

# 只有一个非线性项的超混沌系统\*

周 平<sup>1)†</sup> 危丽佳<sup>2)</sup> 程雪峰<sup>2)</sup>

1) 重庆邮电大学网络化控制与智能仪器仪表教育部重点实验室, 重庆 400065)

2) 重庆邮电大学应用物理研究所, 重庆 400065)

(2008 年 10 月 7 日收到, 2008 年 12 月 30 日收到修改稿)

构造了只包含一个非线性项的四维超混沌系统, 得到了系统的 Lyapunov 指数谱、周期轨道、拟周期轨道、混沌和超混沌吸引子. 给出了此超混沌系统的电路实现原理图. 利用 EWB 仿真得到了与数值仿真完全相符的动力学行为. 同时给出了实现此超混沌系统同步的一种方法, 并利用严格数学理论证明了该混沌同步方法. 在同步过程中并未删除响应系统的非线性项, 理论分析与仿真计算表明同步方法的有效性.

关键词: 四维超混沌系统, 非线性项, Lyapunov 指数谱

PACC: 0545

## 1. 引 言

混沌现象是非线性动力学系统所特有的一种复杂运动形式, 是自然界普遍存在的复杂现象. 自 20 世纪 90 年代以来, 对混沌现象的研究和应用一直是非线性科学研究的热点之一, 并在工程应用领域显示出了其广阔的应用前景. Lorenz 吸引子<sup>[1]</sup>是第一个混沌模型, 并成为混沌研究的范例. Rössler 给出了超混沌的概念, 并提出了超混沌 Rössler 系统<sup>[2]</sup>. 与混沌相比, 超混沌系统具有两个或两个以上的正 Lyapunov 指数, 相轨在更多方向上分离, 其动力学行为更为复杂. 文献[3]研究表明, 具有一个正 Lyapunov 指数的混沌信号在作为保密通讯中的加密信号时容易被破译, 所以简单混沌信号不适宜作为加密信号, 复杂的超混沌信号可以提高混沌保密通信和混沌信息加密的安全性. 因此, 对超混沌的研究将是信息工程领域中混沌应用的一个重要课题.

近年来, 研究者对一些三维混沌系统进行改造得到了许多超混沌系统, 如超混沌 Lorenz 系统<sup>[4-6]</sup>、Chen 系统<sup>[7,8]</sup>、Lü 系统<sup>[9]</sup>、Liu 系统<sup>[10,11]</sup>和 Qi 系统<sup>[12]</sup>等. 这些超混沌系统包含了至少两个或三个非线性项, 特别是超混沌 Lorenz 系统<sup>[4]</sup>和超混沌 Qi 系统<sup>[12]</sup>包含了四个非线性项. 然而, 大家熟知的超混沌 Rössler 系统仅包含一个非线性项, 所以超混沌

Rössler 系统是系统形式比较简单的一个超混沌系统. 到目前为止, 仅包含一个非线性项的超混沌系统很少, 因此, 构造仅包含一个非线性项的超混沌系统是一项富有挑战性但又十分有意义的工作.

本文构造了仅包含一个非线性项的四维超混沌系统, 如超混沌 Rössler 系统一样简洁, 得到了包括 Lyapunov 指数谱、周期和拟周期轨道、混沌和超混沌吸引子在内的丰富动力学行为. 同时, 给出了此超混沌系统的电路实现原理图, 利用 EWB 仿真得到了与数值仿真完全符合的各种动力学行为. 最后, 给出了一种不删除响应系统非线性信息的混沌同步方法, 利用严格数学理论证明了该混沌同步方法.

## 2. 一个结构简单的新超混沌系统

构造仅有一个非线性项的四维系统

$$\begin{aligned} \dot{x} &= ax - 1.2y, \\ \dot{y} &= x - 0.1yz^2, \\ \dot{z} &= -y - 1.2z - 5w, \\ \dot{w} &= z + 0.8w, \end{aligned} \quad (1)$$

其中所有的状态变量均为实数,  $0 < a \leq 0.69$  为系统参数. 显然, 系统(1)在  $(x, y, z, w) \rightarrow (-x, -y, -z, -w)$  变换下能保持不变, 即系统关于原点对称. 系统具有如下三个平衡点  $(-0.12p^3 + 5p^3/8,$

\* 重庆市教育委员会科研基金(批准号: KJ070502)资助的课题

† E-mail: zhouping@cqupt.edu.cn

$(-1.2p + 5p/0.8, p, -p/0.8)$   $(0.12p^3 - 5p^3/8, 1.2p - 5p/0.8, -p, p/0.8)$   $(0, 0, 0, 0)$  其中  $p = \sqrt{12/a}$ .

