

基于 Kramers 逃逸速率的调参随机共振机理*

冷永刚†

(天津大学机械工程学院, 天津 300072)

(2008 年 11 月 3 日收到, 2009 年 3 月 3 日收到修改稿)

根据 Kramers 逃逸速率的特性, 阐明了随机共振信号的频率被限制在 Kramers 逃逸速率极限值一半的范围内, 这种限制是制约大频率信号产生随机共振的原因. 在进一步揭示二次采样随机共振频率尺度变换机理的基础上, 证明了二次采样频率尺度可以把任意信号频率映射变换到随机共振频率尺度上的结论. 相对于二次采样变换方法, 由于双稳系统参数的调节很难使 Kramers 逃逸速率的一半达到实际信号的大频率, 因此系统参数只能在随机共振的小参数频率范围内调节来实现随机共振.

关键词: 双稳随机共振, 二次采样频率变换, 系统参数调节, Kramers 逃逸速率

PACC: 0540, 0650

1. 引 言

随机共振概念是 Benzi 等^[1,2]在 20 世纪 80 年代初研究古气象冰川问题时提出的, 随机共振现象在诸如生物^[3]、电子^[4]、超导^[5]等很多领域受到了广泛的关注. 随机共振是指某些非线性动力系统在添加最优噪声强度时对弱周期输入信号的响应会被放大, 或者是指系统输出信噪比在一定的噪声水平范围内可取得最优值.

对于某个非线性动力系统(如双稳系统), 当输入信号和噪声一定时, 可通过调谐非线性系统参数^[6-9]或改变频率尺度^[10-12]来达到产生随机共振的目的, 从而识别出共振状态中的有效特征信息. 这种通过调整或控制随机共振参数的检测方法很适合于实际信号处理, 它不需要知道信号的先验信息, 也不存在测不准原理的限制, 是一种非相关的有效检测方法. 因此, 基于调整随机共振参数的信息提取方法在信号处理领域有着独特的优势^[6-13].

在利用非线性双稳系统进行随机共振信息检测方面, 文献^[12]就双稳系统参数和二次采样频率参数的过共振、欠共振和随机共振三者之间的相互转换关联性进行了分析. 文献^[12]指出, 改变双稳系统参数和改变二次采样频率参数都可以使过共振或欠

共振转化为随机共振状态, 其原因是这些控制参数的改变都将引起势垒、势阱间距和跃迁速率的改变, 使得相对过大或过小的噪声强度在合适的双稳势函数条件下重新分配达到最优值进而产生随机共振. 这一结论对于小频率(或缓变长周期)参数信号的分析是可行的, 但是对于大频率信号的处理分析, 如果只改变双稳系统参数, 那么无论怎样调节也很难达到信号的随机共振状态, 而只能进行频率的二次采样压缩调节来实现随机共振. 这一点表明, 对于不同频率尺度的信号, 调整双稳系统参数或二次采样频率参数产生随机共振是有条件的, 参数调节存在一定的控制范围.

本文将根据 Kramers 逃逸速率来进一步阐述双稳系统参数和二次采样频率参数之间的调谐关系, 并给出二者的参数调节范围. 此外, 本文还将从理论上对二次采样随机共振的原理进一步加以解释.

2. 双稳随机共振的一般模型

双稳系统模型通常可用下列势函数表示:

$$U(x) = -1/2ax^2 + 1/4bx^4, \quad (1)$$

式中 a 和 b 为系统参数. 在驱动力为单频正弦信号 $s(t) = A \sin(2\pi f_0 t)$ 和噪声强度为 D 的白噪声 $n(t)$ 共同作用下, 双稳系统的动力方程可表示为下列朗

* 国家高技术研究发展计划(批准号:2007AA04Z414)、国家自然科学基金(批准号:50675153)和天津市自然科学基金(批准号:07JCYBJC04600)资助的课题.

