

# 利用速度反馈方法控制时空混沌\*

高继华<sup>1)†</sup> 谢玲玲<sup>1)</sup> 彭建华<sup>3)</sup>

1) 深圳大学材料学院, 深圳 518060)

2) 深圳大学深圳市特种功能材料重点实验室, 深圳 518060)

3) 深圳大学物理科学学院, 深圳 518060)

(2008 年 12 月 4 日收到, 2008 年 12 月 15 日收到修改稿)

以空间一维的复 Ginzburg-Landau 方程为模型, 研究了利用系统变量随时间的变化率作为反馈控制信号控制偏微分方程系统中时空混沌的可能性. 通过理论分析和数值模拟方法讨论了控制参数与可控性所满足的关系, 解释了不同目标态时临界控制参数的尺寸效应.

关键词: 混沌控制, 时空混沌, 速度反馈, 复 Ginzburg-Landau 方程

PACC: 0545

## 1. 引言

半个世纪以来, 有关混沌性质研究已经吸引了众多研究群体的兴趣. 如何实现混沌的应用, 已成为当前非线性科学研究的一个重要内容. 基于这个原因, 在 1990 年有关混沌控制<sup>[1]</sup>和混沌同步<sup>[2]</sup>的工作发表以来, 混沌的控制与同步的相关理论和应用研究都有了蓬勃发展. 与此同时, 时空混沌逐渐成为混沌应用研究领域的一个重要内容, 时空混沌的控制与同步也成为当前非线性科学研究的一个热点<sup>[3-15]</sup>. 实际应用要求在达到预期目标的条件下, 所使用的控制方法应该越简单越好. 目前常用的混沌控制方法主要分为两大类: 反馈控制方法<sup>[16-26]</sup>和非反馈控制方法<sup>[27-33]</sup>. 其中最简单的反馈方法就是变量线性反馈方法, 即采用反馈信号  $K \cdot (x - \hat{x})$  的形式 ( $x$  为系统变量,  $\hat{x}$  表示目标周期态,  $K$  为反馈强度矩阵). 该方法应用于时空混沌的控制也有较多文献报道. 基于该思想, 在文献 [18] 中作者用低维周期反馈信号成功地控制了时空混沌系统, 并且建立了局域变量反馈(钉扎)方法的解析理论. 变量的线性反馈方法要求对系统的变量进行即时跟踪与测量, 从而进行变量的持续反馈注入. 在实际情形中还存在大量的系统, 对其状态变量难于进行全面了解, 但是相比较而言, 有关它的某个函数却易于跟踪

和测量. 对于这样的系统, 文献 [19, 20] 提出了一种广义函数反馈方法, 即采用变量函数反馈信号  $K \cdot [F(x) - F(\hat{x})]$  控制时空混沌, 其中  $F(x)$  称为反馈函数. 显然, 当考虑  $F(x) = x$  的特殊情况时, 这种方法与常见的变量线性反馈方法是一致的. 此外, 在文献 [21, 22] 中利用变量的速度反馈方法, 进行了低维混沌系统的控制与同步研究. 这相当于广义反馈方法中考虑反馈函数为  $F(x) = \partial_t x$  的特殊情况. 同时, 文献 [23, 24] 提出了类似的反馈方法, 并完成了局域速度反馈方法控制与同步时空系统的理论和数值研究. 从已有的理论和数值工作来看, 这种速度反馈方法是常见的状态线性反馈方法的一个补充, 是一种重要的广义反馈方法, 所以很有必要进行深入的研究. 本文将以前常见的复 Ginzburg-Landau 方程 (CGLE) 为时空系统模型, 讨论该方程的周期解在混沌系统参数下的稳定性, 利用速度反馈方法控制时空混沌到不同目标周期态, 并通过理论分析方法讨论临界控制参数区域的相关性质.

## 2. 模型和混沌控制方法

CGLE 是常见的时空系统模型, 可以用来讨论物质的超导电性和超流动性以及液晶系统中的玻色-爱因斯坦凝聚现象. 此外, 该方程还是描述非线性波动和相变现象的重要物理模型, 是时空系统出

\* 国家自然科学基金(批准号: 10405018, 70571053)资助的课题.

