

# 用晶格玻尔兹曼方法研究颗粒在涡流中的运动<sup>\*</sup>

施 娟<sup>1)</sup> 李 剑<sup>2)</sup> 邱 冰<sup>2)</sup> 李华兵<sup>2)†</sup>

1) 桂林电子科技大学信息与通信学院 桂林 541004)

2) 桂林电子科技大学信息材料科学与工程系 桂林 541004)

(2008 年 12 月 10 日收到, 2008 年 12 月 25 日收到修改稿)

用晶格玻尔兹曼方法研究小颗粒在涡流中的运动. 涡流由流经空腔的流体产生. 用动量交换法和压力张量积分法计算颗粒在涡流中的运动轨迹、速度和角速度. 最后用张量积分法计算两个不同半径的颗粒在涡流中的运动.

关键词: 晶格玻尔兹曼方法, 涡流, 颗粒

PACC: 0520

## 1. 引 言

悬浮颗粒在流体中的运动广泛存在于自然界和工业生产中, 如花粉颗粒的输运与传播、血管中红细胞随血浆的运动、废水中带粒流的分离与处理等. 数值研究悬浮颗粒在流体中的运动涉及动边界, 如果是可变形的生物泡膜(如红细胞), 则还涉及到变形边界. 传统的计算方法在处理动边界问题时需要特别大的计算量, 计算方法也很复杂, 即使利用超级计算机也很难进行<sup>[1-5]</sup>. 晶格玻尔兹曼方法(lattice Boltzmann method, 简记为 LBM)是在格子气(lattice gas)模型的基础上发展起来的一种新的探索复杂系统的数值计算方法和模拟方法<sup>[6,7]</sup>. 它既能模拟一个近乎真实的固液边界条件, 又由于它是分立(discrete)统计模型, 计算速度快、所需内存小, 可用于模拟较大的体系, 并且算法本身还易于并行化. LBM 已成为目前流体系统的研究中最有发展前景的方法之一. 它已被成功地应用于数值模拟多相流、化学流和多孔媒质中的流体等复杂系统的行为<sup>[8-10]</sup>. 由于 LBM 中流体格点间的相互作用是局域的, 特别适合动边界和变形边界问题的研究, 最近已被广泛地应用于血液流的模拟<sup>[11,12]</sup>. Aidun 等<sup>[13]</sup>用边界获得的动量计算流体对边界的作用力并修正了边界处理方法, 使颗粒内流体满足质量守恒条件, 研

究了密度小于流体的颗粒在重力场中的运动. 文献 [14] 采用压力张量在边界上的积分来计算流体对边界的作用力, 并采用 Filippova 等<sup>[15]</sup>提出的曲线边界条件, 边界表面上用 Inamuro 等<sup>[16]</sup>提出的压力张量积分公式计算颗粒边界受到的流体力, 计算结果比用动量交换法和有限元法的结果更完美.

本文将用 LBM 研究颗粒在二维涡流中的运动. 涡流由通过进出口流入空腔的流体产生, 分别用动量交换法和压力张量积分法计算颗粒受到的流体作用力, 比较两种方法计算颗粒在涡流中的运动轨迹、速度和角速度. 最后用压力张量积分法计算了颗粒脱离涡流的情况. 该模型可望用于研究泥沙沉积及冲刷和细胞淤积等问题.

## 2. 模型和流体对颗粒作用力的计算方法

### 2.1. D2Q9 LBM 模型

时空离散的单弛豫 Boltzmann 方程可以写为

$$f_i(\mathbf{x} + \mathbf{e}_i, t + 1) - f_i(\mathbf{x}, t) = -\frac{1}{\tau} [f_i(\mathbf{x}, t) - f_i^{\text{eq}}(\mathbf{x}, t)], \quad (1)$$

其中  $f_i(\mathbf{x}, t)$  是  $\mathbf{x}$  位置、 $t$  时刻、微观速度为  $\mathbf{e}_i$  的单个粒子分布函数,  $f_i^{\text{eq}}(\mathbf{x}, t)$  是相应的局域平衡分布函

<sup>\*</sup> 国家自然科学基金(批准号:10747004)、广西壮族自治区青年科学基金(批准号:0640064)和广西壮族自治区自然科学基金(批准号:0542045)资助的课题.

