第 58 卷 第 8 期 2009 年 8 月
1000-3290/2009/58(08)/5186-05

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.58,No.8,August,2009

含有广义守恒律的生长方程标度奇异性的直接标度分析*

张丽萍† 温荣吉
(中国矿业大学物理系,徐州 221008)

(2008 年 11 月 28 日收到;2008 年 12 月 26 日收到修改稿)

利用直接标度分析方法研究一个含有广义守恒律生长方程的标度奇异性,得到强弱耦合区域的奇异标度指数.作为其特殊情况,这个方程包含 Kardar-Parisi-Zhang(KPZ)方程、Sun-Guo-Grant(SGG)方程以及分子束外延(MBE)生长方程,并能对其进行统一的研究.研究发现,KPZ 方程和 SGG 方程,无论在弱耦合还是在强耦合区域内都遵从自仿射 Family-Vicsek 正常标度规律;而 MBE 方程在弱耦合区域内服从正常标度,在强耦合区域内能呈现内禀奇异标度行为.这里所得到生长方程的奇异标度性质与利用重正化群理论、数值模拟以及实验相符很好.

关键词:标度奇异性,强耦合,弱耦合
PACC:0540,0250

1.引 言

近年来,表面界面在远离平衡状态下的动力学生长问题受到越来越多的关注,研究其生长机制和规律对于研究许多重要的物理现象有着十分重要的实际意义.生长的表面界面具有非平庸的动力学标度性质,通常呈现标准的自仿射标度行为[1—5].在动力学标度理论中,表面界面的标度行为通常可以用总的表面宽度(有时也称为粗糙度)$W(L,t)$的标度性质来表示.

$$W(L,t)=\frac{1}{\sqrt{L}}\left\langle\sum_x[h(x,t)-\bar{h}_L(t)]^2\right\rangle^{1/2},$$

式中 L 表示生长系统的横向尺度,$h(x,t)$ 为 t 时刻 x 处表面的生长高度,$\bar{h}_L(t)=\frac{1}{\sqrt{L}}\sum_x h(x,t)$ 表示在 t 时刻表面的平均生长高度,$\langle\cdots\rangle$表示对噪声的统计平均.Family-Vicsek[6]提出当生长表面具有标准的自仿射结构时,$W(L,t)$满足动力学标度规律

$$W(L,t)=L^{\alpha}f(t/L^{\alpha/\beta}).$$

这里 α 是粗糙度指数,β 是生长指数,$z=\alpha/\beta$ 是动力学指数.标度函数 $f(u)$具有渐进行为,

$$f(u)\sim\begin{cases}u^{\alpha/z} & (u\to 0),\\ \text{const.} & (u\to\infty).\end{cases}\tag{1}$$

所以系统总的表面宽度 $W(L,t)$具有渐进行为,

$$W(L,t)\sim\begin{cases}t^{\beta} & (t\ll L^z),\\ L^{\alpha} & (t\gg L^z).\end{cases}\tag{2}$$

L^z 称为系统的特征时间.

近来研究发现,非自仿射标度性或奇异标度性也广泛存在于表面界面的粗化生长过程中.这一现象首次在模拟连续和离散理想分子束外延(MBE)生长[7—17]中被发现.后来人们发现奇异标度行为存在于无序生长模型[18,19]、电化学沉积模型[20]、化学气相沉积[21]等,并且人们已经开始通过实验研究表面生长的奇异标度行为,如(MBE)Si/Si(111)[22]、Pt 在玻璃上的溅射沉积生长[23]、Cu 的电化学沉积[24]、Fe-Cr 超晶格生长[25]、裂缝生长[26,27]、流体侵入多孔介质[28]和肿瘤生长[29]等.当表面界面粗化生长不满足 Family-Vicsek 自仿射标度,呈现所谓奇异标度性质,即整个表面的标度性质和局域标度的性质不相同.当出现奇异标度时,局域表面宽度 $w(l,t)$ 要由下列标度关系替代:

$$w(l,t)\sim t^{\beta}f_A(l/t^{1/z}).\tag{3}$$

奇异标度函数

* 国家自然科学基金(批准号:10674177)、教育部留学回国人员科研启动基金(批准号:200318)和中国矿业大学青年科学基金(批准号:2006A043)资助的课题.