平衡点的稳定性可以通过求解系统(1)在平衡点处 Jacobi 矩阵的特征值得到,通过数值求解,容易得到三个平衡点为不稳定平衡点.

对系统(1)的 Lyapunov 指数计算表明,当系统  $0 < a \leq 0.69$  时,系统(1)将出现周期和拟周期轨道、混沌和超混沌状态,图 1 给出了其 Lyapunov 指数谱.

从系统(1)的 Lyapunov 指数谱可得下面的结果.

当系统参数为  $0 < a \leq 0.27$  时,  $\lambda_1 = 0, \lambda_2 > \lambda_3 > \lambda_4$ , 系统处于周期状态. 如  $a = 0.1$  时,其 Lyapunov 指数为  $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) = (0, -0.12728, -0.15564, -0.15674)$ , 故系统处于周期状态,其周

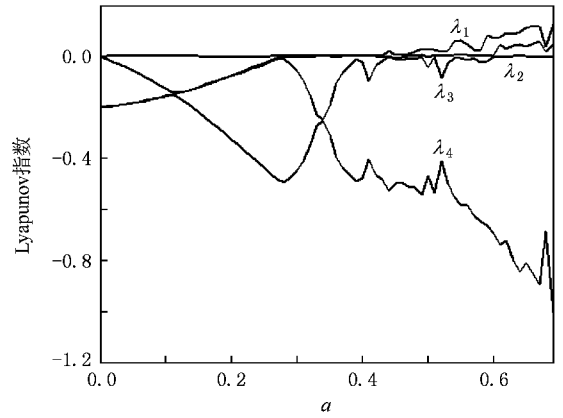


图 1 超混沌系统(1)的 Lyapunov 指数谱  
期轨道如图 2 所示.

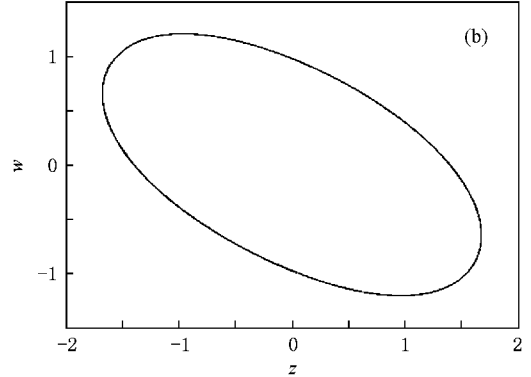
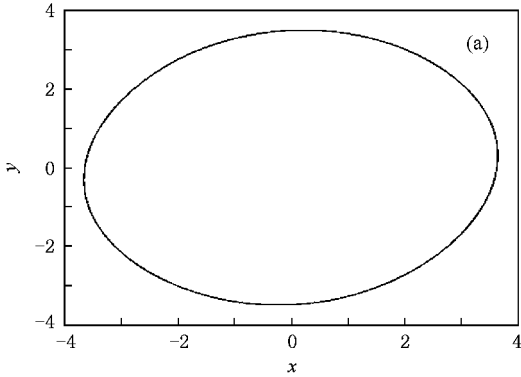


图 2  $a = 0.1$  时系统(1)的周期轨道 (a)  $y-x$  相图 (b)  $w-z$  相图

当系统参数为  $0.27 < a \leq 0.45$  时,  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0, \lambda_3 < 0, \lambda_4 < 0$ , 系统处于拟周期状态. 如  $a = 0.4$  时, 其 Lyapunov 指数为  $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) = (0, 0,$

$-0.02432, -0.47693)$ , 故系统处于拟周期状态, 其拟周期轨道如图 3 所示.