† E-mail: jhgao@szu.edu.cn

现超临界均匀 Hopf 分岔时序参量的普适方程,也是研究时空混沌和振荡介质的常用模型<sup>[34-37]</sup>. 在空间一维的情况下, CGLE 系统为

$$\partial_t A = A + (1 + ic_1) \partial_x^2 A - (1 + ic_2) |A|^2 A, \tag{1}$$

其中  $A$  是以时间  $t$  和空间  $x$  为自变量的系统状态变量,  $c_1$  和  $c_2$  是系统实参数,  $i$  为虚数单位. 在满足周期性的边界条件下, 方程 (1) 存在行波解

$$\hat{A}(x, t) = A_0 e^{(k \cdot x - \omega t)}, \tag{2}$$

$$k = \frac{2m\pi}{L} e^x \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots),$$

其中  $A_0 = \sqrt{1 - k^2}$ ,  $\omega = c_2 + (c_1 - c_2) k^2$ ,  $k$  为波矢,  $L$  为系统的尺寸,  $m$  代表平面波的模数. 理论和数值分析结果表明: 在  $L$  较大的情况下, 当系统参数满足  $1 + c_1 c_2 < 0$  时 (2) 式中所有的周期性行波解都不再稳定, 使系统进入时空混沌态, 而其中的缺陷湍流 (defect turbulence) 和相湍流 (phase turbulence) 是该系统时空混沌 (湍流) 的典型状态. 在缺陷湍流区内, 时空混沌态具有多个正的 Lyapunov 指数<sup>[35-37]</sup>.

对系统 (1) 加入速度反馈控制项后, 可写成

$$\partial_t A = A + (1 + ic_1) \partial_x^2 A - (1 + ic_2) |A|^2 A - \epsilon (\partial_t A - \partial_t \hat{A}), \tag{3}$$

其中  $\hat{A}$  是 (2) 式中的一个周期行波解, 将其作为系统  $A$  的目标态, 所加入的反馈作用是以  $A$  与  $\hat{A}$  速度差的方式实现的, 因此这种控制方法被称为速度反馈控制方法<sup>[21, 22]</sup>. 这里  $\epsilon$  为速度反馈控制强度, 也是唯一的控制参数. 在下面的讨论中, 所设定的参数  $c_1$  和  $c_2$  值, 使 CGLE 系统处于缺陷湍流态. 通过线性稳定性分析和数值模拟, 研究系统 (3) 实现控制的条件和在不同的控制强度  $\epsilon$  下状态的演化规律.

### 3. 线性稳定性分析

在存在控制的情况下考虑系统变量是对周期目标态 (2) 的一个微扰, 即

$$A(x, t) = A_0 (1 + a) e^{(kx - \omega t + \varphi)}. \tag{4}$$

这里  $|a| \ll 1$  和  $|\varphi| \ll 1$ . 将  $A(x, t)$  代入 (3) 式, 保留到  $a$  和  $\varphi$  的线性项, 得

$$\begin{aligned} (1 + \epsilon) a_t &= a_{xx} - 2kc_1 a_x - \chi(1 - k^2) a \\ &\quad - c_1 \varphi_{xx} - 2k\varphi_x - \omega\epsilon\varphi, \\ (1 + \epsilon) \varphi_t &= c_1 a_{xx} + 2ka_x - 2c_2(1 - k^2) a \\ &\quad + \varphi_{xx} - 2kc_1 \varphi_x + \omega\epsilon a, \end{aligned} \tag{5}$$

其中  $a_t = \partial_t a$ ,  $a_x = \partial_x a$ ,  $a_{xx} = \partial_x^2 a$ ,  $\varphi_t$ ,  $\varphi_x$  和  $\varphi_{xx}$  也具有类似的形式. 设  $\begin{pmatrix} a \\ \varphi \end{pmatrix}$  的本征值为  $\sigma$ , 则对应的本征函数为

$$\begin{pmatrix} a \\ \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 \\ \varphi_0 \end{pmatrix} e^{\sigma t + i p x}, \tag{6}$$