† E-mail:zhlip_77@163.com

$$f_A(u) \sim \begin{cases} u^{\alpha_{loc}} & (u \ll 1), \\ \text{const.} & (u \gg 1). \end{cases} \tag{4}$$

由(2)和(3)式得

$$w(l,t) \sim \begin{cases} t^{\beta} & (t \ll l^z), \\ t^{\kappa} l^{\alpha_{loc}} & (t \gg l^z), \end{cases} \tag{5}$$

其中 $\kappa = \beta - \alpha_{loc}/z$,$\alpha_{loc}$ 为局域粗糙度指数.当 $\alpha \neq \alpha_{loc}$ 则出现标度奇异性,而当 $\alpha = \alpha_{loc}$ 时(4)式就恢复到自仿射的 Family-Vicsek 正常标度关系.对于奇异标度行为,$\alpha_{loc} = 1$ 时为超粗化奇异标度行为,$\alpha_{loc} < 1$ 时为内禀奇异标度行为[30,31].

López 等[32] 认为,表面界面的奇异动力学标度行为是由局域倾斜度相对应的生长表面的表面宽度决定.局域倾斜度 $Y = \nabla h$,那么 Y 的整体表面宽度可以记作

$$W_Y(t) \sim \langle \overline{Y^2} \rangle^{1/2}. \tag{6}$$

局域倾斜度生长表面应满足正常标度性质

$$W_Y(l,t) \sim \begin{cases} t^{\kappa} & (t \ll \hat{l}^z), \\ l^{\hat{\alpha}} & (t \ll \hat{l}^z), \end{cases} \tag{7}$$

式中 $\hat{\alpha}$,$\hat{z}$和κ 分别表示相应的奇异粗糙度指数、奇异动力学指数和奇异生长指数.当 $\hat{\alpha} > 0$,$\kappa > 0$ 对应于表面生长的奇异标度行为,而当 $\hat{\alpha} < 0$,$\kappa < 0$ 对应于表面生长的正常标度行为,符合 Family-Vicsek 标度律.

2. Growth-Kernal 方程(GKE)标度奇异性分析

表面界面粗化生长过程可以用相应的 Langevin 类型的连续性动力学方程来描述.为了得到有关守恒律是如何改变非平衡生长的普适类,Lauritsen[33] 给出一个含广义守恒律的非常有价值的生长方程,该方程被称为广义核函数方程(GKE).GKE 包含了生长过程非局域效应的影响并且在特殊情况下可转化为 Kardar-Parisi-Zhang(KPZ)方程[34]、Sun-Guo-Grant(SGG)方程[35] 和分子束处延(MBE)生长方程[36,37].对于生长方程,是符合 Family-Vicsek 标度的正常标度,还是呈现奇异标度行为,是人们所关注的问题.Hentschel 和 Family[38] 提出了一种对 Langevin 类型方程的直接标度分析方法.这种方法的基本物理假设是:任何 Langevin 类型方程当呈现标度行为时,其各项在一定线度上作粗粒化平均后,必须具有相同幅度等级或者可以忽略,只有在这样的条件下,标度行为才能够出现,而相应的标度区域可以通过自洽的方法得到.使用这种方法,可以很方便地求出各个方程在强耦合和弱耦合区域的标度指数值.唐刚等[39—41] 曾将该方法推广应用到几种典型的生长方程的标度讨论中,得到了令人满意的结果.我们也曾利用此方法讨论过 GKE 的正常标度行为[42,43].最近 López[31] 将直接标度方法推广到标度奇异性的分析,在 1+1 维生长方程奇异标度行为结果与数值模拟结果一致,证明该方法用来讨论奇异标度行为是合理的.本文主要利用直接标度分析方法分析 GKE 方程的标度奇异性指数,讨论了标度奇异性条件,然后将结果应用于 KPZ 方程、SGG 方程、MBE 方程,讨论其标度奇异行为.

GKE[33] 可以表示为:

$$\frac{\partial h(\boldsymbol{x},t)}{\partial t} = \int \mathrm{d}^d \boldsymbol{x}' \left[K(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}') \left(\nu \nabla'^2 h + \frac{\lambda}{2} (\nabla' h)^2 \right) \right] + \eta(\boldsymbol{x},t). \tag{8}$$

这里用核函数 $K(r)$ 来描述体系非局域相互作用[15],其标度性质是

$$K(r) \sim \frac{l}{r^{d+\sigma}} \qquad (r \to \infty), \tag{9}$$

引入指数 σ 来描述长程衰减.通过傅里叶变换,$\sigma = 0$ 相应的核函数变为 δ 函数(Dirac 函数),于是就得到通常的 KPZ 方程[34].当 $K(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}') = -\nabla_x^2 \delta^d(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}')$ 得到 SGG[35] 方程和 MBE 方程[36,37],此时对应的 $\sigma = 2$.