† E-mail: leng_yg@tju.edu.cn

之万方程：

$$\frac{dx}{dt} = ax - bx^3 + s(t) + n(t). \quad (2)$$

在噪声强度 D 较小和调制幅度 A 较小的条件下,方程 (2) 的统计响应解^[14]可表示为

$$x(t) = \bar{x} \sin(2\pi f_0 t - \bar{\varphi}), \quad (3)$$

式中响应幅度 \bar{x} 和相位 $\bar{\varphi}$ 分别为

$$\bar{x} = \frac{A x^2_0}{D} \frac{r_K}{\sqrt{r_K^2 + \pi^2 f_0^2}}, \quad (4a)$$

$$\bar{\varphi} = \arctan\left(\frac{\pi f_0}{r_K}\right). \quad (4b)$$

这里, x^2_0 是静态系统 ($A = 0$) 依赖于噪声强度 D 的方差,在两态情况下有近似关系 $x^2_0 = a/b$. r_K 是 Kramers 逃逸速率,表示为

$$r_K = \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\Delta U}{D}\right). \quad (4c)$$

$\Delta U = a^2/(4b)$ 是双稳系统的势垒高度,将此势垒高度代入 (4c) 式得到

$$r_K = \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{a^2}{4bD}\right). \quad (5)$$

将 (5) 式和 $x^2_0 = a/b$ 代入 (4a) 式得到响应幅度 \bar{x} 为

$$\bar{x} = \frac{A}{D} \frac{a}{b} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{2\pi^4 f_0^2}{a^2} \exp\left(\frac{a^2}{2bD}\right)}}. \quad (6)$$

(6) 式即为可产生随机共振的响应式,系统响应幅度 \bar{x} 会随着噪声强度的变化而产生类似力学共振曲线的随机共振效应,如图 1 所示.对某一输入信号,存在一个最优噪声强度使系统响应达到最大值.

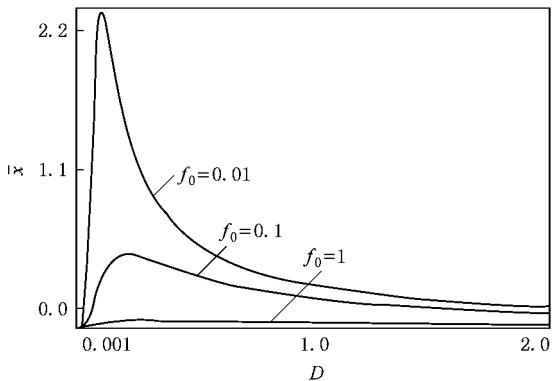


图 1 信号频率 f_0 取不同值时,双稳系统中的随机共振现象
 $a = b = 1, A = 0.3$

由 (6) 式可知,除了噪声强度 D ,可对响应幅度 \bar{x} 产生影响的物理量还有 A, f_0, a 和 b . 已知参量

A, f_0 和 D 控制着双稳系统的输入,而参量 a 和 b 决定了双稳系统的本身特性.显然,由参量 A, f_0 和 D 组合而成的不同输入强度和不同的系统特征参数均会产生不同的系统响应.换言之,要使系统响应达到某一种状态(如过共振、欠共振和随机共振等状态),可以通过控制调节所有这些参量来实现.本文讨论的重点是在输入信号和噪声一定时,即 A, f_0 和 D 三个参量保持不变情况下,研究双稳系统参数 a 和 b 以及二次采样的频率尺度 R 与 Kramers 逃逸速率 r_K 之间的关系,并探讨方程参数将在什么样的条件下才产生随机共振.

3. Kramers 逃逸速率的制约

对于朗之万方程 (2),当双稳系统特性不变(即参数 a 和 b 固定)且信号幅度 A 也保持常量时,当噪声强度 D 在一定的范围内,不同信号频率 f_0 所产生的随机共振效果如图 1 所示.从图 1 可以看出,随机共振现象随着 f_0 的增大逐渐弱化消失.这表明随机共振现象在小频率或慢变长周期信号驱动下才