其中  $p = \frac{2m'\pi}{L}$  是微扰模在周期边界条件下的波数,  $m'$  为对应的微扰模数,  $m'$  是整数. 将 (6) 式代入 (5) 式, 解得本征值  $\sigma$ , 即

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{1}{2} (F_{11} + F_{22}) \\ &\quad + \frac{1}{2} \sqrt{(F_{11} + F_{22})^2 - 4(F_{11}F_{22} - F_{12}F_{21})}. \end{aligned} \tag{7}$$

这里

$$\begin{aligned} F_{11} &= \frac{-p^2 - i2kc_1 p - \chi(1 - k^2)}{1 + \epsilon}, \\ F_{12} &= \frac{c_1 p^2 - i2kp - \omega}{1 + \epsilon}, \\ F_{21} &= \frac{-c_1 p^2 + i2kp - 2c_2(1 - k^2) + \omega}{1 + \epsilon}, \\ F_{22} &= \frac{-p^2 - i2kc_1 p}{1 + \epsilon}. \end{aligned} \tag{8}$$

设  $\sigma$  具有形式  $\sigma = \lambda + i\Omega$ , 则实部  $\lambda = \text{Re}\sigma$  表征了本征函数  $\begin{pmatrix} a \\ \varphi \end{pmatrix}$  在时间上的指数增长或者衰减. 利用 (7) 式, 对本征函数  $\begin{pmatrix} a \\ \varphi \end{pmatrix}$  的每个模进行求解, 就可以得到控制 CGLE 系统的临界条件: 当对应于每个微扰模的  $\lambda$  均小于零时, 就说明系统的周期目标态是稳定的, 而所有的微扰模中只要有一个对应的  $\lambda$  大于零, 系统的周期目标态就失去了稳定性.

### 4. 临界控制强度

由理论分析得到的 (7) 式可以用来预测临界控制强度, 即能够确保系统被驱动到目标周期态的最小控制强度值. 为具体起见, 以下分析中取参数  $c_1 = 2.1$  和  $c_2 = -1.5$ , 此时系统处于缺陷湍流态, (2) 式中的周期态是不稳定的. 通过调整系统 (3) 中的控制强度  $\epsilon$ , 使系统由缺陷湍流态被驱动到目标周期态. 不失一般性, 先考虑选取 (2) 式中周期目标态  $m = 2$ , 由此所得的结论可以直接向其他  $m$  值的

情形推广. 由理论分析可知 (7) 式是目标态微扰模的稳定性判据, 其模数由 (6) 式中的  $p = \frac{2m'\pi}{L}$  来决定. 首先可以计算出不同微扰模  $p$  所对应的本征值  $\sigma$  实部  $\lambda = \text{Re}\sigma$  的正负决定了控制的稳定性. 图 1 给出了不同微扰模的本征值实部随着控制强度  $\varepsilon$  的变化. 由图 1 可见, 随着控制强度的增大, 所有微扰模所对应的  $\lambda = \text{Re}\sigma$  都可随之变为负值. 这表明通过速度反馈控制, 可将周期目标态的微小偏离消除, 保证了目标态的局域稳定性. 在所有周期态的微扰模中, 起决定性作用的是具有最大临界控制强度的模. 图 2 所示为微扰模与临界控制强度的关系. 从图 2 可见, 波数  $p$  接近于零的微扰对应着最大的临界控制强度, 从而决定了控制的稳定性. 在所给定的系统参数下, 可以计算出临界控制强度  $\varepsilon_c \approx 2.04$ .