为了统一 KPZ 方程、SGG 方程和 MBE 方程,在噪声中引入一个核函数 $N(r)$,

$$< \eta(\boldsymbol{x},t)\eta(\boldsymbol{x}',t') > = 2DN(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}')\delta(t - t'). \tag{10}$$

于是

$$N(r) \sim \frac{l}{r^{d+\tau}} \qquad (r \to \infty). \tag{11}$$

这里 τ 是独立于σ 的指数.$\tau = 0$ 时没有关联噪声(KPZ 和 MBE 方程中)[34,36,37],而 $\tau = 2$ 对应守恒的 Gauss 噪声,如 SGG 方程中的守恒噪声[35].通过动力重正化群分析,Lauritsen[33] 得到 GKE 的标度指数和普适类,同时指出根据 σ 和τ 的不同可以得到不同的普适类.

对方程(8)引入∇ 算符,得到局域微分方程形式

$$\frac{\partial Y}{\partial t} = \nabla \left\{ \int \mathrm{d}^d \boldsymbol{x}' \left[K(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}') \times \left(\nu \nabla'^2 h + \frac{\lambda}{2} (\nabla' h)^2 \right) \right] \right\} + \nabla \eta. \tag{12}$$

依据标度理论的思想,对(12)式中的各项进行粗粒

估计,有

$$\left\langle |\partial Y/\partial t| \right\rangle_l \sim Y_l/t_l,$$

$$\left\langle \left|\nabla\int \mathrm{d}^d\boldsymbol{x}'K(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')\nabla'^2 h\right| \right\rangle_l \sim l^{-(\sigma+2)}Y_l,$$

$$\left\langle \left|\nabla\int \mathrm{d}^d\boldsymbol{x}'K(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')(\nabla' h)^2\right| \right\rangle_l \sim l^{-(\sigma+1)}Y_l^2.$$

在对动力学方程进行奇异标度分析的过程中,对噪声项的粗粒化估计很重要,这里噪声$\nabla\eta$在弱耦合区域内(光滑表面)和强耦合区域内(粗糙表面)的粗粒化估计为$\langle|\nabla\eta|\rangle_{l,\mathrm{wc}}\sim(l^{d+2+\tau}t_l)^{-1/2}$和$\langle|\nabla\eta|\rangle_{l,\mathrm{sc}}\sim(Y_l^d l^{2+\tau}t_l)^{-1/2}$.在足够大的空间标度范围内,方程(12)中的非线性项将在生长过程中完全处于支配地位,而由表面张力所引起的扩散项可以省略.令惯性项和非线性项相等,即$Y_l/t_l\sim l^{-(\sigma+1)}Y_l^2$,于是可以得到典型的涨落标度

$$Y_l\sim l^{(\sigma+1)}/t_l. \tag{13}$$

在弱耦合区域,令惯性项和光滑噪声的粗粒估计相等,则有

$$Y_l/t_l\sim(l^{d+2+\tau}t_l)^{-1/2}. \tag{14}$$

由(13)和(14)式可得

$$Y_l\sim l^{(\sigma-d-\tau-1)/3},\quad Y_l\sim t_l^{(\sigma-d-\tau-1)/(4+2\sigma+d+\tau)}. \tag{15}$$

于是可得表面涨落的奇异粗糙度指数、奇异生长指数分别为

$$\hat{\alpha}=(\sigma-d-\tau-1)/3,\quad \kappa=(\sigma-d-\tau-1)/(4+2\sigma+d+\tau). \tag{16}$$

由此可知,当$d>\sigma-\tau-1$时,标度指数$\hat{\alpha}<0$,$\kappa<0$,说明此时表面高度的涨落遵从自仿射的Family-Vicsek正常标度;而当$d<\sigma-\tau-1$时,$\hat{\alpha}>0$,$\kappa>0$,方程出现了奇异标度性质.可见奇异标度性质与基底维数、方程主导项的阶数、噪声有关.根据$\alpha_{\mathrm{loc}}=\alpha-z\kappa$可以求得局域粗糙度指数$\alpha_{\mathrm{loc}}=1$.因此在弱耦合区域,方程若出现奇异标度行为只可能是超粗糙化的奇异标度行为.

