才支持计划(批准号:2008RC20)和辽宁省重点实验室建设计划(批准号:2008403009)资助的课题.

† 通讯联系人.E-mail:yxguo@lnu.edu.cn

到 Riemann 空间的非完整映射理论，使之既包括了奇异非完整映射也包括了非奇异非完整映射，即满秩的非完整映射. 并且具体研究由这种非完整映射方法所构造的 Riemann-Cartan 空间的几何量：度规、联络及其挠率和曲率，其特例包括从一个 Euclidean 空间到一个有挠率、无曲率的 Weitzenbock 空间[22,23]的映射. 在此基础上，利用微分变分原理和积分变分原理研究 Riemann-Cartan 空间上“自由”动力学系统运动微分方程的几何特征：自平行线和测地线的特性，即直与短的特性，并建立起测地线与自平行线之间的非完整映射. 最后，作为一个应用实例，描述研究刚体定点转动的 Euler 方程的几何特性. 本文的研究表明，描述刚体运动的 Euler 角所构成的位形空间是一个具有曲率的 Riemann 空间，而其角速度所对应的准坐标空间是一个既有曲率又有挠率的 Riemann-Cartan 空间，且其挠率是常数. 刚体的 Euler 方程在 Euler 角描述的位形空间中表现为 Riemann 空间的测地线方程，它同时也是这个空间的自平行线方程，而 Euler 方程在准坐标空间中却表现为 Riemann-Cartan 空间的自平行线方程，这符合物理学的惯性原理.

本文中除特别说明外，均采用爱因斯坦求和约定，并对指标取值范围作如下规定：$i,j,k,l=1,2,\cdots,n$；$\mu,\nu,\rho,\sigma,\lambda=1,2,\cdots,m$；$\alpha,\beta=0,1,\cdots,n-m$.

2. 非完整映射与 Riemann-Cartan 空间的构造

考虑一个 n 维 Riemann 空间 W，T_W 为其切空间，$\{w^i\}$为空间 W 的局部广义坐标，$\{\dot{w}^i\}$为切空间 T_W 的广义速度分量. 设该空间的度规为 g_{ij}，由该度规决定的 Riemann-Christoffel 联络或者度规联络为

$$\begin{Bmatrix} k \\ i\,j \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} g^{kl}\left(g_{il,j} + g_{jl,i} - g_{ij,l}\right), \tag{1}$$

其中 $g_{ij,l} = \partial_l g_{ij} = \partial g_{ij}/\partial w^l$. 曲率为

$$r^{i}_{jkl} = -\begin{Bmatrix} i \\ j\,k \end{Bmatrix}_{,l} + \begin{Bmatrix} i \\ j\,l \end{Bmatrix}_{,k} - \begin{Bmatrix} i \\ m\,l \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} m \\ j\,k \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} i \\ m\,k \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} m \\ j\,l \end{Bmatrix}. \tag{2}$$

假设存在另一个空间 Q，其局部广义坐标表示为 $\{q^\mu\}$，相应的广义速度分量为 $\{\dot{q}^\mu\}$. 若 V^i 和 V^μ 分别为空间 W 和 Q 的向量场的分量，我们假定两者之间存在一个不可积即非完整映射

$$V^i = b^i_\mu V^\mu, \tag{3}$$

则相应的广义速度之间的非完整映射自然为

$$\dot{w}^i = b^i_\mu \dot{q}^\mu. \tag{4}$$

它满足坐标和微分的变换关系

$$\begin{aligned} \frac{\partial w^i}{\partial q^\mu} &= \frac{\partial \dot{w}^i}{\partial \dot{q}^\mu} = b^i_\mu, \\ \frac{\partial}{\partial q^\mu} &= \frac{\partial w^i}{\partial q^\mu}\frac{\partial}{\partial w^i}. \end{aligned} \tag{5}$$

作为(3)或(4)式的特例，若 w^i 为 Riemann 空间或 Euclidean 空间的坐标，且 $b^\nu_\mu = \delta^\nu_\mu$，则(4)式退化为

$$\dot{w}^\mu = \dot{q}^\mu,$$

$$\dot{w}^\alpha = b^\alpha_\mu \dot{q}^\mu.$$

这相当于非完整约束条件的显式表达，此时可以证明空间 Q 为一个 Riemann-Cartan 空间[14]. 另一个特例是满秩映射情况，即 $\det(b^i_\mu)\neq 0$，存在逆映射 a^μ_i，满足 $a^\mu_i b^j_\mu = \delta^j_i$，$a^\mu_i b^i_\nu = \delta^\mu_\nu$. 由此得到

$$a^\mu_i \partial_\rho b^i_\nu = -b^i_\nu \partial_\rho a^\mu_i. \tag{6}$$

下面我们将就满秩的非完整映射构造空间 Q 的 Riemann-Cartan 结构，所得结果对非满秩的情况同样适用.