当系统参数为  $0.45 < a \leq 0.59$  时,  $\lambda_1 > 0, \lambda_2 =$

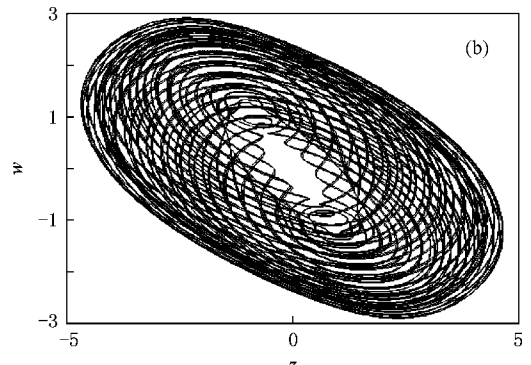
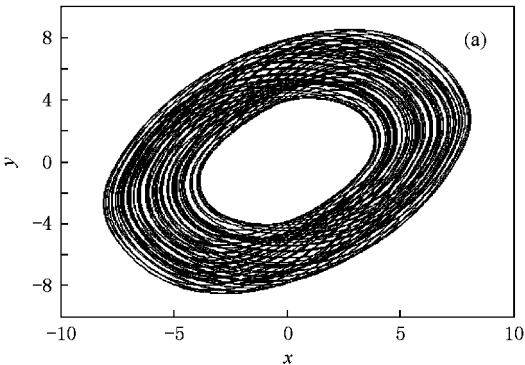


图 3  $a = 0.4$  时系统(1)的拟周期轨道 (a)  $y-x$  相图 (b)  $w-z$  相图

$0, \lambda_3 < 0, \lambda_4 < 0$ , 系统处于混沌状态. 如  $a = 0.53$  时, 其 Lyapunov 指数为  $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) = (0.02066, 0, -0.02865, -0.49696)$ , 此时系统 (1) 存在一个大于零的 Lyapunov 指数, 故系统此时处于混沌状态, 其混沌吸引子如图 4 所示.

当系统参数为  $0.59 < a \leq 0.69$  时,  $\lambda_1 > 0, \lambda_2 >$

$0, \lambda_3 = 0, \lambda_4 < 0$ , 系统处于超混沌状态. 如  $a = 0.66$  时, 其 Lyapunov 指数为  $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) = (0.1191, 0.04961, 0, -0.85222)$ , 系统 (1) 存在两个大于零的 Lyapunov 指数, 故系统此时处于超混沌状态, 其 Lyapunov 维数为  $D_L = 3 + (\lambda_1 + \lambda_2) / |\lambda_4| = 3.198$ , 其超混沌吸引子如图 5 所示.

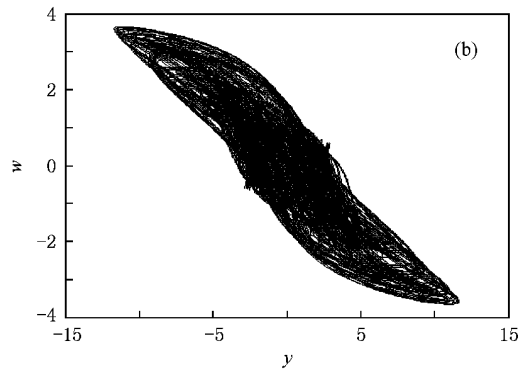
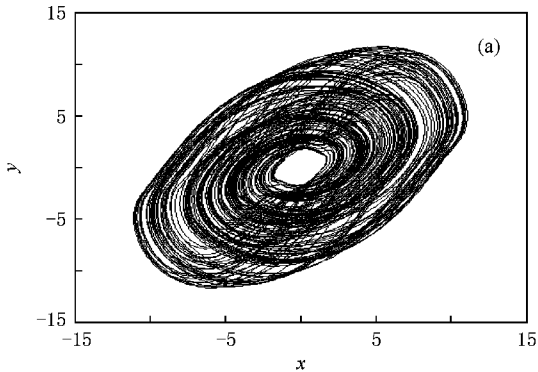


图 4  $a = 0.53$  时系统 (1) 的混沌吸引子 (a)  $y-x$  相图 (b)  $w-y$  相图

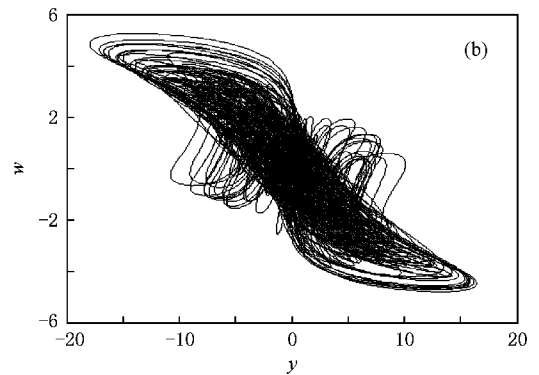
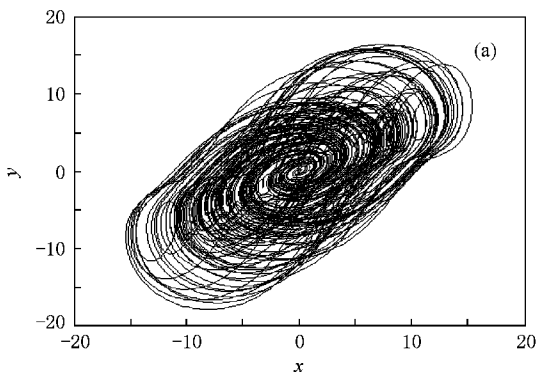


