

交叉关联噪声对光学双稳系统平均首通时间的影响*

王 兵[†] 严少平 吴秀清

(安徽理工大学理学院, 淮南 232001)

(2009 年 4 月 1 日收到, 2009 年 5 月 13 日收到修改稿)

研究了乘性色噪声和加性白噪声驱动的光学双稳系统中噪声对系统两个方向平均首通时间 $T_+(x_{s1} \rightarrow x_{s2})$ 和 $T_-(x_{s2} \rightarrow x_{s1})$ 的影响(平均首通时间是指从一稳态出发越过势垒到另一稳态所用时间的平均值). 通过 Novikov 定理和 Fox 近似方法得到相应的 Fokker-Planck 方程, 利用最速下降法得到 $T_+(x_{s1} \rightarrow x_{s2})$ 和 $T_-(x_{s2} \rightarrow x_{s1})$ 的表达式. 研究发现, 乘性噪声强度 Q 和加性噪声强度 D 对 $T_+(x_{s1} \rightarrow x_{s2})$ 的影响相同, 对 $T_-(x_{s2} \rightarrow x_{s1})$ 的影响不同; $T_+(x_{s1} \rightarrow x_{s2})$ 随乘性色噪声自关联时间 τ 的增大而增大, 但随噪声间的交叉关联强度 λ 的增大而减小; $T_-(x_{s2} \rightarrow x_{s1})$ 随 τ 的增大而减小, 随 λ 的增大而增大.

关键词: 平均首通时间, 光学双稳系统, 乘性色噪声, 加性白噪声

PACC: 0540, 0250

1. 引 言

噪声对非线性系统的影响近年来一直受到大家的广泛关注. 在对噪声的处理上, 为了简化计算, 常把记忆时间或者带宽很窄的激励视为白噪声. 由于需要无穷大的功率才能产生出来, 所以真正的白噪声并不存在. 对白噪声驱动的非线性系统性质的研究已经很深入^[1-16]. 1987 年 Jung 等^[3]提出统一色噪声近似理论, 并对乘性色噪声驱动的染料激光模型进行了研究. Wei 等^[5]在 1995 年给出了关联色噪声驱动的双稳系统的稳态概率密度表达式. 1996 年 Jia 等^[6]利用 Novikov 定理和 Fox 近似方法研究了色关联噪声驱动的双稳系统的稳态概率密度表达式. Luo 和 Zhu^[10]研究了色关联噪声驱动的双稳系统中随机共振现象. Mei 等^[13]利用投影算子方法研究了色关联噪声对双稳系统关联函数的影响. 2006 年 Li 等^[9]研究了乘性非对称分叉噪声影响下的随机共振问题.

平均首通时间(MFPT)是随机动力学理论研究中的一个重要问题, 用来描述非线性系统的瞬态性. MFPT 的计算与诸如噪声诱导翻越势垒的逃逸、亚稳态的平均寿命等相关联^[7, 16, 17]. 1999 年 Mei 等^[7]研

究了色关联噪声驱动双稳系统中关联时间和关联强度对 MFPT 的影响. Wang 等^[16]研究了肿瘤细胞生长模型中, 色噪声对 MFPT 的影响问题. 1969 年 Szoke 等^[18]首次提出光学双稳现象之后, 光学双稳系统的研究一直是一个非常活跃的领域^[19-21]. 光学双稳器件可以应用在高速光通信、光学图像处理、光存储、光学限幅器以及光学逻辑元件等方面. 特别是用半导体材料制成的光学双稳器件尺寸小、功率低、开关时间短, 有可能发展成为未来光计算机的逻辑元件. 所以对光学双稳系统的研究就显得非常重要. 本文研究交叉关联的加性白噪声与乘性色噪声对光学双稳系统的 MFPT 的影响问题.

2. 噪声驱动光学双稳系统的定态分布

包含介质的光学腔被激光注入后, 当激光与光学腔及介质的原子实现共振时, 可以得到如下的近似方程^[21]:

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{dV(x)}{dx} = y - x - \frac{2cx}{1+x^2}, \quad (1)$$

$$V(x) = -\int \left(y - x - \frac{2cx}{1+x^2} \right) dx, \quad (2)$$

方程中的 y 为注入激光的模, x 为输出激光的模, c 是控制参数(y, x, c 都已标度为无量纲量). 当参数

* 安徽省高等学校自然科学研究计划(批准号: KJ2009B119Z)资助的课题.