定义空间 Q 的度规为

$$g_{\mu\nu} = (b_\mu, b_\nu) = g_{ij} b^i_\mu b^j_\nu. \tag{7}$$

这样，两个空间中的向量 V 和 U 的标量积可以表示为

$$(U,V) = g_{ij} U^i V^j = g_{\mu\nu} U^\mu V^\nu. \tag{8}$$

空间 W 和空间 Q 中向量指标的升降分别用对应的度规实施. 为了求出空间 Q 的联络，我们假设空间 W 中的向量 V^i 的绝对导数 $\frac{\mathrm{D}V^i}{\mathrm{D}t}$ 和空间 Q 中向量 V^μ 的绝对导数 $\frac{\mathrm{D}V^\mu}{\mathrm{D}t}$ 之间存在与(3)式相协变的关系，即

$$\frac{\mathrm{D}V^i}{\mathrm{D}t} = b^i_\mu \frac{\mathrm{D}V^\mu}{\mathrm{D}t}, \tag{9}$$

其中

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{D}V^i}{\mathrm{D}t} &= \frac{\mathrm{d}V^i}{\mathrm{d}t} + \begin{Bmatrix} i \\ j\,k \end{Bmatrix} V^j \dot{w}^k, \\ \frac{\mathrm{D}V^\mu}{\mathrm{D}t} &= \frac{\mathrm{d}V^\mu}{\mathrm{d}t} + \Gamma^\mu_{\nu\sigma} V^\nu \dot{q}^\sigma. \end{aligned} \tag{10}$$

将(3)，(4)和(6)式代入(9)式，可以求出空间 Q 的联络为

$$\begin{aligned} \Gamma^\rho_{\mu\nu} &= g^{\rho\sigma} g_{il} b^l_\sigma \left(b^i_{\mu,\nu} + b^j_\mu b^k_\nu \begin{Bmatrix} i \\ j\,k \end{Bmatrix} \right) \\ &= a^\rho_i \left(b^i_{\mu,\nu} + b^j_\mu b^k_\nu \begin{Bmatrix} i \\ j\,k \end{Bmatrix} \right), \end{aligned} \tag{11}$$

其中

$$g^{\rho\sigma} = g_{\rho\sigma}^{-1}, \quad a_i^{\rho} = g^{\rho\sigma} g_{il} b_{\sigma}^{l}.$$

可以验证,(11)式所表达的联络是度规联络,即

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu;\sigma} &= g_{\mu\nu,\sigma} - \Gamma_{\mu\sigma}^{\rho} g_{\rho\nu} - \Gamma_{\nu\sigma}^{\rho} g_{\mu\rho} \\ &= 0. \end{aligned} \tag{12}$$

利用(6)式,并考虑度规对指标的升降作用以及坐标变换关系(5)式,则空间 Q 的挠率为

$$\begin{aligned} S_{\mu\nu}^{\rho} &= a_i^{\rho} b^i_{[\mu,\nu]} \\ &= b^i_{[\nu} \partial_{\mu]} a_i^{\rho} \\ &= \frac{1}{2}\left(b_{\nu}^{i} \partial_{\mu} a_i^{\rho} - b_{\mu}^{i} \partial_{\nu} a_i^{\rho}\right) \\ &= - b_{\mu}^{i} b_{\nu}^{j} \partial_{\rho} a^{\rho}_{[i,j]}, \end{aligned} \tag{13}$$

其中[·,·]表示反对称运算.记

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\rho} = \Gamma_{\mu\nu}^{*\rho} + \overline{\begin{Bmatrix} \rho \\ \mu\nu \end{Bmatrix}}, \tag{14}$$

其中

$$\Gamma_{\mu\nu}^{*\rho} = a_i^{\rho} b_{\mu,\nu}^{i} = - b_{\mu}^{i} b_{\nu}^{j} a_{i,j}^{\rho},$$

$$\overline{\begin{Bmatrix} \rho \\ \mu\nu \end{Bmatrix}} = a_i^{\rho} b_{\mu}^{j} b_{\nu}^{k} \begin{Bmatrix} i \\ jk \end{Bmatrix}.$$

容易验证,

$$\begin{aligned} R(\Gamma^{*}) &= R_{\nu\sigma\rho}^{*\mu} \\ &= - \Gamma_{\nu\sigma,\rho}^{*\mu} + \Gamma_{\nu\rho,\sigma}^{*\mu} - \Gamma_{\lambda\rho}^{*\mu} \Gamma_{\nu\sigma}^{*\lambda} + \Gamma_{\lambda\sigma}^{*\mu} \Gamma_{\nu\rho}^{*\lambda} \\ &= 0. \end{aligned} \tag{15}$$

由此得到联络 Γ 的曲率为

$$\begin{aligned} R_{\nu\sigma\rho}^{\mu} &= - \Gamma_{\nu\sigma,\rho}^{\mu} + \Gamma_{\nu\rho,\sigma}^{\mu} - \Gamma_{\lambda\rho}^{\mu} \Gamma_{\nu\sigma}^{\lambda} + \Gamma_{\lambda\sigma}^{\mu} \Gamma_{\nu\rho}^{\lambda} \\ &= - \overline{\begin{Bmatrix} \mu \\ \nu\sigma \end{Bmatrix}}_{,\rho} + \overline{\begin{Bmatrix} \mu \\ \nu\rho \end{Bmatrix}}_{,\sigma} - \overline{\begin{Bmatrix} \mu \\ \lambda\rho \end{Bmatrix}}\,\overline{\begin{Bmatrix} \lambda \\ \nu\sigma \end{Bmatrix}} \\ &\quad + \overline{\begin{Bmatrix} \mu \\ \lambda\sigma \end{Bmatrix}}\,\overline{\begin{Bmatrix} \lambda \\ \nu\rho \end{Bmatrix}} - \Gamma_{\lambda\rho}^{*\mu} \overline{\begin{Bmatrix} \lambda \\ \nu\sigma \end{Bmatrix}} - \overline{\begin{Bmatrix} \mu \\ \lambda\rho \end{Bmatrix}} \Gamma_{\nu\sigma}^{*\lambda} \\ &\quad + \Gamma_{\lambda\sigma}^{*\mu} \overline{\begin{Bmatrix} \lambda \\ \nu\rho \end{Bmatrix}} + \overline{\begin{Bmatrix} \mu \\ \lambda\sigma \end{Bmatrix}} \Gamma_{\nu\rho}^{*\lambda}. \end{aligned} \tag{16}$$