<sup>†</sup> 通讯联系人, E-mail: hbli@guet.edu.cn

数. 对于 D2Q9 LBM 模型<sup>[6]</sup>, 微观速度  $e_i$  可表示为

$$e_0 = (0, 0),$$

$$e_i = (\cos(\pi(i-1)/2), \sin(\pi(i-1)/2))$$

$$(i = 1, 2, 3, 4),$$

$$e_i = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos(2\pi(i-1)/4), \sin(2\pi(i-1)/4))$$

$$(i = 5, 6, 7, 8).$$

微观速度集如图 1 所示.

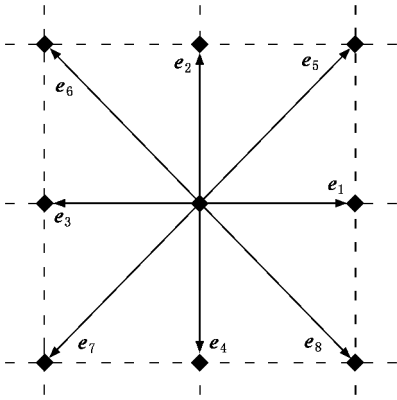


图 1 D2Q9 LBM 模型的微观速度

LBM 保持质量守恒和动量守恒,

$$\rho = \sum_{i=0}^8 f_i = \sum_{i=0}^8 f_i^{eq}, \quad (2)$$

$$\rho \mathbf{u} = \sum_{i=0}^8 f_i \mathbf{e}_i = \sum_{i=0}^8 f_i^{eq} \mathbf{e}_i, \quad (3)$$

其中  $\mathbf{u}$  是流体的宏观速度. 通过 Chapman-Enskog 展开, 可以得到如下的局域平衡分布函数形式<sup>[6]</sup>:

$$f_i^{eq} = w_i \rho \left[ 1 + 3 \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{u} + \frac{9}{2} (\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{u})^2 + \frac{3}{2} u^2 \right], \quad (4)$$

其中  $w_0 = \frac{4}{9}$ ,  $w_i = \frac{1}{9}$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ),  $w_i = \frac{1}{36}$  ( $i = 5, 6, 7, 8$ ).

### 2.2. 流体对颗粒作用的计算方法

LBM 中计算流体对颗粒边界作用力的方法有动量交换法<sup>[13]</sup>和压力张量积分法<sup>[17]</sup>两种. 动量交换法用下式计算流体对颗粒边界的作用力:

$$\mathbf{F}_T = \sum \mathbf{F}(\mathbf{x}_b) = \sum \mathbf{e}_i (\tilde{f}_i(\mathbf{x}_f, t) + \tilde{f}_i(\mathbf{x}_b, t)), \quad (5)$$

其中  $\mathbf{x}_f$  是流体格点,  $\mathbf{x}_b$  是颗粒内固体格点,  $\tilde{f}_i = f - \frac{1}{\tau} [f_i - f_i^{eq}]$  是沿  $e_i$  方向流向颗粒边界的碰后

分布函数,  $\tilde{f}_i$  是由曲线边界条件<sup>[15]</sup>计算得到沿  $e_i$  反方向从颗粒边界流出的分布函数.

颗粒边界所受到流体的合力矩也是计算得到所有边界受到流体作用的力矩之和, 即

$$\mathbf{T}_T = \sum (\mathbf{x}_b - \mathbf{x}_0) \times \mathbf{F}(\mathbf{x}_b)$$

$$= \sum (\mathbf{x}_b - \mathbf{x}_0) \mathbf{e}_i (\tilde{f}_i(\mathbf{x}_f, t) + \tilde{f}_i(\mathbf{x}_b, t)), \quad (6)$$

其中  $\mathbf{x}_0$  是参考点的坐标, 一般取颗粒质量中心.