GKE方程得到的标度指数具有普遍的意义,当σ和τ取一些特殊值,就可以得到KPZ方程、SGG方程和MBE方程的标度关系.当$\sigma=\tau=0$时,(16)式为KPZ方程在弱耦合区域的奇异粗糙度指数$\hat{\alpha}$和奇异生长指数κ,可分别表示为

$$\hat{\alpha}=-(d+1)/3,\quad \kappa=-(d+1)/(d+4). \tag{17}$$

当$\sigma=2$,$\tau=0$时,(16)式恢复到MBE方程在弱耦合区域的$\hat{\alpha}$和κ,可分别表示为

$$\hat{\alpha}=(1-d)/3,\quad \kappa=(1-d)/(d+8). \tag{18}$$

当$\sigma=\tau=2$时,(16)式能够恢复到SGG方程在弱耦合区域的$\hat{\alpha}$和κ,可分别表示为

$$\hat{\alpha}=-(d+1)/3,\quad \kappa=-(d+1)/(d+10). \tag{19}$$

显然,无论是KPZ方程、MBE方程还是SGG方程均有$\hat{\alpha}<0$,$\kappa<0$,说明在弱耦合区域里,KPZ方程、SGG方程和MBE方程所展示的是一种正常的Family-Viscek标度行为.所有结果与文献[44]完全一致,表明我们对于GKE方程的处理过程是合理的,也是正确的.

在强耦合区域,令惯性项和粗糙噪声项相等,得

$$Y_l\sim l^{(\sigma-\tau-1)/(3+d)},\quad Y_l\sim t_l^{(\sigma-\tau-1)/[(2+d)(1+\sigma)+\tau+2]}. \tag{20}$$

于是表面涨落的$\hat{\alpha}$和κ为

$$\hat{\alpha}=(\sigma-\tau-1)/(d+3),\quad \kappa=(\sigma-\tau-1)/[(2+d)(1+\sigma)+\tau+2]. \tag{21}$$

当$\sigma-\tau-1<0$时,标度指数$\hat{\alpha}<0$,$\kappa<0$,此时表面高度的涨落遵从自仿射的Family-Vicsek正常标度.而当$\sigma-\tau-1>0$时,$\hat{\alpha}>0$,$\kappa>0$,说明方程出现了奇异标度性质.在强耦合区域奇异标度行为的出现与维数无关而取决于方程阶数与噪声.根据$\alpha_{\mathrm{loc}}=\alpha-z\kappa$得

$$\alpha_{\mathrm{loc}}=(2\sigma+\tau+4)/[(2+d)(1+\sigma)+\tau+2]. \tag{22}$$

显然,$\alpha_{\mathrm{loc}}<1$.因此在强耦合条件下,若出现奇异标度行为,必然是内禀奇异粗粒化行为.

当σ和τ取一些特殊值,就可以得到KPZ方程、SGG方程、MBE方程在强耦合区域的奇异标度关系.当$\sigma=\tau=0$时(21)式就恢复到KPZ方程的$\hat{\alpha}$和κ,分别为

$$\hat{\alpha}=-1/(d+3),\quad \kappa=-1/(d+4). \tag{23}$$

对于KPZ方程,$\hat{\alpha}<0$,$\kappa<0$,说明KPZ方程所描述的表面高度的涨落服从自仿射的Family-Vicsek正常标度.所得κ值与文献[31]结果符合,说明我们在强耦合区域对于噪声的估计是正确的.

当$\sigma=2$,$\tau=0$时恢复到MBE方程的$\hat{\alpha}$和κ,分别为

$$\hat{\alpha}=1/(d+3),\quad \kappa=1/(3d+8). \tag{24}$$

对于 MBE 方程在强耦合区域，$\hat{\alpha} > 0$，$\kappa > 0$ 出现奇异标度行为．$\alpha_{\rm loc} = 8/(8+3d)$，$\alpha_{\rm loc} < 1$ 说明其呈现出内禀奇异标度行为．当 $d = 1$ 时，$\kappa = 1/11$，$\alpha_{\rm loc} = 8/11$，与数值模拟结果 $\alpha_{\rm loc} = 0.73$ 一致[7,17]，也与 López[31] 分析结果一致．当 $d = 2$ 时，$\kappa = 1/14$，$\alpha_{\rm loc} = 8/14$．$\kappa > 0$ 表明 MBE 方程仍会出现奇异标度行为，此结论与数值模拟得到的 $\kappa = 0.06$[45] 以及实验结果 $\kappa = 0.07 \pm 0.03$[46] 接近．