利用(7)和(13)式,并考虑坐标变换关系(5)式,得到

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \rho \\ \mu\nu \end{Bmatrix} &= \frac{1}{2} g^{\rho\lambda} \left(g_{\lambda\nu,\mu} + g_{\mu\lambda,\nu} - g_{\mu\nu,\lambda} \right) \\ &= \frac{1}{2} g^{\rho\lambda} \Big[\left(g_{ij} b_{\lambda}^{i} b_{\nu}^{j} \right)_{,\mu} + \left(g_{ij} b_{\lambda}^{i} b_{\mu}^{j} \right)_{,\nu} \\ &\quad - \left(g_{ij} b_{\mu}^{i} b_{\nu}^{j} \right)_{,\lambda} \Big] \\ &= \begin{Bmatrix} i \\ jk \end{Bmatrix} b_{\mu}^{k} b_{\nu}^{j} a_{l}^{\rho} + a_i^{\rho} b^{i}_{(\mu,\nu)} - g^{\rho\lambda} g_{\sigma\nu} a_i^{\sigma} b^{i}_{[\mu,\lambda]} \\ &\quad - g^{\rho\lambda} g_{\sigma\mu} a_i^{\sigma} b^{i}_{[\nu,\lambda]} \\ &= \overline{\begin{Bmatrix} \rho \\ \mu\nu \end{Bmatrix}} + \Gamma_{(\mu\nu)}^{*\rho} - S_{\nu\mu}^{\cdot\cdot\rho} - S_{\mu\nu}^{\cdot\cdot\rho}, \end{aligned} \tag{17}$$

其中

$$S_{\nu\mu}^{\cdot\cdot\rho} = g^{\rho\lambda} g_{\nu\sigma} S_{\mu\lambda}^{\sigma}.$$

将(17)式代入(14)式,得到 Riemann-Cartan 空间中联络的通常表示

$$\begin{aligned} \Gamma_{\mu\nu}^{\rho} &= \begin{Bmatrix} \rho \\ \mu\nu \end{Bmatrix} + S_{\nu\mu}^{\rho} + S_{\nu\mu}^{\cdot\cdot\rho} + S_{\mu\nu}^{\cdot\cdot\rho} \\ &= \begin{Bmatrix} \rho \\ \mu\nu \end{Bmatrix} + K_{\mu\nu}^{\rho}, \end{aligned} \tag{18}$$

其中 $K_{\mu\nu}^{\rho}$ 为 Riemann-Cartan 空间中的扭曲张量.显见,这是一个与度规相容的联络.因此,曲率表达式亦是

$$\begin{aligned} R_{\nu\sigma\rho}^{\mu} &= - \begin{Bmatrix} \mu \\ \nu\sigma \end{Bmatrix}_{,\rho} + \begin{Bmatrix} \mu \\ \nu\rho \end{Bmatrix}_{,\sigma} - \begin{Bmatrix} \mu \\ \lambda\rho \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \lambda \\ \nu\sigma \end{Bmatrix} \\ &\quad + \begin{Bmatrix} \mu \\ \lambda\sigma \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \lambda \\ \nu\rho \end{Bmatrix} - K_{\lambda\rho}^{\mu} \begin{Bmatrix} \lambda \\ \nu\sigma \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \mu \\ \lambda\rho \end{Bmatrix} K_{\nu\sigma}^{\lambda} \\ &\quad + K_{\lambda\sigma}^{\mu} \begin{Bmatrix} \lambda \\ \nu\rho \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \mu \\ \lambda\sigma \end{Bmatrix} K_{\nu\rho}^{\lambda} \\ &\quad - K_{\nu\sigma,\rho}^{\mu} + K_{\nu\rho,\sigma}^{\mu} - K_{\lambda\rho}^{\mu} K_{\nu\sigma}^{\lambda} + K_{\lambda\sigma}^{\mu} K_{\nu\rho}^{\lambda}. \end{aligned} \tag{19}$$

当空间 W 为 Euclidean 空间时,$g_{ij} = \delta_{ij}$,$\Gamma_{jk}^{i} = 0$,$S_{jk}^{i} = 0$,(4)式退化为从有挠率有曲率的 Riemann-Cartan 空间到平直空间的映射,导数的协变性条件、空间 Q 的联络、挠率等分别变为

$$\frac{\mathrm{d} V^{i}}{\mathrm{d} t} = b_{\mu}^{i} \frac{\mathrm{D} V^{\mu}}{\mathrm{D} t}, \tag{20}$$

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\rho} = \Gamma_{\mu\nu}^{*\rho} = a_i^{\rho} b_{\mu,\nu}^{i}, \tag{21}$$

$$S_{\mu\nu}^{\rho} = S_{\mu\nu}^{*\rho} = a_i^{\rho} b^{i}_{[\mu,\nu]}. \tag{22}$$