图 5  $a = 0.66$  时系统 (1) 的超混沌吸引子 (a)  $y-x$  相图 (b)  $w-y$  相图

上述分析表明, 四维系统 (1) 在参数变化时具有周期、拟周期、混沌和超混沌丰富动力学行为, 所以在适当参数下系统 (1) 处于超混沌状态.

### 3. 超混沌系统的 EWB 实现

现对系统 (1) 进行 EWB 电路仿真, 其电路原理图如图 6.

图 6 中的电路参数为  $R_1 = 10 \text{ k}\Omega, R_3 = 100 \text{ k}\Omega, R_4 = 8.3 \text{ k}\Omega, R_5 = 2 \text{ k}\Omega, R_6 = 12.5 \text{ k}\Omega, C = 10 \text{ nF}$ .  $R_2$  为可调电阻, 通过改变  $R_2$  就可得到不同的系统参

数  $a$ . 如取  $R_2 = 100 \text{ k}\Omega$ , 可得  $a = 0.1$ . 取  $R_2 = 25 \text{ k}\Omega$ , 可得  $a = 0.4$ . 取  $R_2 = 18.86 \text{ k}\Omega$ , 可得  $a = 0.53$ . 取  $R_2 = 15.15 \text{ k}\Omega$ , 可得  $a = 0.66$ . 乘法器采用 AD633, 运算放大器采用 LF353N, 电源电压为  $\pm 15 \text{ V}$ .

当  $a = 0.1$  时, 系统 (1) 周期轨道的 EWB 电路仿真结果如图 7 所示. 当  $a = 0.4$  时, 系统 (1) 拟周期轨道的 EWB 电路仿真结果如图 8 所示. 当  $a = 0.53$  时, 系统 (1) 混沌状态的 EWB 电路仿真结果如图 9 所示. 当  $a = 0.66$  时, 系统 (1) 超混沌状态的 EWB 电路仿真结果如图 10 所示.