压力张量积分法是用以下公式计算颗粒边界所受到的力和力矩,

$$\mathbf{F} = \int_s [\hat{p} - \rho \mathbf{u}(\mathbf{u} - \mathbf{u}_s)] \cdot d\mathbf{s}, \quad (7)$$

$$\mathbf{T} = \int_s \mathbf{r} \times \{ [\hat{p} - \rho \mathbf{u}(\mathbf{u} - \mathbf{u}_s)] \cdot d\mathbf{s} \}, \quad (8)$$

其中压力张量  $\hat{p}$  为

$$p_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2\tau} \rho \delta_{\alpha\beta} - \left( \frac{\tau - 1/2}{\tau} \right) \times \sum_i (\mathbf{e}_\alpha - u_\alpha)(\mathbf{e}_\beta - u_\beta) f_i. \quad (9)$$

这里  $\mathbf{u}_s$  是边界速度,  $d\mathbf{s}$  是面积元矢量,  $\mathbf{r}$  是从参考点指向  $d\mathbf{s}$  的矢量,  $f_i$  是边界上的分布函数, 用最近流体点分布函数代替<sup>[18]</sup>. 颗粒的轨迹平移速度 ( $v_x, v_y$ ) 和转动角速度  $\omega$  用半步蛙跳法计算<sup>[19]</sup>. 由于颗粒的运动, 新出现的流体点分布函数由外推法计算.

### 3. 数值模拟结果和讨论

下面用上述 LBM 研究颗粒在具有进出口的空腔流中的运动, 除特别说明外, 以下计算中均以格子为单位. 空腔如图 2 所示, 进出口采取文献 20 中的

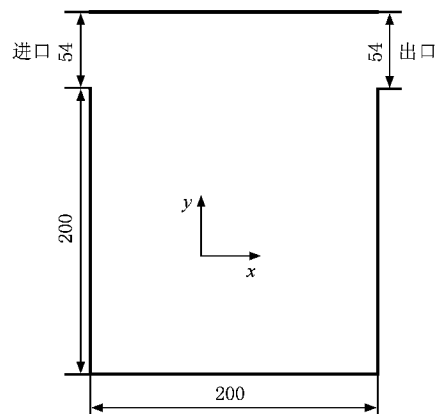


图 2 有进出口的空腔示意图(尺寸以格子为单位)

压力边界条件. 进口处流体密度取  $\rho_1 = 1.0035$ , 出口处流体密度取  $\rho_2 = 0.9965$ , 产生的压差为  $\Delta p = \frac{1}{3}(\rho_1 - \rho_2) = 0.0023$ . 弛豫时间  $\tau = 0.52$ , 颗粒的半径取为 7. 如果对应颗粒的物理半径  $r = 0.005 \text{ cm}$ ,

流体的黏滞系数  $\nu = 0.01 \text{ cm}^2/\text{s}$ , 则格子单位长度为  $0.000714 \text{ cm}$ , 格子单位时步长为  $3.4 \times 10^{-7} \text{ s}$ . 利用上述方法对颗粒在涡流中的运动进行模拟. 模拟时, 空腔采用无滑移边界条件<sup>[8]</sup>. 模拟结果如图 3—图 5 所示. 下面对有关结果进行分析和讨论.