当 $\sigma = \tau = 2$ 则能够恢复到 SGG 方程的 $\hat{\alpha}$ 和 κ，分别为

$$\begin{aligned} \hat{\alpha} &= -1/(3+d), \\ \kappa &= -1/(3d+10). \end{aligned} \tag{25}$$

对于 SGG 方程 $\hat{\alpha} < 0$，$\kappa < 0$，说明 SGG 方程所描述的表面高度的涨落遵从自仿射的 Family-Vicsek 正常标度．

3．结　　论

本文利用 López 提出的直接标度分析方法分析 GKE 生长方程的标度奇异性，得到了各个 GKE 方程在强、弱耦合区域内奇异标度指数的一般表达式．GKE 方程包含 KPZ 方程、SGG 方程和 MBE 生长方程，并能对其进行统一的研究．对 GKE 方程的奇异标度性质分析中我们发现，在弱耦合区域内，方程的奇异标度行为取决于基底维数、最相关项的阶数、噪声；而在强耦合区域内，方程的奇异标度行为却与基底维数无关．在此基础上，我们具体讨论了 KPZ 方程、SGG 方程以及 MBE 生长方程的标度奇异性问题，发现 KPZ 方程和考虑守恒律的 SGG 方程，无论在弱耦合还是在强耦合区域内都遵从自仿射的 Family-Vicsek 正常标度；MBE 方程在弱耦合区域内服从正常标度行为，而在强耦合区域内呈现出奇异标度性质，且为内禀奇异标度行为．这里所得到的标度指数在弱耦合区域与利用重正化群理论[47] 得到的结果符合很好，而在强耦合区域得到的标度行为能够与实验及数值模拟结果一致，说明本文的推广以及对于方程各项的估计是完全正确的．

---

[1] Meakin P 1998 *Fractal, Scaling and Growth far from Equilibrium* (Cambridge: Cambridge University Press)

[2] Barabasi A L, Stanley 1995 *Fractal Concepts in Surface Growth* (Cambridge: Cambridge University Press)

[3] Halpin H T, Zhang Y C 1995 *Phys. Rep.* **254** 215

[4] Krug J 1997 *Adv. Phys.* **46** 139

[5] Family F, Vicsek T 1991 *Dynamics of Fractal Surfaces* (Singapore: World Scientific Press)

[6] Family F, Vicsek T 1985 *J. Phys.* A **18** L75

[7] Krug J 1994 *Phys. Rev. Lett.* **72** 2907

[8] López J M, Rodríguez M A, Cuerno R 1997 *Phys. Rev.* E **56** 3993

[9] López J M, Rodríguez M A, Cuerno R 1997 *Physica* A **246** 329

[10] Amar J G, Lam P M, Family F 1993 *Phys. Rev.* E **47** 3242

[11] Schroeder M, Siegert M, Wolf D E, Shore J D, Plischke M 1993 *Europhys. Lett.* **24** 563

[12] Das Sarma S, Ghaisas S V, Kim J M 1994 *Phys. Rev.* E **49** 122

[13] Das Sarma S, Lanczycki C J, Kotlyar R, Ghaisas S V 1996 *Phys. Rev.* E **53** 359

[14] Smilauer P, Kotrla M 1994 *Phys. Rev.* B **49** R5769

[15] Bhattacharjee J K, Das Sarma S, Kotlyar R 1996 *Phys. Rev.* E **53** R1313

[16] Ryu C S, Heo K P, Kim I 1996 *Phys. Rev.* E **54** 284

[17] Dasgupta C, Das Sarma S, Kim J M 1996 *Phys. Rev.* E **54** R4552

[18] López J M, Rodríguez M A 1996 *Phys. Rev.* E **54** R2189

[19] Asikainen J, Majaniemi S, Dube M, Ala-Nissila T 2002 *Phys. Rev.* E **65** 052104

[20] Castro M, Cuerno R, Sanchez A, Adame F D 1998 *Phys. Rev.* E **57** R2491

[21] Cuerno R, Castro M 2001 *Phys. Rev. Lett.* **87** 236103

[22] Yang H N, Wang G C, Lu T M 1994 *Phys. Rev. Lett.* **73** 2348

[23] Jeffries J H, Zuo J K, Craig M M 1996 *Phys. Rev. Lett.* **76** 4931

[24] Huo S, Schwarzacher W 2001 *Phys. Rev. Lett.* **86** 256

[25] Santamaria J, Gomez M E, Vicent J L, Krishnan K M, Schuller I K 2002 *Phys. Rev. Lett.* **89** 190601