[†] E-mail: hnitwb@163.com

c 取值较大且 y 在一定范围内取值时, 确定性势函数 $V(x)$ 有两个稳定点和一个不稳定点, 也就是系统出现双稳现象^[22]. 在系统的双稳态附近选择 $y = y_0$ 并把原子瞬时释放和碰撞引起注入激光模和控制参数的微小涨落用高斯噪声模拟, 方程(1)中的 y 和 c 可以分别做以下代换:

$$\begin{aligned} y &\rightarrow y_0 + \eta(t), \\ c &\rightarrow c + \xi(t), \end{aligned}$$

可以得到 Langevin 方程

$$\frac{dx}{dt} = y_0 - x - \frac{2cx}{1+x^2} + \frac{2x}{1+x^2} \xi(t) + \eta(t). \quad (3)$$

高斯噪声 $\eta(t)$ 和 $\xi(t)$ 具有如下性质:

$$\eta(t) = \xi(t) = 0, \quad (4)$$

$$\xi(t)\xi(t') = \frac{Q}{2\tau} \exp\left(-\frac{|t-t'|}{\tau}\right), \quad (5)$$

$$\eta(t)\eta(t') = D\delta(t-t'), \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \eta(t')\xi(t) &= \xi(t')\eta(t) \\ &= \lambda\sqrt{QD}\delta(t-t'), \end{aligned} \quad (7)$$

式中 Q 和 D 分别是乘性噪声和加性噪声的强度, λ 为噪声间的关联强度, τ 为乘性噪声的自关联时间. 利用 Novikov 定理和 Fox 方法^[10,13], 可以得到方程(3)所对应的 Fokker-Planck 方程

$$\frac{\partial P(x, t)}{\partial t} = L_{\text{FP}} P(x, t), \quad (8)$$

$$L_{\text{FP}} = -\frac{\partial}{\partial x} f(x, \tau) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \alpha(x, \tau). \quad (9)$$

扩散系数为

$$\begin{aligned} F(x, \tau) &= f(x) + \left(\lambda\sqrt{QD} + \frac{Q}{\alpha(\tau)}\right) \\ &\times \left(\frac{2}{1+x^2} - \frac{4x^2}{(1+x^2)^2}\right), \end{aligned} \quad (10)$$

漂移系数为

$$\alpha(x, \tau) = \left(4\lambda\sqrt{QD} + \frac{Q}{\alpha(\tau)}\right) \frac{x}{1+x^2} + D. \quad (11)$$

(10) 式中

$$f(x) = y_0 - x - \frac{2cx}{1+x^2}, \quad (12)$$

(11) 式中 $\alpha(\tau)$ 满足当 $x \leq x_u$ 时取 $C_1(\tau) = 1 - \tau\left(f'(x_{s1}) - \frac{1-x_{s1}^2}{(1+x_{s1}^2)x_{s1}} f(x_{s1})\right)$, 当 $x \geq x_u$ 时 $C_2(\tau) = 1 - \tau\left(f'(x_{s2}) - \frac{1-x_{s2}^2}{(1+x_{s2}^2)x_{s2}} f(x_{s2})\right)$. x_{s1} 和 x_{s2} 为系统确定性势函数 $V(x)$ 的两个稳定点, x_u 为

不稳定点 ($x_{s1} < x_u < x_{s2}$).

利用 $x \leq x_u$ 和 $x > x_u$ 时 $\alpha(\tau)$ 的两个表达式 $C_1(\tau)$ 和 $C_2(\tau)$ 以及方程(8), 可以得到光学双稳系统定态概率分布的分段函数

$$P(x) = \begin{cases} P_1(x) & (x \leq x_u), \\ P_2(x) & (x > x_u). \end{cases} \quad (13)$$

这里

$$\begin{aligned} P_1(x) &= \frac{N_1}{G_1(x)} \exp\left(\int \frac{F_1(x)}{G_1(x)} dx\right) \\ &= \frac{N_1}{\sqrt{G_1(x)}} \exp\left(-\frac{U_1(x)}{D}\right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_2(x) &= \frac{N_2}{G_2(x)} \exp\left(\int \frac{F_2(x)}{G_2(x)} dx\right) \\ &= \frac{N_2}{\sqrt{G_2(x)}} \exp\left(-\frac{U_2(x)}{D}\right), \end{aligned}$$