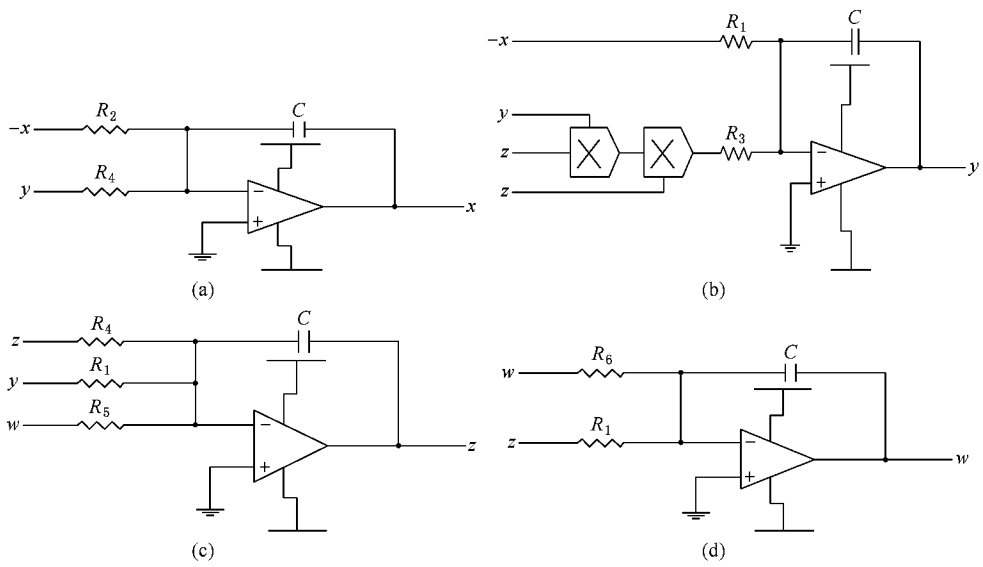


图 6 超混沌系统 1) 的电路原理图 (a)~(d) 分别对应系统 1) 中各式

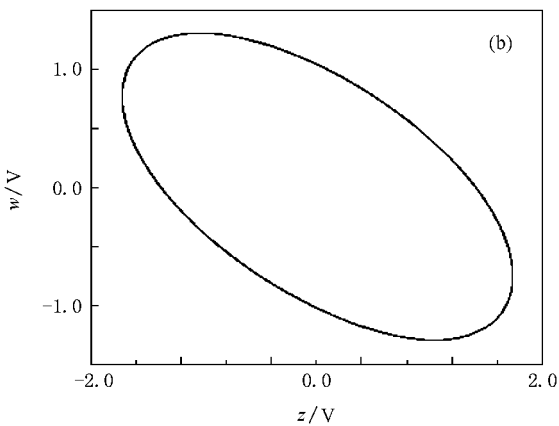
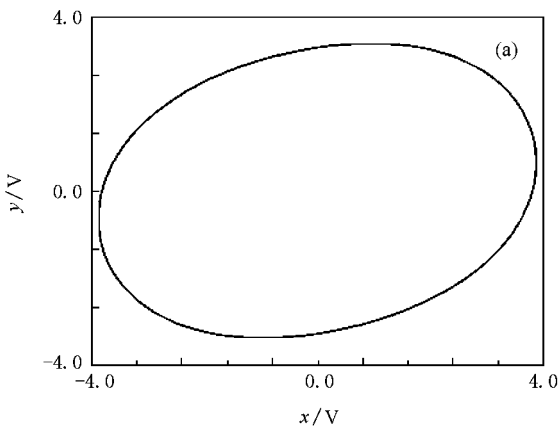


图 7  $\alpha=0.1$  时系统 1) 的 EWB 仿真 (a)  $(V)-x(V)$  相图 (b)  $u(V)-z(V)$  相图

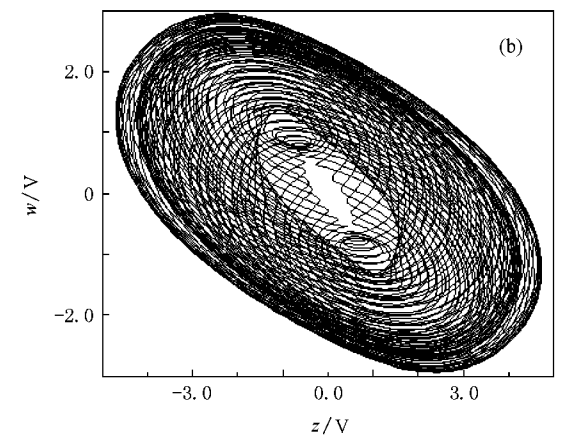
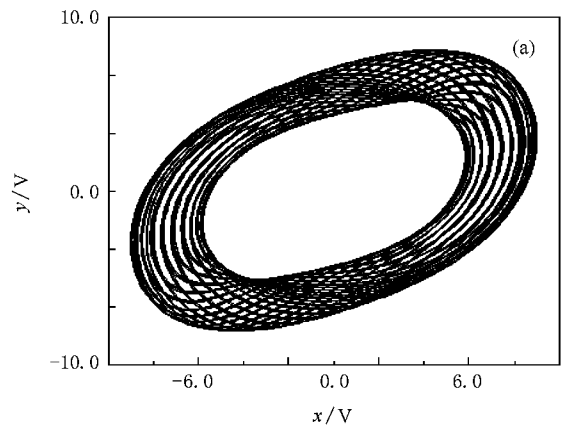