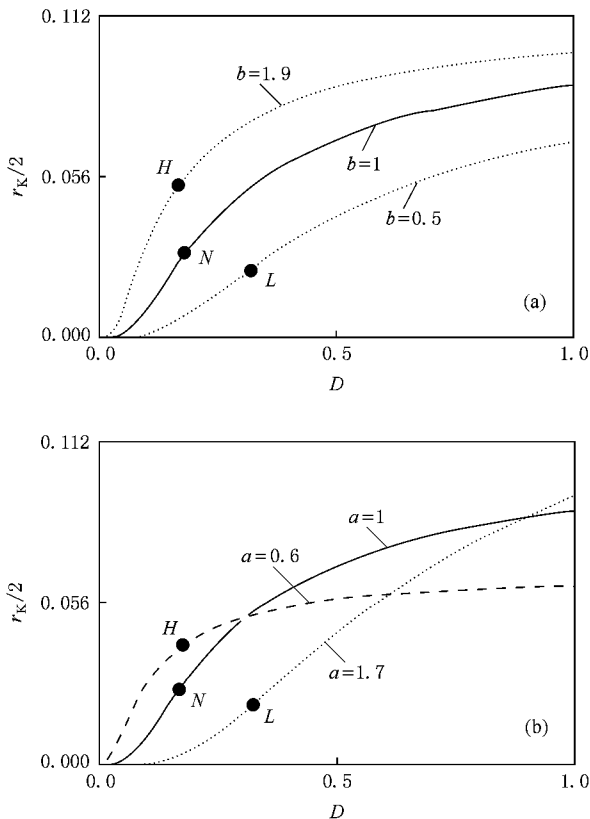


图 2 Kramers 逃逸速率 r_K 随噪声强度 D 的变化 (a) $a = 1, b$ 取不同的参数 (b) $b = 1, a$ 取不同的参数

能产生,意味着随机共振频率存在一个极限值.这个极限频率可以根据 Kramers 逃逸速率来解释.

根据(5)式得到 Kramers 逃逸速率随噪声变化的规律 r_K-D 曲线,如图 2 所示.以图 2 中 $a=1$ 和 $b=1$ 的实线为例,可以看出随着噪声强度 D 的增大, Kramers 逃逸速率 r_K 趋于饱和,这个渐进饱和值 $r_{Klim} = 1/(\sqrt{2}\pi)$,它表明在双稳系统两势阱之间的跃迁率不会超过此极限值 r_{Klim} .我们知道,当两势阱间跃迁率的一半与驱动信号频率相匹配时,即 $r_K/2 = f_0$ 时,随机共振现象就会产生.因此,由(6)式产生随机共振的信号频率 f_0 必然被限制在 $0 < f_0 < r_{Klim}/2$ 范围内,如果系统输入信号频率 f_0 超过跃迁率极限值的一半,那么系统响应就不会产生随机共振现象.因此, Kramers 逃逸速率是制约大频率信号产生随机共振的主要因素.

4. 二次采样随机共振的机理

在实际信号处理中,信号频率可以是任意值,如果信号频率 f_0 超出随机共振所要求的频率范围 $0 < f_0 < r_{Klim}/2$,那么直接利用双稳随机共振来获取这一特征频率信号就存在一定的困难.为了解决大频率信号的随机共振问题,文献 10,11 给出了二次采样(或变尺度)频率变换方法.其定性的意义如下:通过一个频率尺度 R (R 是大于零的有理数),将高频信号变换为一个符合随机共振的低频信号,这个低频范围在 $(0, r_{Klim}/2)$ 内,然后对该低频信号进行随机共振并识别其特征信号成分,最后再按尺度系数 R 将小频率信号恢复为原来的大频率信号.

对于实际采集的离散信号,二次采样频率变换方法的核心是通过频率尺度 R 改变朗之万方程(2)的数值计算步长.