其中

$$G_1(x) = \left(4\lambda\sqrt{QD} + \frac{Q}{C_1(\tau)}\right) \frac{x}{1+x^2} + D, \quad (14)$$

$$G_2(x) = \left(4\lambda\sqrt{QD} + \frac{Q}{C_2(\tau)}\right) \frac{x}{1+x^2} + D,$$

$$\begin{aligned} F_1(x) &= f(x) + \left(\lambda\sqrt{QD} + \frac{Q}{C_1(\tau)}\right) \\ &\times \left(\frac{2}{1+x^2} - \frac{4x^2}{(1+x^2)^2}\right) \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} F_2(x) &= f(x) + \left(\lambda\sqrt{QD} + \frac{Q}{C_2(\tau)}\right) \\ &\times \left(\frac{2}{1+x^2} - \frac{4x^2}{(1+x^2)^2}\right). \end{aligned}$$

这里 N_i 是归一化常数 ($i=1, 2$) 并满足分段函数 $P(x)$ 在 $x = x_u$ 的连续性. $U_1(x)$ 和 $U_2(x)$ 是系统的修正势, 分别为

$$\begin{aligned} U_1(x) &= \frac{1}{2D} x^2 - \frac{(y_0 D + \alpha_1(\tau))}{D^2} x \\ &+ \left(\frac{2\alpha_1(\tau)}{\beta_1(\tau)} - \frac{1}{2}\right) \ln|1+x^2| \\ &- \left(\frac{2\beta_1(\tau)}{\alpha_1(\tau)} - \frac{\alpha_1(\tau)^2}{2D^3} - \frac{c}{D} - \frac{\alpha_1(\tau)y_0}{2D^2} - \frac{1}{2}\right) \\ &\times \ln|Dx^2 + \alpha_1(\tau)x + D| \\ &- \frac{\alpha_1(\tau)}{D\sqrt{|4D^2 - \alpha_1(\tau)^2|}} \\ &\times \left(2c + \frac{\alpha_1(\tau)y_0}{D} + \frac{\alpha_1(\tau)^2}{D^2} - 2\right) \\ &\times \arctg\left(\frac{2xD + \alpha_1(\tau)}{\sqrt{|4D^2 - \alpha_1(\tau)^2|}}\right), \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned}
 U_2(x) = & \frac{1}{2D}x^2 - \frac{(\gamma_0 D + \alpha_2(\tau))}{D^2}x \\
 & + \left(\frac{2\alpha_2(\tau)}{\beta_2(\tau)} - \frac{1}{2} \right) \ln |1 + x^2| \\
 & - \left(\frac{2\beta_2(\tau)}{\alpha_2(\tau)} - \frac{\alpha_2(\tau)^2}{2D^3} - \frac{c}{D} \right. \\
 & \left. - \frac{\alpha_2(\tau)y_0}{2D^2} - \frac{1}{2} \right) \ln |Dx^2 + \alpha_2(\tau)x + D| \\
 & - \frac{\alpha_2(\tau)}{D\sqrt{|4D^2 - \alpha_2(\tau)^2|}} \\
 & \times \left(2c + \frac{\alpha_2(\tau)y_0}{D} + \frac{\alpha_2(\tau)^2}{D^2} - 2 \right) \\
 & \times \arctg \left(\frac{2xD + \alpha_2(\tau)}{\sqrt{|4D^2 - \alpha_2(\tau)^2|}} \right), \quad (17)
 \end{aligned}$$

式中

$$\alpha_1(\tau) = 4\lambda\sqrt{QD} + \frac{Q}{C_1(\tau)},$$

$$\alpha_2(\tau) = 4\lambda\sqrt{QD} + \frac{Q}{C_2(\tau)},$$

$$\beta_1(\tau) = \lambda\sqrt{QD} + \frac{Q}{C_1(\tau)},$$

$$\beta_2(\tau) = \lambda\sqrt{QD} + \frac{Q}{C_2(\tau)}.$$

当加性噪声强度 D 和乘性噪声强度 Q 远小于势垒 $\Delta U(x)$ 时,利用 MFPT 的定义和最速下降法^[23]可以得到两个不同方向的 MFPT 的表达式为