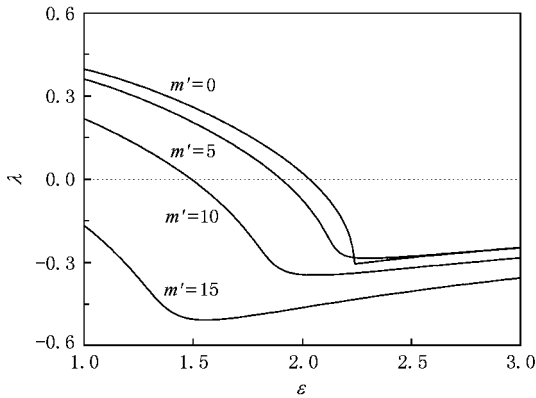


图 1 微扰模的实部随控制强度的变化

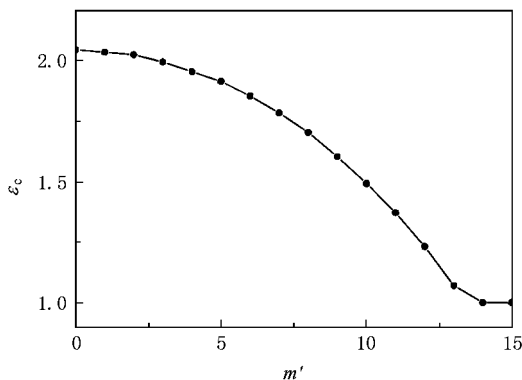


图 2 微扰模的临界控制强度

用此量来刻画系统变量与驱动信号之间的同步程度. 若  $P \rightarrow 0$ , 则表示变量  $A$  和目标信号  $\hat{A}$  的距离随着时间的演化趋于零, 即系统逐步得以控制; 若  $P$  保持较大的值, 则说明系统未能被有效控制. 通过对  $P$  的计算, 可验证理论分析的结果, 并进一步讨论对系统的控制规律. 图 3 给出了在不同控制强度下  $P$  的变化规律. 从图 3 可见, 当控制强度较大时,  $P$  可以降低到接近于零的程度, 这对应着可控的情形. 图 3 中的临界控制强度与上述理论分析所得的值符合得非常好.

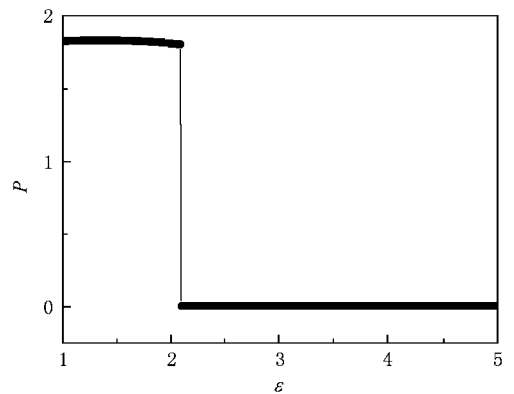


图 3 以周期目标态为初始条件的数值模拟结果. 系统尺寸  $L = 120$ , 目标态  $m = 2$

图 3 所示的是直接以周期目标态为初始条件下所进行的数值模拟结果, 可以验证目标态的局域稳定性. 一个很自然的问题是: 若以时空混沌态作为初始条件, 那么对受控系统 (3) 又有怎样的结果? 图 4 给出以时空混沌态为初始条件的  $P-\varepsilon$  关系. 从图 4 可见, 当控制强度增加到足够大时,  $P$  接近于零. 这说明利用速度反馈控制作用可以使系统从时空混沌控制到周期目标态. 对比图 4 和图 3 中的临界控制强度可知, 前者比后者的临界控制强度值要大些. 其原因是线性稳定性分析方法只是考虑了目标态的局域稳定性, 而不同的相空间初始值将导致系统演化有较大的差异. 为了说明这一推论, 在进一步的数值模拟中, 我们选择初始条件为

$$A(x, t = 0) = Q\hat{A} + (1 - Q)\tilde{A}, \quad (10)$$

其中  $\hat{A}$  是周期目标态,  $\tilde{A}$  是时空混沌态,  $Q \in [0, 1]$  代表初始条件中周期目标态所占的权重因子. 图 5 所示为不同初始条件下的临界控制强度. 从图 5 可以得到以下结果: 当  $Q = 0$ , 即初始条件完全为时

引入定义

$$P = \lim_{\Delta T \rightarrow \infty} \frac{1}{L\Delta T} \int_0^{\Delta T} dt \int_0^L |A(x, t) - \hat{A}(x, t)| dx, \quad (9)$$