设方程(2)中正弦信号的离散序列为 $s(n)$,序列采样间隔为 $\Delta t = 1/f_s$, f_s 是离散信号的采样频率,则有

$$s(n) = A \sin(2\pi f_0 n \Delta t) \quad (n = 0, 1, 2, \dots, N-1), \tag{7a}$$

式中 N 为采样点数.如果 f_0 是大频率,且以采样间隔 Δt 为步长计算方程(2),那么将得不到 f_0 信号的随机共振状态.现在把频率尺度 R 引入(7a)式进行变换,有

$$s(n) = A \sin(2\pi f_0 n \Delta t)$$

$$= A \sin\left(2\pi\left(\frac{f_0}{R}\right)n(R\Delta t)\right)$$

$$= A \sin\left(2\pi\left(\frac{f_0}{R}\right)n\left(\frac{1}{f_s/R}\right)\right)$$

$$(n = 0, 1, 2, \dots, N-1). \tag{7b}$$

由(7b)式可知,如果变换后新的信号频率 $f'_0 = f_0/R$ 被压缩进入到随机共振的低频率区间 $(0, r_{Klim}/2)$,那么以对应的新步长 $\Delta t' = R\Delta t$ 求解方程(2)便会得到频率 f'_0 的随机共振状态,此时新的采样频率 $f'_s = f_s/R = 1/\Delta t'$ 就是二次采样频率.显然,变换式(7b)是一种等价线性映射变换,它并没有改变双稳系统的输入信号特征,它仅仅是以不同的数值步长对方程(2)进行寻优求解,以便找到一定系统特性下适合噪声强度 D 的随机共振频率 f'_0 .这样的线性映射寻优过程可以作如下理解:变换式(7b)先不考虑实际采样状态 f_s 或 Δt ,而把实际采样数据 $s(n)$ 单纯看作无时间间隔的纯粹的序列点,然后以不同的缩放尺度 R 将序列 $s(n)$ 的各点间距重新进行布局,将原来高频快变的各点短间隔逐步转化为低频慢变的长间隔状态,直到一个合理的采样间隔状态 $\Delta t'$ 或 f'_s 建立以满足方程(2)的随机共振响应解.

不难理解,由于大频率 f_0 和小频率 f'_0 分别是对实际采样频率 f_s 和二次采样频率 f'_s 的各自归一化,那么当 f_s 被频率尺度 R 缩放为 f'_s 时, f_0 也必然被 R 对应缩放为 f'_0 .因此,小频率信号 f'_0 的响应特征就代表了大频率信号 f_0 的响应特征,即通过二次采样随机共振便可识别大频率信号的特征成分.

5. 双稳系统参数和二次采样频率与 Kramers 逃逸速率的调谐关系

由 Kramers 逃逸速率方程(5)可得其实际极限值为 $r_{Klim} = a/(\sqrt{2}\pi)$,虽然增大系统参数 a 可使极限值 r_{Klim} 增大,但是随着 a 的增大 Kramers 逃逸速率 r_K 会更快地减小并趋于零,即当 $a \rightarrow \infty$ 时, $r_K \rightarrow 0$.另外,在 a 的增大过程中, r_K-D 曲线在小噪声区域下移而在大噪声区域上升,如图 2(b)的点线所示.在有限的噪声水平范围内,虽然增大 a 可使 r_K 有一定的增大,但是一方面 r_K 增大受其极限值的限制,另一方面即使 r_K 可以增大到很大的值,然而此时的噪声强度也会是一个相当大的值,信噪比极低,随机共

振状态已很难辨识. 因此在有限的噪声水平范围内或对于某一固定的噪声强度, 增大系统参数 a 只能使 Kramers 逃逸速率 r_K 有限增大, 继续增大 a 则会使 r_K 减小. r_K 的有限增大很难满足或达到实际信号的大频率 f_0 而与之匹配.

反之, 如果减小系统参数 a , 那么 a 的减小虽然可使 r_K - D 曲线在小噪声区域上移而增大 r_K , 但 r_K 的增大非常有限, 因为极限值 $r_{Klim} = a(\sqrt{2\pi})$ 随着 a 的减小而减小, 曲线的整体趋势是下降的, r_K 的增大不会超出其极限值 r_{Klim} , 如图 2(b) 的短划线所示. 另外, 随着 a 的减小使 r_K 增大的小噪声区域会越来越缩小. 因此对于一定的噪声水平, 不可能依靠减小系统参数 a 来持续增大 Kramers 逃逸速率 r_K , r_K 仍然受到其极限值的限制.