容易验证,联络(21)式满足

$$\begin{aligned} \mathrm{D}_{\nu} a_i^{\rho} &= a_{i,\nu}^{\rho} + \Gamma_{\mu\nu}^{\rho} a_i^{\mu} = 0, \\ \mathrm{D}_{\nu} b_{\mu}^{i} &= b_{\mu,\nu}^{i} - \Gamma_{\mu\nu}^{\rho} b_{\rho}^{i} = 0. \end{aligned} \tag{23}$$

特别是该联络的曲率为零,即

$$\begin{aligned} R_{\nu\sigma\rho}^{\mu} &= R_{\nu\sigma\rho}^{*\mu} \\ &= - \Gamma_{\nu\sigma,\rho}^{*\mu} + \Gamma_{\nu\rho,\sigma}^{*\mu} - \Gamma_{\lambda\rho}^{*\mu} \Gamma_{\nu\sigma}^{*\lambda} + \Gamma_{\lambda\sigma}^{*\mu} \Gamma_{\nu\rho}^{*\lambda} \\ &= 0. \end{aligned} \tag{24}$$

说明这样得到的空间 Q 为有挠率、无曲率的 Weitzenbock 空间[22,23].可以证明,这一结论对非满秩非完整映射同样成立.

3. Riemann-Cartan 空间中的运动方程

完整动力学系统的位形空间为 Riemann 空间,这个空间的测地线和自平行线重合,即为

$$\ddot{w}^{i} + \begin{Bmatrix} i \\ jk \end{Bmatrix} \dot{w}^{j} \dot{w}^{k} = 0. \tag{25}$$

该方程既可以由描述自平行特征的 d'Alembert-Lagrange 微分变分原理得出,也可以由描述短程特征的 Hamilton 积分变分原理导出,前者等价于 $\frac{\mathrm{D}\dot{w}^i}{\mathrm{D}t}=0$,后者等价于 $\delta\int_{t_1}^{t_2} g_{ij}\mathrm{d}w^i\mathrm{d}w^j = 0$. 如果一个动力学系统的位形空间具有 Riemann-Cartan 结构,由于空间的挠率不为零,测地线与自平行线将分离,由 Hamilton 原理所得到的运动方程仍然为(25)式所示的测地线方程,而由 d'Alembert-Lagrange 原理得到的运动方程则是由该空间联络的对称部分所决定的自平行线方程,即

$$\ddot{w}^i + \Gamma^i_{jk}\dot{w}^j\dot{w}^k = 0. \tag{26}$$

作为一个不受人为控制的动力学系统,它所满足的物理原理应该是符合惯性原理的 d'Alembert-Lagrange 原理. 下面就从空间 W 中的 d'Alembert-Lagrange 微分变分原理

$$(-[L]_i + Q_i)\delta w^j = 0 \tag{27}$$

出发,求出空间 Q 中的动力学方程. 这里,

$$L = \frac{1}{2}g_{ij}\dot{w}^i\dot{w}^j,$$

$$[L]_i = \frac{\partial L}{\partial w^i} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{w}^i}.$$

考虑(4)式,假设空间 W 与空间 Q 的坐标变分满足

$$\delta w^i = b^i_\mu \delta q^\mu, \tag{28}$$

如果系统不受非保守力作用,利用(4),(5)和(28)式,则变分原理变换为

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{w}^i} - \frac{\partial L}{\partial w^i}\right)\delta w^j \\
&= \left(g_{ij}\ddot{w}^j - \frac{1}{2}g_{jk,i}\dot{w}^j\dot{w}^k + g_{ij,k}\dot{w}^j\dot{w}^k\right)\delta w^i \\
&= \left(g_{ij}\ddot{w}^j + g_{ij}\begin{Bmatrix} j \\ kl \end{Bmatrix}\dot{w}^k\dot{w}^l\right)\delta w^i \\
&= g_{ij}\left(\ddot{w}^j + \begin{Bmatrix} j \\ kl \end{Bmatrix}\dot{w}^k\dot{w}^l\right)\delta w^i \\
&= g_{ij}\left(b^j_\mu\ddot{q}^\mu + b^j_{\mu,\nu}\dot{q}^\mu\dot{q}^\nu + \begin{Bmatrix} j \\ kl \end{Bmatrix}b^k_\mu b^l_\nu\dot{q}^\mu\dot{q}^\nu\right)b^i_\rho\delta q^\rho \\
&= g_{ij}b^i_\rho\left[b^j_\mu\ddot{q}^\mu + \left(b^j_{\mu,\nu} + \begin{Bmatrix} j \\ kl \end{Bmatrix}b^k_\mu b^l_\nu\right)\dot{q}^\mu\dot{q}^\nu\right]\delta q^\rho \\
&= \left[g_{ij}b^i_\rho b^j_\mu\ddot{q}^\mu + g_{ij}b^i_\rho\left(b^j_{\mu,\nu} + \begin{Bmatrix} j \\ kl \end{Bmatrix}b^k_\mu b^l_\nu\right)\dot{q}^\mu\dot{q}^\nu\right]\delta q^\rho \\
&= g_{\rho\mu}\left[\ddot{q}^\mu + g^{\mu\lambda}g_{ij}b^i_\lambda\left(b^j_{\sigma,\nu} + \begin{Bmatrix} j \\ kl \end{Bmatrix}b^k_\sigma b^l_\nu\right)\dot{q}^\sigma\dot{q}^\nu\right]\delta q^\rho \\
&= g_{\rho\mu}[\ddot{q}^\mu + \Gamma^\mu_{\sigma\nu}\dot{q}^\sigma\dot{q}^\nu]\delta q^\rho \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{29}$$

考虑到 δq^ρ 的任意性,得到

$$\ddot{q}^\mu + \Gamma^\mu_{\sigma\nu}\dot{q}^\sigma\dot{q}^\nu = 0. \tag{30}$$

可见,此时在空间 Q 中,系统的运动方程为自平行线方程.