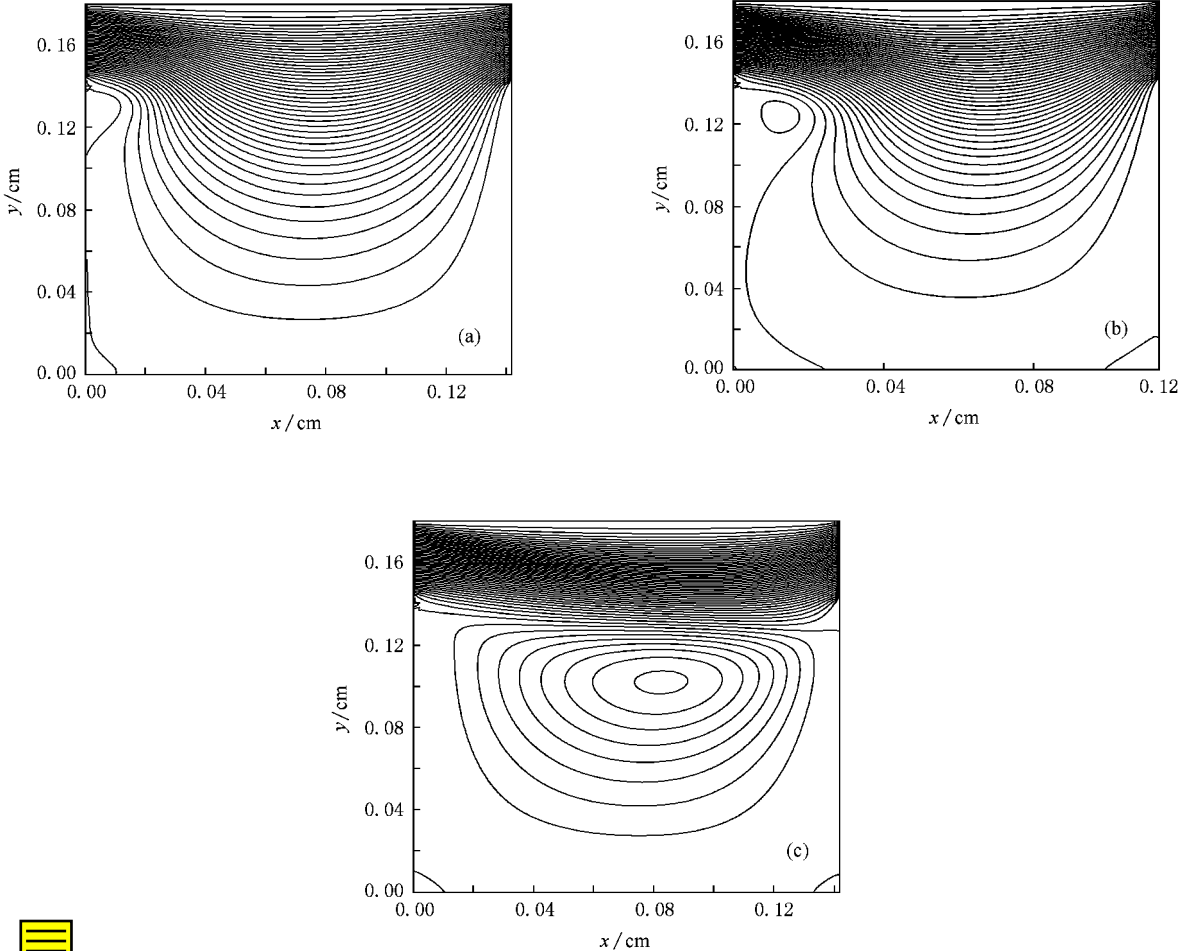


图 3 不同时刻空腔内流场的流线分布 (a)  $t = 0.0034 \text{ s}$  (b)  $t = 0.017 \text{ s}$  (c)  $t = 0.034 \text{ s}$

### 3.1. 具有进出口的空腔流流场分布

利用(1)式的数值计算结果, 由(3)式可以给出不同时刻空腔内流场的流线分布, 如图 3 所示, 从中可以看出流场中涡流的形成过程. 空腔中流体经 10000 时步(相当于  $t = 3.4 \times 10^{-3} \text{ s}$ )演化时, 流体在空腔内尚未形成明显的涡旋, 主要是对空腔的“冲刷”. 随着流体演化时步的增加, 在空腔的左上角开始出现了涡旋, 而且涡旋由小变大, 涡旋中心向空腔水平的中心方向迁移, 最后充满了整个空腔.