$$\begin{aligned}
 T_+(x_{s1} \rightarrow x_{s2}) &= \int_{x_{s1}}^{x_{s2}} \frac{dx}{\bar{Q}(x)P_{s1}(x)} \int_0^x P(y) dy \\
 &= \frac{2\pi}{\sqrt{|V''(x_u)V''(x_{s1})|}} \\
 &\quad \times \exp\left(\frac{U(x_u) - U(x_{s1})}{D}\right) \quad (18)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 T_-(x_{s2} \rightarrow x_{s1}) &= \int_{x_{s1}}^{x_{s2}} \frac{dx}{\bar{Q}(x)P_{s1}(x)} \int_x^{+\infty} P(y) dy \\
 &= \frac{2\pi}{\sqrt{|V''(x_u)V''(x_{s2})|}} \\
 &\quad \times \exp\left(\frac{U(x_u) - U(x_{s2})}{D}\right) \quad (19)
 \end{aligned}$$

3. 噪声对 MFPT 的影响

利用 MFPT 的表达式(18)和(19),我们做出了不同噪声参数情况下的图形,讨论其对 MFPT 的影响.

图 1 给出了乘性噪声强度 Q 取不同值时, MFPT

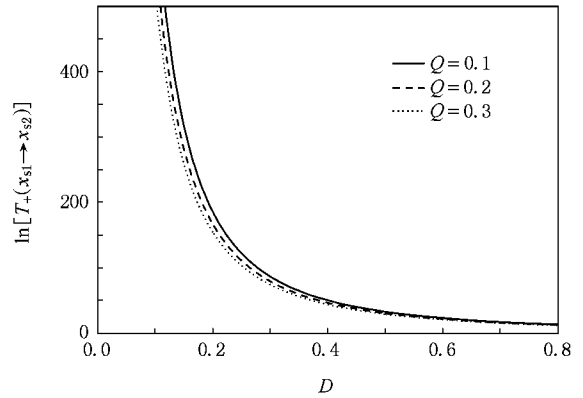


图 1 MFPT $T_+(x_{s1} \rightarrow x_{s2})$ 随加性噪声强度 D 的变化 $Q = 0.2, \lambda = 0.25, \tau = 0.4, y_0 = 14.5, c = 20.02$

$T_+(x_{s1} \rightarrow x_{s2})$ 随加性噪声强度 D 变化的曲线.由图 1 可以看出, $T_+(x_{s1} \rightarrow x_{s2})$ 随 D 的增大而减小; D 取值较小时, $T_+(x_{s1} \rightarrow x_{s2})$ 下降的速率比较大; 当 D 取值逐渐增大时, 曲线变得逐渐平缓. 由图 1 还可看出, 与 D 对 $T_+(x_{s1} \rightarrow x_{s2})$ 的影响相似, $T_+(x_{s1} \rightarrow x_{s2})$ 随乘性噪声强度 Q 的增大而减小. 这表明 D 和 Q 均具有加速从 x_{s1} 到 x_{s2} 的相变的作用.

图 2 给出了乘性噪声强度 Q 取不同值时, MFPT $T_-(x_{s2} \rightarrow x_{s1})$ 随加性噪声强度 D 变化的曲线. 由图 2 可见, $T_-(x_{s2} \rightarrow x_{s1})$ 随加性噪声强度 D 的增大而减小, 且当 D 的取值较大时, 曲线下落趋势逐渐变平缓; 由图 2 还可以发现, $T_-(x_{s2} \rightarrow x_{s1})$ 随乘性噪声强度 Q 的增大而增大. 可见 D 和 Q 对 $T_-(x_{s2} \rightarrow x_{s1})$ 的影响相反, D 加速 x_{s2} 到 x_{s1} 的相变, 但 Q 对 x_{s2} 到 x_{s1} 的相变产生抑制.

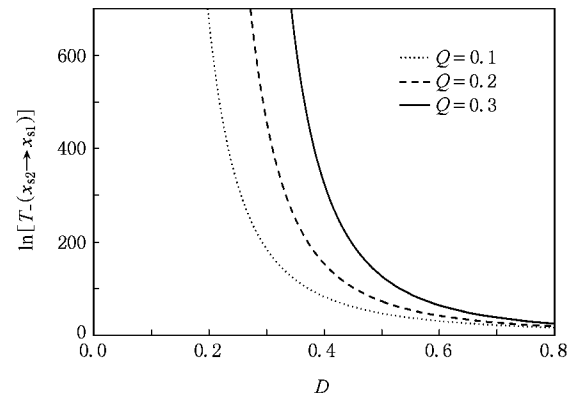
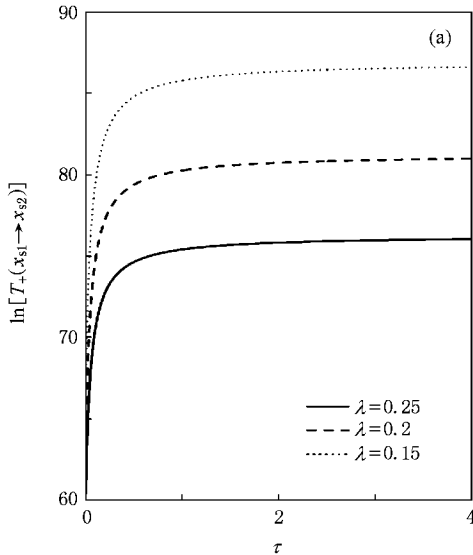