对于系统参数 b , 根据方程 (5) 易知, b 与 D 在表达式上是具有同等意义的变量, 当 $b \rightarrow \infty$ 时 Kramers 逃逸速率极限值仍然为 $r_{Klim} = a(\sqrt{2\pi})$, 因此调整参数 b 不会如图 2(b) 那样影响 r_K - D 曲线的本质特性, 如图 2(a) 所示. 这表明改变 b 不会使 r_K 超出极限值 r_{Klim} . 因此, 对于超出极限值 r_{Klim} 一半的大信号频率 f_0 , 不可能依靠调整系统参数 b 来实现随机共振响应.

总之, 对于一定的噪声强度 D , 如果信号频率 f_0 超出 Kramers 逃逸速率极限值 r_{Klim} 的一半, 那么很难通过控制调节双稳系统参数 a 和 b 来实现大频率 f_0 的随机共振.

如果信号频率在随机共振频率范围 $(0, r_{Klim}/2)$ 内, 而且假设双稳系统对输入信号的响应未达到随机共振状态, 那么根据上述分析, 可以通过调节二次采样频率尺度 R 或改变双稳系统参数 a 或 b 来实现随机共振的响应状态. 这一点仍然可以用 Kramers 逃逸速率来解释.

假设图 2 中的实线是对应特定系统 (a 和 b 固定) 并在不同信号频率 $f_0 = r_K/2$ 及其相应的噪声强度 D 处所产生的一条随机共振曲线, 那么对于某一噪声强度 D 处有两种非随机共振状态. 一种是信号频率 (表示为 f_H) 大于随机共振频率 f_0 的状态, 在图 2 中表示为 H 点; 另一种是信号频率 (表示为 f_L) 小于随机共振频率 f_0 的状态, 在图 2 中表示为 L 点.

对于 H 点状态, 即 $f_H > f_0$, 通过减小系统参数 a 或增大 b (也可同时减小 a 增大 b), 可以使 r_K - D

曲线在 H 点对应的噪声强度处上移, 即增大 r_K 值. 当 r_K - D 曲线被提升到正好穿越 H 点时, 此时在 H 点的 Kramers 逃逸速率的一半 $r_K/2$ 恰好被调整到与信号频率 f_H 相等, 于是随机共振现象在新的一对系统参数下在 H 点对应的噪声强度处产生.

如果使用二次采样方法来处理 H 点状态, 则需要利用频率尺度 R 对信号频率 f_H 进行变换来实现随机共振. 由于在不改变系统参数 a 和 b 的条件下图 2 中的实线是唯一的一条随机共振曲线, 因此需要把 H 点通过尺度 R 变换回到这条共振曲线上, 方法就是在 H 点对应的噪声强度处选择一合适的 R ($R > 1$), 使 $f_H/R = f_0$. 实际上, 二次采样频率变换方法就是把任意信号频率通过变换归一化到随机共振频率上, 这表明二次采样方法可以将所有非随机共振点映射到随机共振的 r_K - D 曲线上.

对于 L 点状态, 即 $f_L < f_0$, 按照上述分析方法, 如果调整系统参数 a 和 b , 则可增大 a 或减小 b (也可同时增大 a 减小 b) 使 r_K - D 曲线在 L 点对应的噪声强度处下移直到穿过 L 点, 其结果是 Kramers 逃逸速率被降低至 $r_K/2 = f_L$, 于是在新的系统参数下在 L 点处产生随机共振. 如果使用二次采样频率尺度 R 进行变换, 那么选择合适的 R ($R < 1$) 使 $f_L/R = f_0$, 可以把非随机共振点 L 映射变换回随机共振的 r_K - D 曲线上.

根据以上分析可知, 在随机共振频率范围 $(0, r_{Klim}/2)$ 内, 将非随机共振状态转化为随机共振状态的两种方法——二次采样频率变换与双稳系统参数调节方法有不同的含义, 前者是调节信号频率 f_0 趋于逼近 Kramers 逃逸速率的一半 $r_K/2$, 而后者则是调节 Kramers 逃逸速率的一半 $r_K/2$ 去逼近符合信号频率 f_0 . 实际上, 两种方法的目的是通过优化选择参数来适应给定的噪声强度而达到随机共振响应.