### 3.2. 两种计算方法所得结果比较

在计算流体对颗粒的作用力时, 动量交换法和

压力张量积分法是最常用的两种方法. 这里分别利用动量交换法和压力张量积分法模拟了半径为  $0.005 \text{ cm}$  的颗粒从  $(0.029 \text{ cm}, 0.029 \text{ cm})$  处开始运动的情况, 并对两种方法的模拟结果进行比较. 模拟开始时流体也是静止的.

图 4(a) 显示, 不论哪种方法, 颗粒最终都从空腔中脱离出去. 在颗粒从空腔底部运动到空腔上部时, 两种方法计算的颗粒在空腔底部的运动轨迹是一致的, 而颗粒在空腔上部运动的轨迹不同. 图 4(b)(c) 和 (d) 是两种方法计算得到的颗粒水平速度  $v_x$ 、竖直速度  $v_y$  和角速度  $\omega$  随时间的变化. 由此可以看出, 当  $t = 0 - 0.25 \text{ s}$  时, 两种算法基本一致; 当  $t > 0.25 \text{ s}$  时, 两种算法的结果出现差别. 这是因

为动量交换法由于速度的离散化,造成一些方向上动量的丢失或者多出一些方向的动量,而压力张量积分法把离散的速度连续化,故而流体对边界上作用力的计算精度得以提高.在计算颗粒沉降时我们

已经证实压力张量积分法得到的结果和有限元法的结果符合得很好,而动量交换法与有限元法的结果符合得不太好<sup>[14]</sup>.下面将采用压力张量积分法研究颗粒在涡流中的运动.