[26] López J M, Schmittbuhl J 1998 *Phys. Rev.* E **57** 6405

[27] Morel S, Schmittbuhl J, López J M, Valentin G 1998 *Phys. Rev.* E **58** 6999

[28] Soriano J, Ramasco J J, Rodríguez M, Machado A H, Ortín J 2002 *Phys. Rev. Lett.* **89** 026102

[29] Brú A, Pastor J M, Fernaud I, Brú I, Melle S, Berenguer C 1998 *Phys. Rev. Lett.* **81** 4008

[30] Ramasco J J, López J M, Rodríguez M A 2000 *Phys. Rev. Lett.* **84** 2199

[31] López J M 1999 *Phys. Rev. Lett.* **83** 4594

[32] López J M, Castro M, Gallego R 2005 *Phys. Rev. Lett.* **94** 166103

[33] Lauritsen K B 1995 *Phys. Rev.* E **52** R1261

[34] Kardar M, Parisi G, Zhang Y C 1986 *Phys. Rev. Lett.* **56** 889

[35] Sun T, Guo H, Grant M 1989 *Phys. Rev.* A **40** 6736

[36] Wolf D E, Villain J 1990 *Europhys. Lett.* **13** 389

[37] Lai Z W, Das Sarma S 1991 *Phys. Rev. Lett.* **66** 2348

[38] Hentschel H G E, Family F 1991 *Phys. Rev. Lett.* **66** 1982

[39] Tang G, Ma B K 2001 *Int. J. Mod. Phys.* B **15** 2275

[40] Tang G, Ma B K 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 851 (in Chinese) [唐刚、马本堃 2001 物理学报 **50** 851]

[41] Tang G, Ma B K 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 994 (in Chinese) [唐刚、马本堃 2002 物理学报 **51** 994]

[42] Tang G, Zhang L P, Wu Y X, Xia H, Hao D P, Chen H 2003 *Chin. Phys. Lett.* **20** 2008

[43] Zhang L P, Tang G, Xia H, Hao D P, Chen H 2004 *Physica* A **388** 431

[44] Xia H, Tang G, Hao D P, Chen H, Liu S J 2006 *J. Beijing Norm. Univ.* (*Nat. Sci.*) **42** 161 (in Chinese) [夏 辉、唐刚、郝大鹏、陈 华、刘绍军 2006 北京师范大学学报(自然科学版) **42** 161]

[45] Das Sarma S, Punyindu P 1997 *Phys. Rev.* E **55** 5361

[46] Lafouresse M C, Heard P J, Schwarzacher W 2007 *Phys. Rev. Lett.* **98** 236101

[47] Zhang L P 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 2902 (in Chinese) [张丽萍 2009 物理学报 **58** 2902]

Scaling approach to the conservation-law growth equations in anomalous surface roughening*

Zhang Li-Ping† Wen Rong-Ji

(*Department of Physics*, *China University of Mining and Technology*, *Xuzhou* 221008, *China*)

(Received 28 November 2008; revised manuscript received 26 December 2008)

Abstract

We employ an analytical approach introduced by López to determine the anomalous scaling exponent of the growth equation with a generalized conservation law in both the weak-and strong-coupling regimes, which included the Kardar-Parisi-Zhang (KPZ), Sun-Guo-Grant(SGG), and molecular beam epitaxy (MBE) equations as special cases and allows for a unified treatment of growth equations. Analysis shows that KPZ equation and SGG equation exhibit normal Family-Vicsek scaling behavior, whether in the weak-coupling or strong-coupling regime. Differently, MBE equation exists intrinsic anomalous scaling in the strong-coupling regime and normal Family-Vicsek scaling behavior in weak coupling regime. All the conclusions obtain here are well consistent with the corresponding results derived by the dynamic renormalization group theory, numerical simulation and experiment.

Keywords: anomalous scaling, strong-coupling, weak-coupling

PACC: 0540, 0250

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 10674177), the Scientific Research Foundation for the Returned Overseas Chinese Scholars from Ministry of Education, China (Grant No. 200318) and the Science Foundation for Young Scholars of China University of Mining and Technology (Grant No. 2006A043).

† E-mail: zhlip_77@163.com