(30)式表明,在(3)或(4)式所表示的对应关系下,系统在空间 W 和空间 Q 的运动分别表现为短程线和自平行线,即空间 W 的短程线对应于空间 Q 的自平行线. 这种对应为非完整映射

$$\ddot{w}^i + \begin{Bmatrix} i \\ jk \end{Bmatrix}\dot{w}^j\dot{w}^k = b^i_\mu(\ddot{q}^\mu + \Gamma^\mu_{\sigma\nu}\dot{q}^\sigma\dot{q}^\nu). \tag{31}$$

这个关系既可以直接验证,也可以将 $V^i = \dot{w}^i$,$V^\mu = \dot{q}^\mu$ 代入(9)式中得到. 利用(18)式,方程(30)也可以表示为[14,20]

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\mu}\right) - \frac{\partial L}{\partial q^\mu} = 2S^\lambda_{\mu\nu}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\lambda}\dot{q}^\nu. \tag{32}$$

4. Euler 方程的几何描述

作为一个应用实例,研究定点转动刚体的运动方程在两个不同位形空间中的几何表示. 在研究刚体定点转动的经典方法中,考虑到组成刚体的质点间的几何约束,定点转动的刚体只有 3 个自由度,通常选择 Euler 角 φ,θ,ψ 作为广义坐标来描述刚体运动,其中 φ 是进动角,θ 是章动角,ψ 是自转角. 与 φ,θ,ψ 相对应的角速度可以用 Euler 运动学公式表示为

$$\begin{pmatrix}\omega^1\\ \omega^2\\ \omega^3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\dot{\varphi}\sin\theta\sin\psi + \dot{\theta}\cos\psi \\ \dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi - \dot{\theta}\sin\psi \\ \dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\theta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\sin\theta\sin\psi & \cos\psi & 0 \\ \sin\theta\cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \cos\theta & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dot{\varphi}\\ \dot{\theta}\\ \dot{\psi}\end{pmatrix}. \tag{33}$$

它的逆变换为

$$\begin{pmatrix}\dot{\varphi}\\ \dot{\theta}\\ \dot{\psi}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{\sin\psi}{\sin\theta} & \frac{\cos\psi}{\sin\theta} & 0 \\ \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ -\sin\psi\cot\theta & -\cos\psi\cot\theta & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\omega^1\\ \omega^2\\ \omega^3\end{pmatrix}. \tag{34}$$

角速度 $\omega^{\mu}(\mu=1,2,3)$ 不是严格意义上的速度概念,可称之为准速度,它在形式上可以看成准坐标 π 的导数,即 $\omega^{\mu}=\dot{\pi}^{\mu}$. 如果取 $w^1=\varphi, w^2=\theta, w^3=\psi$ 作为位形空间 W 的坐标,而空间 Q 的坐标为 π^{μ},则(34)式可表述为

$$\dot{w}^i=b^i_{\mu}\dot{\pi}^{\mu}.$$

比较(4)与(34)式,得到两个互相可逆矩阵

$$\boldsymbol{A}=(a^{\mu}_i)_{3\times3}=\begin{pmatrix}\sin\theta\sin\psi & \cos\psi & 0\\ \sin\theta\cos\psi & -\sin\psi & 0\\ \cos\theta & 0 & 1\end{pmatrix}, \tag{35}$$

$$\boldsymbol{B}=(b^i_{\mu})_{3\times3}=\begin{pmatrix}\dfrac{\sin\psi}{\sin\theta} & \dfrac{\cos\psi}{\sin\theta} & 0\\ \cos\psi & -\sin\psi & 0\\ -\sin\psi\cot\theta & -\cos\psi\cot\theta & 1\end{pmatrix}. \tag{36}$$

刚体定点转动时的动能可以表示为

$$T=L=\frac{1}{2}I_{\mu\nu}\omega^{\mu}\omega^{\nu}, \tag{37}$$

其中二阶张量 I 为刚体的转动惯量. 不失一般性,如果将本体坐标轴取作与刚体的惯量主轴重合,则刚体的转动惯量将只有对角元素,即

$$I_{\mu\nu}=I_{\mu}\delta_{\mu\nu}. \tag{38}$$

此时刚体的动能表达式简化为

$$T=\frac{1}{2}I_{\mu}(\omega^{\mu})^2. \tag{39}$$

此时空间 Q 的度规为

$$(g_{\mu\nu})=\begin{pmatrix}I_1 & 0 & 0\\ 0 & I_2 & 0\\ 0 & 0 & I_3\end{pmatrix},\quad (g^{\mu\nu})=\begin{pmatrix}\dfrac{1}{I_1} & 0 & 0\\ 0 & \dfrac{1}{I_2} & 0\\ 0 & 0 & \dfrac{1}{I_3}\end{pmatrix}. \tag{40}$$