图 8  $\alpha=0.4$  时系统 1) 的 EWB 仿真 (a)  $(V)-x(V)$  相图 (b)  $u(V)-z(V)$  相图

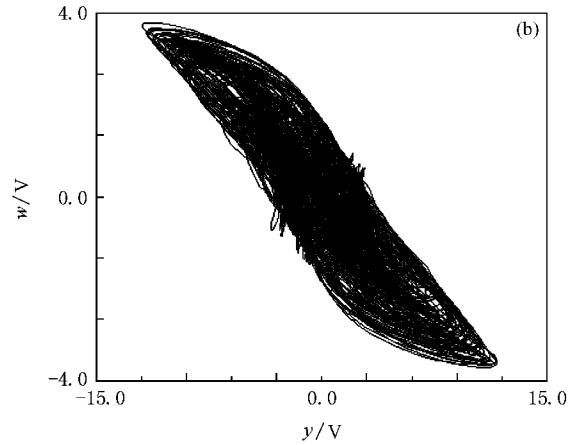
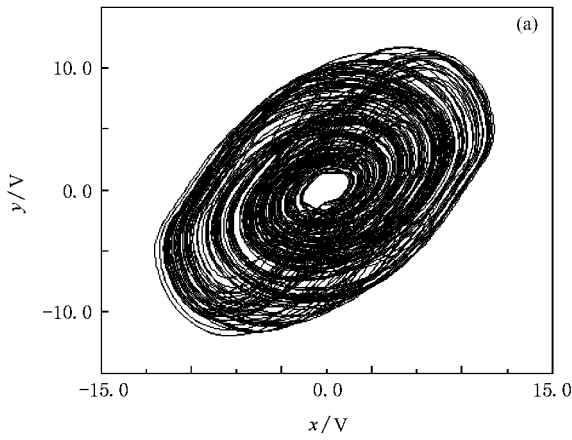


图 9  $\alpha = 0.53$  时系统 (1) 的 EWB 仿真 (a)  $y(V)-x(V)$  相图 (b)  $w(V)-y(V)$  相图

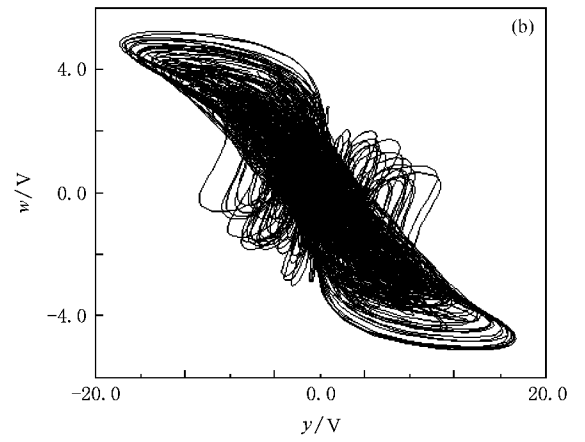
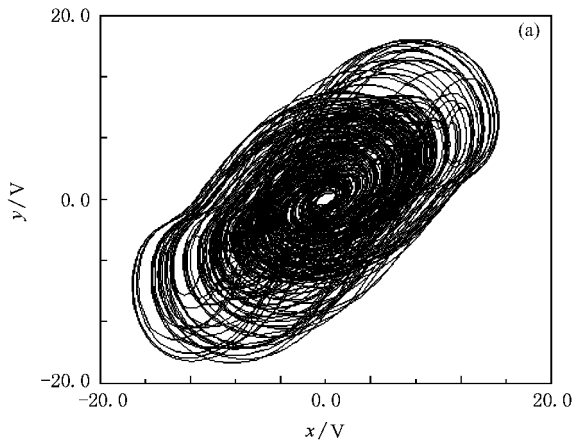


图 10  $\alpha = 0.66$  时系统 (1) 的 EWB 仿真 (a)  $y(V)-x(V)$  相图 (b)  $w(V)-y(V)$  相图

将图 2—图 5 的计算机数值仿真结果与图 7—图 10 的 EWB 电路仿真结果相比较可知,EWB 电路仿真结果与计算机数值仿真结果完全一致,这表明系统 (1) 的各种动力学行为可以很方便地由电路实现.由于 EWB 软件采用的是实际电路元件模型,所以其仿真实验与实际电路实验应该基本符合<sup>[13]</sup>,因而仿真实验结果是有效的.

#### 4. 超混沌系统 (1) 的同步研究

混沌同步是混沌保密通信中的一个重要问题,下面研究超混沌系统 (1) 的混沌同步.

为实现超混沌系统 (1) 和其响应系统的混沌同

步,为方便讨论,现将系统 (1) 改写为以下的超混沌系统:

$$\begin{pmatrix} dx/dt \\ dy/dt \\ dz/dt \\ dw/dt \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -1.2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1.2 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 0.8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -0.1yz^2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ = A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} + f(x, y, z, w), \quad (2)$$

其中  $f(x, y, z, w)$  为系统 (2) 的非线性项,  $A$  为系数矩阵.现仅讨论  $0.59 < a \leq 0.69$  的情况,此时系统 (2) 处于超混沌状态.