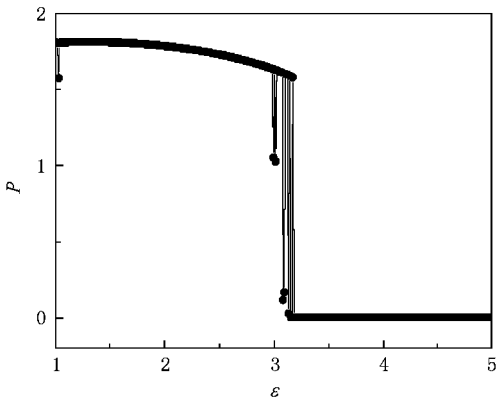


图 4 以时空混沌态为初始条件的数值模拟结果 系统尺寸  $L = 120$ , 目标态  $m = 2$

空混沌态时, 临界强度对应着图 4 的情形; 而当  $Q = 1$  即初始条件完全为周期目标态时, 临界强度降低到图 3 的情形; 当初始条件中周期目标态的权重因子增加时, 控制系统到达目标态所需要的临界控制强度降低。

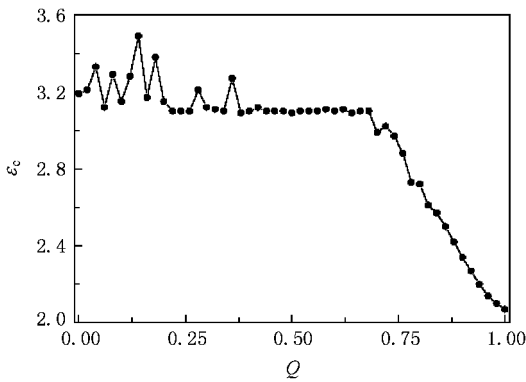


图 5 不同初始条件下的临界控制强度  $\epsilon_c$

### 5. 系统的尺寸效应

上述线性稳定性分析方法只能得到以周期目标态为初始条件情况下的临界控制强度, 而对于以时空混沌为初始条件的情形, 则需要直接对系统 (3) 进行数值模拟。在时空混沌控制的情况下, 线性稳定性分析可作为一种半定量的方法用来研究系统的尺寸效应。图 6 给出了控制强度在不同系统尺寸下的临界值。当初始条件分别为周期目标态和时空混沌态时, 临界控制强度均具有类似的变化规律, 通过理论分析可以预计数值模拟的趋势。从图 6 中还发现

一个现象: 较小尺寸的系统反而要求较大的临界控制强度, 即为了使得系统被控制到相同的目标周期态(在 (2) 式中具有相同的  $m$ ), 小尺寸系统需要更强的速度反馈注入信号。图 7 给出了对应不同目标态的临界控制强度, 临界控制强度随着目标态波数  $m$  的增大而增大。同时, 考虑如果系统的尺寸加倍, 而周期目标态波数  $m$  也加倍, 这时候目标态的空间分布不会发生变化, 应具有相同的临界控制强度。而不管系统的尺寸如何, 如果目标态为  $m = 0$  的空间均匀态, 应具有相同的临界控制强度。不同系统尺寸和目标态下的理论临界控制强度见表 1。从表 1 可以看出, 如果受控系统的  $m/L$  比值相同, 则具有相同的理论临界控制强度。