空间 W 的度规为

$$\begin{aligned}(g_{ij})_{3\times3}&=(g_{\mu\nu}a^{\mu}_i a^{\nu}_j)_{3\times3}\\ &=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\cdot(g_{\mu\nu})\cdot\boldsymbol{A}\\ &=\begin{pmatrix}I_1\sin^2\theta\sin^2\psi+I_2\sin^2\theta\cos^2\psi+I_3\cos^2\theta & (I_1-I_2)\sin\theta\sin\psi\cos\psi & I_3\cos\theta\\ (I_1-I_2)\sin\theta\sin\psi\cos\psi & I_1\cos^2\psi+I_2\sin^2\psi & 0\\ I_3\cos\theta & 0 & I_3\end{pmatrix},\end{aligned} \tag{41}$$

$$(g^{ij})_{3\times3}=\begin{pmatrix}\dfrac{I_1\cos^2\psi+I_2\sin^2\psi}{I_1I_2\sin^2\theta} & \dfrac{(I_2-I_1)\sin2\psi}{I_1I_2\sin\theta} & \dfrac{-\cos\theta}{\sin^2\theta}\left(\dfrac{\cos^2\psi}{I_2}+\dfrac{\sin^2\psi}{I_1}\right)\\ \dfrac{(I_2-I_1)\sin2\psi}{I_1I_2\sin\theta} & \dfrac{\sin^2\psi}{I_2}+\dfrac{\cos^2\psi}{I_1} & \dfrac{(I_1-I_2)\sin2\psi}{2I_1I_2\tan\theta}\\ \dfrac{-\cos\theta}{\sin^2\theta}\left(\dfrac{\cos^2\psi}{I_2}+\dfrac{\sin^2\psi}{I_1}\right) & \dfrac{(I_1-I_2)\sin2\psi}{2I_1I_2\tan\theta} & \cot^2\theta\left(\dfrac{\cos^2\psi}{I_2}+\dfrac{\sin^2\psi}{I_1}\right)+\dfrac{1}{I_3}\end{pmatrix}. \tag{42}$$

将(41)和(42)式代入(1)式得到空间 W 的Riemann-Christoffel联络的非零分量为

$$\begin{Bmatrix}1\\11\end{Bmatrix}=\frac{(I_1-I_2)(I_1+I_2-I_3)\sin2\psi\cos\theta}{2I_1I_2},$$

$$\begin{Bmatrix}1\\2\,1\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}1\\1\,2\end{Bmatrix}=\frac{(I_1+I_2-I_3)\cos\theta(I_1\cos^2\psi+I_2\sin^2\psi)}{2I_1I_2\sin\theta},$$

$$\begin{Bmatrix}1\\3\,1\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}1\\1\,3\end{Bmatrix}=\frac{(I_1-I_2)(I_1+I_2-I_3)\sin2\psi}{4I_1I_2},$$

$$\begin{Bmatrix}2\\1\,1\end{Bmatrix}=\frac{(I_1-I_2)(I_1+I_2-I_3)\cos^2\psi\sin2\theta+I_1(I_3-I_1)\sin2\theta}{2I_1I_2},$$

$$\begin{Bmatrix}2\\2\,1\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}2\\1\,2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}3\\3\,1\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}3\\1\,3\end{Bmatrix}=\frac{-(I_1-I_2)(I_1+I_2-I_3)\sin2\psi\cos\theta}{4I_1I_2},$$

$$\begin{Bmatrix}2\\3\,1\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}2\\1\,3\end{Bmatrix}=\frac{(I_1^2-I_2^2-I_1I_3+I_2I_3)\cos^2\psi\sin\theta+(I_1I_3+I_1I_2-I_1^2)\sin\theta}{2I_1I_2},$$

$$
\begin{aligned}
\begin{Bmatrix} 3 \\ 1\ 1 \end{Bmatrix} &= \frac{(I_1 I_3^2 - I_1^2 I_3 + I_2^2 I_3 - I_2 I_3^2)\cos^2\theta\sin 2\psi - (I_1^2 I_2 - I_1 I_2^2)\sin^2\theta\sin 2\psi}{2I_1 I_2 I_3}, \\
\begin{Bmatrix} 3 \\ 2\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 3 \\ 1\ 2 \end{Bmatrix} &= \frac{(I_1 I_3^2 - I_1^2 I_3 + I_2^2 I_3 - I_2 I_3^2 + 2I_1^2 I_2 - 2I_1 I_2^2)\cos^2\theta\cos^2\psi}{2I_1 I_2 I_3\sin\theta} \\
&\quad + \frac{(I_1 I_2^2 - I_1^2 I_2 + I_2 I_3^2 - I_2^2 I_3)\cos^2\theta}{2I_1 I_2 I_3\sin\theta} \\
&\quad + \frac{(2I_1 I_2^2 - 2I_1^2 I_2)\cos^2\psi + I_1^2 I_2 - I_1 I_2^2 - I_1 I_2 I_3}{2I_1 I_2 I_3\sin\theta}, \\
\begin{Bmatrix} 1 \\ 3\ 2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 2\ 3 \end{Bmatrix} &= \frac{(I_1^2 - I_1 I_3)\cos^2\psi + (I_2^2 - I_2 I_3)\sin^2\psi - I_1 I_2}{2I_1 I_2\sin\theta}, \\
\begin{Bmatrix} 2 \\ 3\ 2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2 \\ 2\ 3 \end{Bmatrix} &= \frac{-(I_1 - I_2)(I_1 + I_2 - I_3)\sin 2\psi}{4I_1 I_2}, \\
\begin{Bmatrix} 3 \\ 2\ 2 \end{Bmatrix} &= \frac{(I_1 - I_2)\sin 2\psi}{2I_3}, \\
\begin{Bmatrix} 3 \\ 3\ 2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 3 \\ 2\ 3 \end{Bmatrix} &= \frac{-(I_1^2 - I_1 I_3)\cos^2\psi\cos\theta - (I_2^2 - I_2 I_3)\sin^2\psi\cos\theta + I_1 I_2\cos\theta}{2I_1 I_2\sin\theta}.
\end{aligned}
\tag{43}
$$