将超混沌系统(2)作驱动系统,构造响应系统

$$\begin{pmatrix} dx'/dt \\ dy'/dt \\ dz'/dt \\ dw'/dt \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ w' \end{pmatrix} + f(x', y', z', w') + (C - Df(x', y', z', w'))e, \quad (3)$$

其中

$$e = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' - x \\ y' - y \\ z' - z \\ w' - w \end{pmatrix}$$

为驱动系统和响应系统状态变量的误差,  $Df(x', y', z', w')$  是  $f(x', y', z', w')$  的 Jacobi 矩阵,  $C$  为待定矩阵.

由于响应系统的控制项为  $(C - Df(x', y', z', w'))e$ , 这表明此同步方法并未删除响应系统中的非线性项  $f(x', y', z', w')$ , 故保留了响应系统自身的非线性性质, 这与很多直接删除响应系统非线性项的同步方法不同.

**定理** 如果矩阵  $A + C$  的所有特征值具有负实部, 则响应系统(3)和驱动系统(2)可以达到混沌同步.

**证明** 由(3)式可得如下响应系统:

$$\begin{pmatrix} dx'/dt \\ dy'/dt \\ dz'/dt \\ dw'/dt \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ w' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -0.1y'z'^2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \left( C - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.1z'^2 & -0.2yz' & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right) e,$$

则有驱动系统(2)和响应系统的误差系统为

$$\begin{pmatrix} de_1/dt \\ de_2/dt \\ de_3/dt \\ de_4/dt \end{pmatrix} = (A + C)e + \begin{pmatrix} 0 \\ -0.1e_2e_3^2 - 0.1ye_3^2 - 0.2e_2e_3z \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (4)$$

显然  $e_i = 0 (i = 1, 2, 3, 4)$  是误差系统(4)的平衡点. 误差系统(4)在平衡点  $e_i = 0 (i = 1, 2, 3, 4)$  处的

Jacobi 矩阵是  $A + C$ .

由于矩阵  $A + C$  的所有特征值具有负实部, 所以平衡点  $e_i = 0 (i = 1, 2, 3, 4)$  是误差系统(4)的渐近稳定平衡点, 故有  $\lim_{t \rightarrow +\infty} e_i = 0 (i = 1, 2, 3, 4)$  成立, 所以响应系统(3)和驱动系统(2)可以达到混沌同步.

定理表明, 当选择合适的矩阵  $C$ , 使得矩阵  $A + C$  的所有特征值具有负实部时, 就可以实现响应系统(3)和驱动系统(2)的超混沌同步.

取  $a = 0.66$  时进行数值仿真计算, 此时系统(1)处于超混沌状态. 当选择

$$C = \begin{pmatrix} -5 - a & 1.2 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & -2.8 \end{pmatrix},$$

可得矩阵  $A + C$  的特征值分别为  $\lambda_1 = -5, \lambda_2 = -4, \lambda_3 = -2, \lambda_4 = -1.2$ . 满足矩阵  $A + C$  的所有特征值具有负实部, 所以响应系统(3)和驱动系统(2)可以达到超混沌同步, 仿真结果如图 11 所示. 图 11

和图 12 中  $\epsilon = \left( \sum_{i=1}^4 e_i^2 \right)^{1/2}$ .

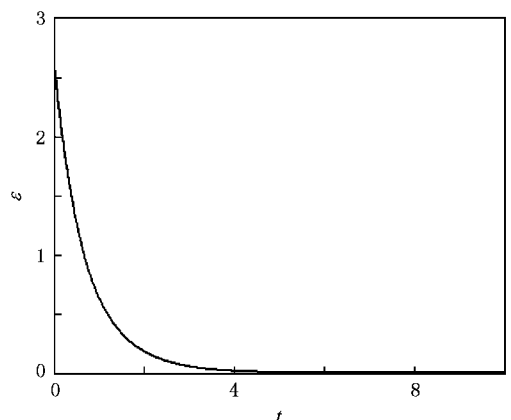


图 11 响应系统(3)和驱动系统(2)的超混沌同步

当选择

$$C = \begin{pmatrix} -2a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

可得矩阵  $A + C$  的特征值分别为  $\lambda_{1,2} = -0.33 \pm 1.0446j, \lambda_{3,4} = -0.2 \pm 2j$ , 满足矩阵  $A + C$  的所有特征值具有负实部, 所以响应系统(3)和驱动系统(2)可以达到超混沌同步, 仿真结果如图 12 所示.