图 2 MFPT $T_-(x_{s2} \rightarrow x_{s1})$ 随加性噪声强度 D 的变化 $Q = 0.2, \lambda = 0.25, \tau = 0.4, y_0 = 14.5, c = 20.02$

比较图 1 和图 2 可以发现,加性噪声强度对两个方向的相变均产生抑制作用.乘性噪声强度加速 x_{s1} 到 x_{s2} 的相变,但抑制 x_{s2} 到 x_{s1} 的相变.

图 3 给出了在交叉关联强度 λ 取不同值时, MFPT 随乘性噪声的自关联时间 τ 变化的曲线.由图 3(a)可以看出, $T_+(x_{s1} \rightarrow x_{s2})$ 随 τ 的增大而增大,



且随着 τ 的增大,曲线变得越来越平缓; $T_+(x_{s1} \rightarrow x_{s2})$ 随交叉关联强度 λ 的增大而减小.由图 3(b) 可以看到, $T_-(x_{s2} \rightarrow x_{s1})$ 随乘性噪声自关联时间 τ 的增大而减小,随 λ 的增大而增大.这说明 τ 抑制 x_{s1} 到 x_{s2} 的相变,但加速 x_{s2} 到 x_{s1} 的相变; λ 加速 x_{s1} 到 x_{s2} 的相变,却抑制 x_{s2} 到 x_{s1} 的相变.

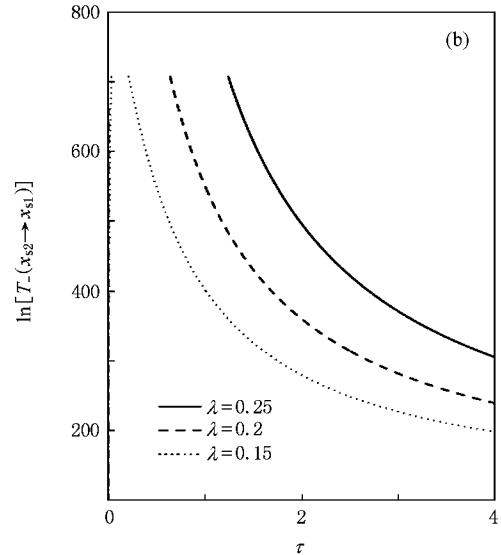


图 3 MFPT 随乘性噪声自关联时间 τ 的变化 $Q = 0.3, D = 0.3, \lambda = 0.15, y_0 = 14.5, c = 20.02$. (a) $T_+(x_{s1} \rightarrow x_{s2})$ (b) $T_-(x_{s2} \rightarrow x_{s1})$

4. 结 论

研究了乘性色噪声和加性白噪声对光学双稳系统的 MFPT 的影响.首先利用统一色噪声近似理论得到了光学双稳系统的定态概率密度函数,然后通过最速下降法得到了两个方向的 MFPT,最后分析了

噪声对 MFPT 的影响.研究发现, MFPT $T_+(x_{s1} \rightarrow x_{s2})$ 随加性噪声强度 D 以及乘性噪声强度 Q 的增大而减小; $T_-(x_{s2} \rightarrow x_{s1})$ 随 D 的增大而减小,但随 Q 的增大而增大. $T_+(x_{s1} \rightarrow x_{s2})$ 随乘性噪声自关联时间 τ 的增大而增大,但随关联强度 λ 的增大而减小; $T_-(x_{s2} \rightarrow x_{s1})$ 随 τ 的增大而减小,却随 λ 的增大而增大.