6. 结 论

本文根据 Kramers 逃逸速率揭示了其制约大频率信号产生随机共振的原因, 并针对大频率信号的随机共振问题进一步阐明了二次采样随机共振的频率尺度变换机理. 研究表明, 随机共振信号的频率被限制在 Kramers 逃逸速率的一半的小参数频率范围内, 通过二次采样频率尺度可以把任意信号频率映射变换到随机共振的频率尺度上. 与二次采样变换

方法相比,双稳系统参数只能在随机共振的小参数频率范围内调节来实现随机共振,原因是系统参数

的调节很难使 Kramers 逃逸速率的一半达到实际信号的大频率,它受到 Kramers 逃逸速率极限的限制.

- [1] Benzi R , Sutura A , Vulpiana A 1981 *J. Phys. A* **14** L453
- [2] Benzi R , Parisi G , Sutura A , Vulpiana A 1982 *Tellus* **34** 10
- [3] Levin J E , Miller J P 1996 *Nature* **380** 165
- [4] Anishchenko V S , Safonova M A , Chua L O 1992 *Int. J. Bifurc. Chaos* **2** 397
- [5] Kaufman I K , Luchinsky D G , McClintock P V E , Soskin S M , Stein N D 1998 *Phys. Rev. E* **57** 78
- [6] Jung P 1995 *Phys. Lett. A* **220** 219
- [7] Xu B H , Duan F B , Bao R H , Li J L 2002 *Chaos Solitons Fract.* **13** 633
- [8] Mason J , Lindner J F , Neff J , Ditto W L , Bulsara A R , Spano M L 2000 *Phys. Lett. A* **277** 13
- [9] Lin M , Huang Y M , Fang L M 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 2041 (in Chinese) [林 敏、黄咏梅、方利民 2008 物理学报 **57** 2041]
- [10] Leng Y G , Wang T Y , Qin X D , Li R Y , Guo Y 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 717 (in Chinese) [冷永刚、王太勇、秦旭达、李瑞欣、郭 焱 2004 物理学报 **53** 717]
- [11] Leng Y G , Leng Y S , Wang T Y , Guo Y 2006 *J. Sound Vib.* **292** 788
- [12] Leng Y G , Wang T Y , Guo Y , Wu Z Y 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 30 (in Chinese) [冷永刚、王太勇、郭 焱、吴振勇 2007 物理学报 **56** 30]
- [13] Li J L , Xu B H 2006 *Chin. Phys.* **15** 2867
- [14] Gammaitoni L , Hänggi P , Jung P , Marchesoni F 1998 *Rev. Mod. Phys.* **70** 223

Mechanism of parameter-adjusted stochastic resonance based on Kramers rate^{*}

Leng Yong-Gang[†]

(School of Mechanical Engineering , Tianjin University , Tianjin , 300072 , China)

(Received 3 November 2008 ; revised manuscript received 3 March 2009)

Abstract

Kramers rate restricts the stochastic resonance (SR) frequency within the scope of half of its limit value. This restriction is the cause of SR failure of high frequency signal. By revealing the mechanism of frequency transformation of the twice sampling SR , we prove that the frequency scale ratio of the twice sampling SR can map or transform any signal frequency to the SR frequency scale. Compared with the method of twice sampling SR , the approach of adjusting system parameters to realize SR can only be used within the small SR frequency range , since in tuning bistable system parameters it is hard to make half the Kramers rate equal to the high frequency of the real signal.

Keywords : bistable stochastic resonance , twice sampling frequency transformation , tuning system parameters , Kramers rate

PACC : 0540 , 0650

* Project supported by the National High Technology Development Program of China (Grant No. 2007AA04Z414) , the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 50675153) and the Natural Science Foundation of Tianjin , China (Grant No. 07JCYBJC04600) .

† E-mail : leng_yg@tju.edu.cn