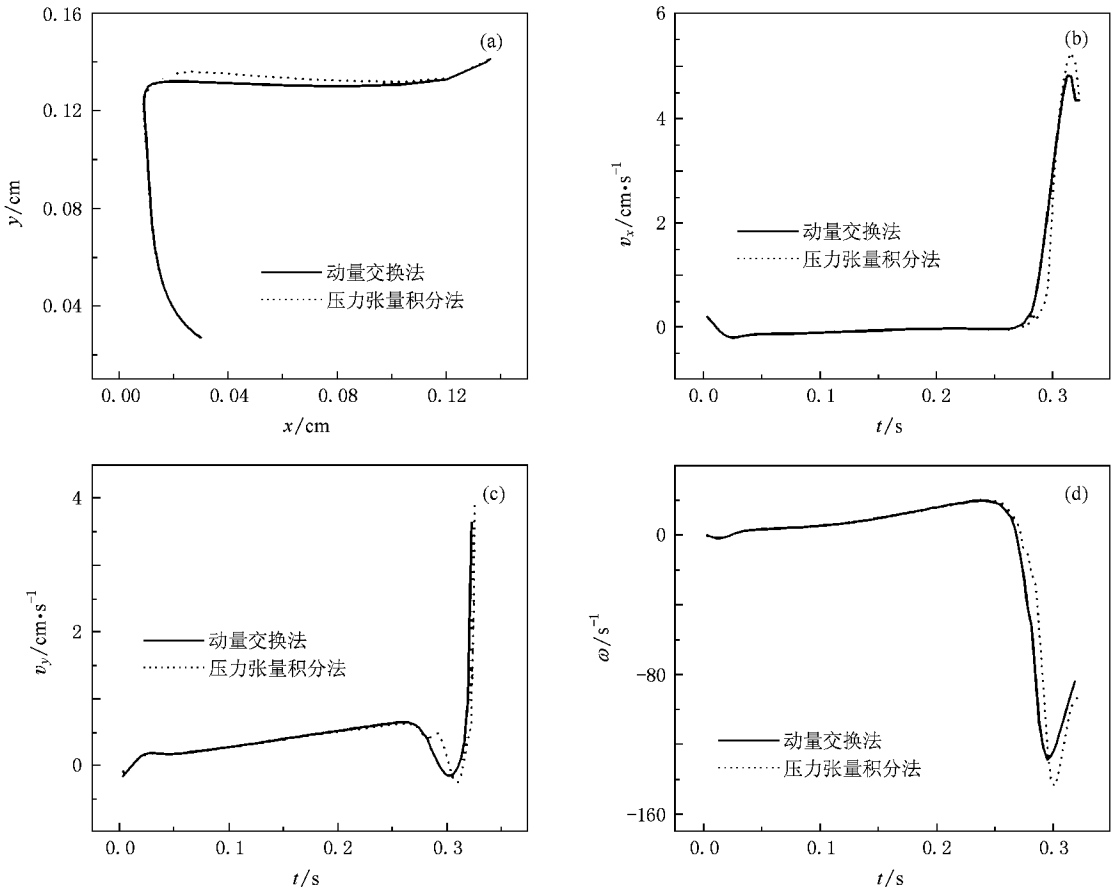


图 4 两种方法计算颗粒运动的对比 (a)颗粒运动轨迹 (b)颗粒运动水平速度 (c)颗粒运动竖直速度 (d)颗粒运动角速度

### 3.3. 用压力张量积分法模拟颗粒在涡流场中的运动

半径为 0.01 cm 的颗粒 A 从 (0.0857 cm, 0.0857 cm) 处开始运动,半径为 0.005 cm 的颗粒 B 从 (0.0857 cm, 0.0571 cm) 处也同时开始运动,图 5 所示为颗粒 A 和颗粒 B 的运动轨迹.结果显示半径较大的颗粒其运动轨迹半径增加较快,而半径较小的颗粒其运动轨迹半径增加较慢.而且由于初始位置不同,受到涡流场的影响也不同,因而运动之后颗粒 B 的运动速度大于颗粒 A 的运动速度.这样,当两运动颗粒的距离很近时颗粒之间的影响使得颗粒 A 改变了运动半径,这将使其在涡流中的运动轨迹半径增大变缓,运动时间增长.

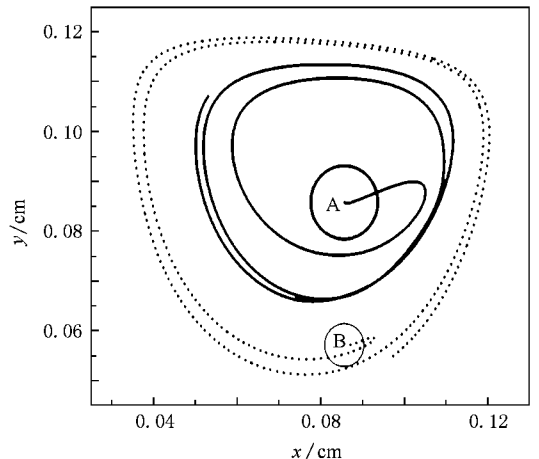


图 5 颗粒 A 和颗粒 B 的运动轨迹

## 4. 结 论

用 LBM 研究了颗粒在涡流中的运动. 研究发现: 半径大的颗粒运动轨迹半径增加更快, 更容易流

出涡流. 多颗粒运动情况下, 靠近涡流中心的颗粒受到外围颗粒的影响, 轨迹半径增速明显变缓. 通过把压力边界改为脉动边界, 该模型可以进一步用于研究颗粒的冲刷问题.