[1] Masoliver J, West B J, Lindenberg K 1987 *Phys. Rev. A* **35** 3086
 [2] Leibler T, Marchesoni F, Risken H 1988 *Phys. Rev. A* **38** 983
 [3] Jung P, Hanggi P 1987 *Phys. Rev. A* **35** 4464
 [4] Cao L, Wu D J, Ke S Z 1995 *Phys. Rev. E* **52** 3228
 [5] Wei X Q, Cao L, Wu D J 1995 *Phys. Lett. A* **207** 338
 [6] Jia Y, Li J R 1996 *Phys. Rev. E* **53** 5786
 [7] Mei D C, Xie G Z, Cao L, Wu D J 1999 *Phys. Rev. E* **59** 23
 [8] Mei D C, Xie G Z, Cao L, Wu D J 1999 *Chin. Phys. Lett.* **16** 327
 [9] Li J H, Han Y X 2006 *Phys. Rev. E* **74** 051115
 [10] Luo X Q, Zhu S Q 2003 *Phys. Rev. E* **67** 021104
 [11] Xie C W, Mei D C 2003 *Chin. Phys. Lett.* **12** 1208

[12] Xie C W, Mei D C 2003 *Chin. Phys. Lett.* **20** 813
 [13] Mei D C, Xie C W, Xiang Y L 2004 *Physica A* **343** 167
 [14] Han L B, Cao L, Wu D J, Wang J 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 2127 (in Chinese)[韩立波、曹力、吴大进、王俊 2004 物理学报 **53** 2127]
 [15] Xu D S, Cao L, Wu D J 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 692 (in Chinese)[许德胜、曹力、吴大进 2006 物理学报 **55** 692]
 [16] Wang C J, Wei Q, Zheng B B, Mei D C 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 1375 (in Chinese)[王参军、魏群、郑宝兵、梅冬成 2008 物理学报 **57** 1375]
 [17] Wang B, Wu X Q, Shao J H 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 1391 (in Chinese)[王兵、吴秀清、邵继红 物理学报 **58** 1391]

- [18] Szoke A , Daneu V , Goldhar J , Kumit N A 1969 *Appl. Phys. Lett.* **15** 376
- [19] Gibbs M , McCall S L , Venkatesan T N C 1976 *Phys. Rev. Lett.* **36** 1135
- [20] Bartussek R , Hanggi P , Jung P 1994 *Phys. Rev. E* **49** 3930
- [21] Ning L J , Xu W 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 1944 (in Chinese) [宁丽娟 徐 伟 2007 物理学报 **56** 1944]
- [22] Hu G 1994 *Stochastic Force and Nonlinear Systems* (Shanghai : Shanghai Scientific and Technological Education Publishing House) (in Chinese) [胡 岗 1994 随机力与非线性系统 (上海 : 上海科技教育出版社)]
- [23] Gardiner C W 1983 *Handbook of Stochastic Methods* (Berlin : Springer-Verlag)

Effects of cross correlated noises on the mean first-passage time of optical bistable system *

Wang Bing[†] Yan Shao-Ping Wu Xiu-Qing

(College of Science , Anhui University of Science and Technology , Huainan 232001 , China)

(Received 1 April 2009 ; revised manuscript received 13 May 2009)

Abstract

The effects of multiplicative colored noise and additive white noise on the mean first-passage time (MFPT) $T_+(x_{s1} \rightarrow x_{s2})$ and $T_-(x_{s2} \rightarrow x_{s1})$ of an optical bistable system are investigated. The approximate Fokker-Planck equation is obtained based on the Novikov theorem and the Fox approach. The expression of MFPT is obtained in the steepest-descent approximation. Numerical results show that (1) the multiplicative noise intensity Q and additive noise intensity D play the same roles in $T_+(x_{s1} \rightarrow x_{s2})$ but different roles in $T_-(x_{s1} \rightarrow x_{s2})$; (2) $T_+(x_{s1} \rightarrow x_{s2})$ increases with the increase of the self-correlation time τ but decreases with the increase of the correlation intensity λ ; (3) $T_-(x_{s2} \rightarrow x_{s1})$ decreases with τ increasing , but increases with λ increasing.

Keywords : mean first-passage time , optical bistable system , multiplicative colored noise , additive white noise

PACC : 0540 , 0250

* Project supported by the Natural Scientific Research Program of Institution of Higher Education of Anhui Province , China (Grant No. KJ2009B119Z).

[†] E-mail : hnitwb@163.com