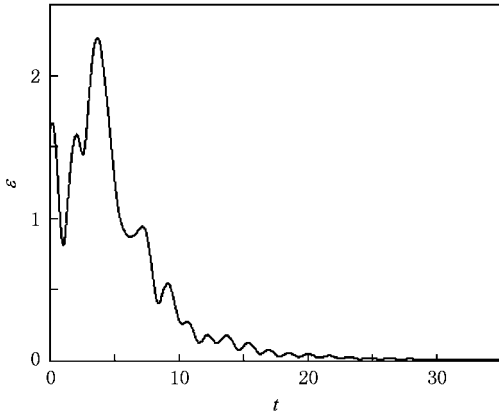


图 12 响应系统(3)和驱动系统(2)的超混沌同步

## 5. 结 论

本文给出了仅具有一个非线性项的四维非线性系统,其 Lyapunov 指数谱表明此四维系统在参数变化时具有周期、拟周期、混沌和超混沌丰富动力学行为,计算机数值仿真得到了此系统的周期轨道、拟周期轨道、混沌和超混沌吸引子.对此系统进行了 EWB 电路实现,EWB 电路仿真得到了系统的各种动力学行为,EWB 电路仿真结果与计算机数值仿真结果完全一致.同时给出了一个不删除响应系统非线性项的混沌同步方法,并给予了严格数学证明.同步的数值仿真结果与理论分析的一致性表明了此同步方法的有效性.

- [ 1 ] Sparrow C 1982 *The Lorenz Equations : Bifurcations Chaos and Strange Attractors*, New York : Springer
- [ 2 ] Rössler O E , 1979 *Phys. Lett. A* **71** 155
- [ 3 ] Perez G , Cerdeira H A 1995 *Phys. Rev. Lett.* **74** 1970
- [ 4 ] Wang F Z , Chen Z Q , Wu W J , Yuan Z Z , 2007 *Chin. Phys.* **16** 3238
- [ 5 ] Wang G Y , Zheng Y , Liu J P 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 3113 ( in Chinese ) [ 王光义、郑 艳、刘敬彪 2007 物理学报 **56** 3113 ]
- [ 6 ] Wang X Y , Wang M J 2008 *Physica A* **387** 3751
- [ 7 ] Zhang Q , Wang J Z , Chen Z Q , Yan Z Z 2008 *Acta. Phys. Sin.* **57** 2092 ( in Chinese ) [ 张 青、王杰智、陈增强、袁著祉 2008 物理学报 **57** 2092 ]
- [ 8 ] Cai G L , Huang J J 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 3997 ( in Chinese ) [ 蔡国梁、黄娟娟 2006 物理学报 **55** 3997 ]
- [ 9 ] Chen A M , Lu J A , Lü J H , Yu S M 2006 *Physica A* **364** 103
- [ 10 ] Wang F Q , Liu C X 2006 *Chin. Phys.* **15** 963
- [ 11 ] Liu C X 2007 *Chin. Phys.* **16** 3279
- [ 12 ] Qi G Y , van Wyk M A , van Wyk B J , Chen G R 2008 *Phys. Lett. A* **372** 124
- [ 13 ] Liu L , Su Y C , Liu C X 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 3933 ( in Chinese ) [ 刘 凌、苏燕辰、刘崇新 2006 物理学报 **55** 3933 ]

# A hyperchaos system with only one nonlinear term <sup>\*</sup>

Zhou Ping<sup>1,2)†</sup> Wei Li-Jia<sup>2)</sup> Cheng Xue-Feng<sup>2)</sup>

<sup>1</sup> *Key Laboratory of Network Control and Intelligent Instrument of Ministry of Education, Chongqing University of Posts and Telecommunications, Chongqing 400065, China*

<sup>2</sup> *Institute of Applied Physics, Chongqing University of Posts and Telecommunications, Chongqing 400065, China*

( Received 7 October 2008 ; revised manuscript received 30 December 2008 )

## Abstract

A novel four-dimensional hyperchaos system with only one nonlinear term is reported. The Lyapunov exponents spectrum, periodic orbit, quasi-periodic orbit, and the chaos and hyperchaos attractor of this system are obtained. A circuit is designed to realize this system by electronic workbench. A synchronization method for the new hyperchaotic systems is established and the mathematical proof of the method is provided. The nonlinear terms in the response system are not dropped. Theoretical analysis and simulation results show that the method is effective.

**Keywords** : four-dimensional hyperchaos system, single nonlinear term, Lyapunov exponents spectrum

**PACC** : 0545

<sup>\*</sup> Project supported by the Scientific Research Foundation of the Committee of Education of Chongqing, China ( Grant No. KJ070502 ).

<sup>†</sup> E-mail: zhouping@cqupt.edu.cn