- [ 1 ] Fung Y C 1998 *Biomechanics Circulation* ( New York : Springer-Verlag ) p108
- [ 2 ] Liu Z R , Li X X 1997 *Principles and Methods of Hemodynamics* ( Shanghai : Fudan University Press ) p2 ( in Chinese ) [ 柳兆荣、李惜惜 1997 血液动力学原理和方法( 上海 : 复旦大学出版社 ) 第 2 页 ]
- [ 3 ] Mittal R , Simmons S P , Udaykumar H S 2001 *J. Biomech. Eng.* **123** 325
- [ 4 ] Stround J S , Berger S A , Saloner D 2002 *J. Biomech. Eng.* **124** 9
- [ 5 ] Feng J , Weinbaum S 2000 *J. Fluid. Mech.* **422** 281
- [ 6 ] Qian Y H , d 'Humieres D , Lallemand P 1992 *Europhys. Lett.* **17** 479
- [ 7 ] Chen S Y , Chen H D , Martinez D , Matthaeus W 1991 *Phys. Rev. Lett.* **67** 3776
- [ 8 ] Chen S Y , Doolen G D 1998 *Annu. Rev. Fluid Mech.* **30** 329
- [ 9 ] Zhang C Y , Li H B , Tan H L , Liu M R , Kong L J 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 1982 ( in Chinese ) [ 张超英、李华兵、谭惠丽、刘慕仁、孔令江 2005 物理学报 **54** 1982 ]
- [ 10 ] Liu X Y , Li H B 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 422 ( in Chinese ) [ 吕晓阳、李华兵 2001 物理学报 **50** 422 ]
- [ 11 ] Li H B , Fang H P , Lin Z F , Xu S X , Chen S Y 2004 *Phys. Rev. E* **69** 031919
- [ 12 ] Fang H P , Wang Z W , Lin Z F , Liu M R 2002 *Phys. Rev. E* **65** 051925
- [ 13 ] Aidun C K , Lu Y , Ding E 1998 *J. Fluid Mech.* **373** 287
- [ 14 ] Li H B , Lu X Y , Fang H P , Qian Y H 2004 *Phys. Rev. E* **70** 026701
- [ 15 ] Filippova O , Hanel D 1997 *Comput. Fluids* **26** 697
- [ 16 ] Inamuro T , Maeba K , Ogino F 2000 *Int. J. Multiphase Flow* **26** 1981
- [ 17 ] He X , Doolen G D 1997 *J. Comput. Phys.* **134** 306
- [ 18 ] Li H B , Zhan C Y , Lu X Y , Fang H P 2007 *Chin. Phys. Lett.* **24** 3458
- [ 19 ] Allen M P , Tildesley D J 1987 *Computer Simulation of Liquid* ( Oxford : Clarendon )
- [ 20 ] Zou Q , He X 1997 *Phys. Fluids* **9** 1591

## Lattice Boltzmann simulation of particles moving in a vortex flow<sup>\*</sup>

Shi Juan<sup>1)</sup> Li Jian<sup>2)</sup> Qiu Bing<sup>2)</sup> Li Hua-Bing<sup>2)†</sup>

1) *School of Information and Communication Engineering , Guilin University of Electronic Technology , Guilin 541004 , China*

2) *Department of Information Material Science and Engineering , Guilin University of Electronic Technology , Guilin 541004 , China*

( Received 10 December 2008 ; revised manuscript received 25 December 2008 )

### Abstract

The movement of small particles in a vortex flow is simulated by lattice Boltzmann method. The vortex flow is produced by a flow in a cave , and the trajectory , velocity and angular velocity of the particles are evaluated with the hydrodynamic force calculated by the momentum-exchange and stress-integration , respectively. At last , multiple particles with different radii moving in a vortex flow are also simulated with the hydrodynamic force calculated by stress-integration.

**Keywords :** lattice Boltzmann method , vortex flow , particles

**PACC :** 0520

<sup>\*</sup> Project supported by the National Natural Science Foundation of China ( Grant No. 10747004 ) , the Natural Science Foundation for Young Scholars of Guangxi Zhuang Autonomous , China ( Grant No. 0640064 ) and the Natural Science Foundation of Guangxi Zhuang Autonomous , China ( Grant No. 0542045 ).

<sup>†</sup> Correspondent author. E-mail: hbli@guet.edu.cn