将(43)式代入(2)式可得出相应的 Riemann 空间的曲率,在此限于篇幅不列出结果,而挠率 $S^i_{jk}=0$.易验证,由在空间 W 中刚体自由转动的 Lagrange 方程

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial T}{\partial\varphi} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial\dot\varphi} &= 0, \\
\frac{\partial T}{\partial\theta} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial\dot\theta} &= 0, \\
\frac{\partial T}{\partial\psi} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial\dot\psi} &= 0.
\end{aligned}
\tag{44}
$$

可推出相应的 Euler 方程

$$
\begin{aligned}
(I_1 - I_2)\omega^1\omega^2 - I_3\dot\omega^3 &= 0, \\
(I_2 - I_3)\omega^2\omega^3 - I_1\dot\omega^1 &= 0, \\
(I_3 - I_1)\omega^3\omega^1 - I_2\dot\omega^2 &= 0.
\end{aligned}
\tag{45}
$$

显见,这个方程是由 Euler 角描述的 Riemann 位形空间中的测地线方程.

如果采用上述角速度和相应的准坐标,根据上述理论,刚体定点自由转动的 Euler 方程应该是准坐标空间 Π(相当于上述 Riemann-Cartan 空间 Q)的自平行线方程(26)或(32),即

$$
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot\pi^\mu}\right) - \frac{\partial T}{\partial\pi^\mu} = 2S^\lambda_{\mu\nu}\frac{\partial T}{\partial\dot\pi^\lambda}\dot\pi^\nu. \tag{46}
$$

方程(46)中,$\dot\pi^\mu=\omega^\mu$,$T=\frac{1}{2}I_{\mu\nu}\omega^\mu\omega^\nu$.显见,这个方程实际为

$$
I_\mu\dot\omega^\mu = 2S^\lambda_{\mu\nu}I_\lambda\delta_{\lambda\sigma}\omega^\sigma\omega^\nu. \tag{47}
$$

方程(47)左边的重复指标 μ 不表示求和.将(35)和(36)式中的矩阵元代入(13)式,经繁琐计算可得到空间 Π 非零的挠率分量为

$$
\begin{aligned}
S^3_{12} = S^2_{31} = S^1_{23} &= -\frac{1}{2}, \\
S^2_{13} = S^3_{21} = S^1_{32} &= \frac{1}{2}.
\end{aligned}
\tag{48}
$$

将(35),(36)和(43)式代入(11)式,可求得空间 Π 的联络为

$$
(\Gamma^1_{\mu\nu})_{3\times3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{-I_1 - I_2 + I_3}{2I_1} \\ 0 & \dfrac{I_1 - I_2 + I_3}{2I_1} & 0 \end{pmatrix}, \tag{49}
$$

$$
(\Gamma^2_{\mu\nu})_{3\times3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dfrac{I_1 + I_2 - I_3}{2I_2} \\ 0 & 0 & 0 \\ \dfrac{I_1 - I_2 - I_3}{2I_2} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{50}
$$

$$
(\Gamma^1_{\mu\nu})_{3\times3} = \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{-I_1 + I_2 - I_3}{2I_3} & 0 \\ \dfrac{-I_1 + I_2 + I_3}{2I_3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{51}
$$

将(49)—(51)式代入(16)式,即可得到准坐标空间曲率的非零分量为

$$R^1_{212} = -R^1_{221} = \frac{(I_1 - I_2 - I_3)(I_1 - I_2 + I_3)}{4I_1 I_3},$$

$$R^1_{313} = -R^1_{331} = \frac{(I_1 - I_2 - I_3)(I_1 + I_2 - I_3)}{4I_1 I_2},$$

$$R^2_{112} = -R^2_{121} = \frac{(I_1 - I_2 + I_3)(I_2 - I_1 + I_3)}{4I_2 I_3},$$

$$R^2_{323} = -R^2_{332} = \frac{(I_2 - I_1 - I_3)(I_1 + I_2 - I_3)}{4I_1 I_2},$$

$$R^3_{113} = -R^3_{131} = \frac{(I_2 - I_1 + I_3)(I_1 + I_2 - I_3)}{4I_2 I_3},$$

$$R^3_{223} = -R^3_{232} = \frac{(I_1 + I_2 - I_3)(I_1 - I_2 + I_3)}{4I_1 I_3}.$$

由此可知,准坐标空间 Π 是一个曲率非零、挠率为常数的 Riemann-Cartan 空间.将(48)式代入(47)式,得到的正好是 Euler 方程(45),这说明 Euler 方程在这个准坐标空间中是自平行线方程.

5. 结 论

利用非完整映射方法,可以从一个已知 Riemann 空间构造出一个嵌入其中的 Riemann-Cartan 空间,在此过程中,Riemann 空间中的测地线将被映射为 Riemann-Cartan 空间中的自平行线.把这种非完整映射理论应用到刚体定点转动问题上,得出 Euler 方程是 Euler 角描述的 Riemann 位形空间 W 中的测地线方程,而在刚体角速度对应的准坐标空间 Π 中是常挠率 Riemann-Cartan 空间中的自平行线方程的结论.

[1] Neimark J, Fufaev N 1972 *Dynamics of Nonholonomic Systems* (Providence: American Mathematical Society)

[2] Mei F X 2000 *Appl. Mech. Rev.* **53** 283

[3] Guo Y X, Zhao Z, Liu S X, Wang Y, Zhu N, Han X J 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 3838 (in Chinese) [郭永新、赵 、刘世兴、王 勇、朱 娜、韩晓静 2006 物理学报 **55** 3838]

[4] Bloch A M, Baillieul J, Crouch P, Marsden J 2003 *Nonholonomic Mechanics and Control* (London: Springer)

[5] Guo Y X, Luo S K, Mei F X 2004 *Adv. Mech.* **34** 477 (in Chinese) [郭永新、罗绍凯、梅凤翔 2004 力学进展 **34** 477]

[6] Guo Y X, Liu S X, Liu C, Luo S K, Wang Y 2007 *J. Math. Phys.* **48** 082901

[7] Guo Y X, Luo S K, Shang M, Mei F X 2001 *Rep. Math. Phys.* **47** 313

[8] Guo Y X, Liu C, Liu S X, Chang P 2009 *Sci. China.* E **52** 761

[9] Bloch A M, Krishnaprasad P S, Marsden J E, Murray R 1996 *Arch. Rational Mech. Anal.* **136** 21

[10] Iglesias-Ponte D, de Leon M, de Diego D M 2008 *J. Phys.* A **41** 015205

[11] Shapiro I L 2002 *Phys. Rep.* **357** 113

[12] Hehl F W, McCrea J D, Mielke E W, Ne'eman Y 1995 *Phys. Rep.* **258** 1

[13] Chee G Y, Guo Y X 2004 *Phys. Rev.* D **70** 044009

[14] Guo Y X, Wang Y, Chee G Y, Mei F X 2005 *J. Math. Phys.* **46** 062902

[15] Kleinert H 2002 *Path Integrals in Quantum Mechanics, Statistics, Polymer Physics, and Financial Markets* (3rd ed) (Singapore: World Scientific) p419

[16] Kleinert H, Shabanov S V 1998 *Phys. Lett.* B **428** 315

[17] Kleinert H, Pelster A 1999 *Gen. Rel. Grav.* **31** 1439

[18] Kleinert H, Pelster A 1998 *Acta Phys. Pol.* **29** 1015

[19] Fiziev P, Kleinert H 1996 *Europhys. Lett.* **35** 241

[20] Shabanov S V 1998 *J. Phys* A **31** 5177

[21] Wang Y, Guo Y X 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 5517 (in Chinese) [王 勇、郭永新 2005 物理学报 **54** 5517]

[22] Guo Y X 1991 *J. Liaoning Norm. Univ.* **14** 296 (in Chinese) [郭永新 1991 辽宁师范大学学报 **14** 296]

[23] Hayashi K, Shirafuji T 1979 *Phys. Rev.* D **19** 3524

Nonholonomic mapping theory and geometric formulation for rotation of a rigid body with one fixed point*

Wang Yong[1)] Guo Yong-Xin[2)†] Lü Qun-Song[3)] Liu Chang[4)]

1)(*School of Basic Medical Science*, *Guangdong Medical College*, *Dongguan* 523808, *China*)

2)(*College of Physics*, *Liaoning University*, *Shenyang* 110036, *China*)

3)(*Department of Experimental Management*, *Guangdong Medical College*, *Dongguan* 523808, *China*)

4)(*Department of Applied Mechanics*, *Beijing Institute of Technology*, *Beijing* 100081, *China*)

(Received 8 January 2009; revised manuscript received 24 March 2008)

Abstract

The method of nonholonomic mapping is adopted to construct a Riemann-Cartan space embedded in a known Riemann space. As a special case, Weitzenbock space is embedded in an Euclidean space. By means of the nonholonomic mapping and d'Alembert-Lagrange principle a geodesic in a Riemann space is mapped to an autoparallel in a Riemann-Cartan space. The mapping theory is applied to the problem of rotation of a rigid body with a fixed point. It is proved that Euler equations for the rigid body are equations of geodesic in the Riemann configuration space described by Euler angles, whereas the equations in the pseudo-coordinate space corresponding to angular velocities of the rigid body are equations of autoparallel in the Riemann-Cartan space with constant torsion.

Keywords: Euler angles, nonholonomic mapping, Riemann-Cartan space, autoparallel

PACC: 0320

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 10872084, 10472040), the Outstanding Young Talents Training Foundation of Liaoning Province, China (Grant No. 3040005), the Scientific Research Foundation of Institution of Higher Education of Liaoning Province, China (Grant No. 2008S098), the Program for Excellent Talents of Institution of Higher Education of Liaoning Province, China (Grant No. 2008RC20) and the Program of Key Laboratory Constructing of Liaoning Provincial, China (Grant No. 2008403009).

† Corresponding author. E-mail: yxguo@lnu.edu.cn