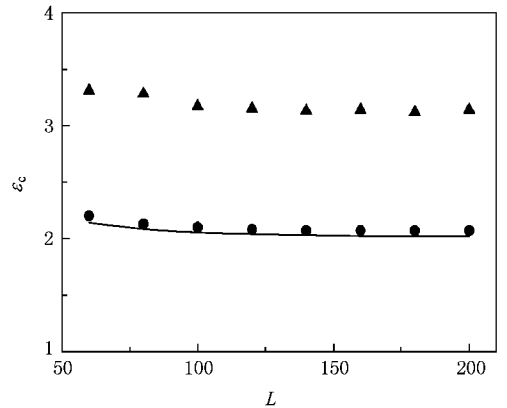


图 6 不同系统尺寸下的临界控制强度 实线是线性稳定性分析的结果, 圆点和三角形符号分别代表以周期目标态和时空混沌态为初始条件的数值模拟结果

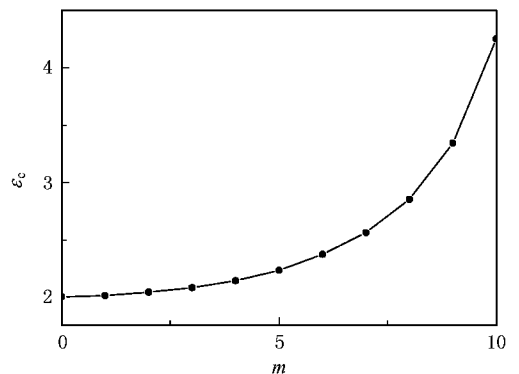


图 7 不同目标态对应的临界控制强度

表 1 不同系统尺寸和目标态下的临界控制强度  $\epsilon_c$ .

$L$	$m = 0$	$m = 1$	$m = 2$	$m = 3$	$m = 4$	$m = 5$	$m = 6$
60	2.00	2.04	2.14	2.37	2.85	4.25	9.28
80	2.00	2.02	2.08	2.18	2.37	2.69	3.34
100	2.00	2.02	2.05	2.11	2.21	2.37	2.61
120	2.00	2.01	2.04	2.08	2.14	2.23	2.37
140	2.00	2.01	2.03	2.06	2.10	2.17	2.25
160	2.00	2.01	2.02	2.05	2.08	2.12	2.18
180	2.00	2.01	2.02	2.04	2.06	2.10	2.14
200	2.00	2.01	2.02	2.03	2.05	2.08	2.11

## 6. 结 论

本文以一维 CGLE 为例,研究了控制时空混沌的速度反馈方法.利用线性稳定性分析的方法获得了周期目标态的稳定性条件,并与时空混沌控制的数值模拟结果进行对比.线性稳定性分析可以对时空系统的初始条件在目标态附近的情形进行准确预测.由于时空系统中往往有多个吸引子共存的情况,当考虑初始条件为时空混沌态时,实际临界控制强度要比理论临界控制强度大.本文用数值模拟的方

法得到了不同初始条件下的临界控制强度.当考虑以不同的周期解作为目标态的情况下,不同的系统尺寸对于临界控制参数有影响.发现当目标态在空间分布情况相同时,即具有相同的  $m/L$  比值,速度反馈的理论临界控制参数相同.

速度反馈方法控制时空混沌,是一种重要的时空混沌控制与同步方法.其形式虽然简单,但在实际应用中是一般的变量状态反馈方法的一个很好的补充.对于这种方法进行理论分析和数值实验,可以大大拓展反馈方法在时空混沌的控制与同步领域的应用范围,从而增加该方法的应用潜力.

- [1] Ott E, Grebogi C, York J 1990 *Phys. Rev. Lett.* **64** 1196
- [2] Pecora L, Carroll T 1990 *Phys. Rev. Lett.* **64** 821
- [3] Hu G, Qu Z L 1994 *Phys. Rev. Lett.* **72** 68
- [4] Hu G, Qu Z L, He K F 1995 *Int. J. Bifur. Chaos* **5** 901
- [5] Petrov V, Ouyang Q, Swinney H 1997 *Nature* **388** 655
- [6] Tang G N, Luo X S, Kong L J 2000 *Acta Phys. Sin.* **49** 30 (in Chinese) [唐国宁、罗晓曙、孔令江 2000 物理学报 **49** 30]
- [7] Alonso S, Sagues F, Mikhailov A S 2003 *Science* **299** 1722
- [8] Li S, Xu W, Li R H 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 1049 (in Chinese) [李爽、徐伟、李瑞红 2006 物理学报 **55** 1049]
- [9] Zhou X A, Qian G B, Qiu S S 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 3974 (in Chinese) [周小安、钱恭斌、丘水生 2006 物理学报 **55** 3974]
- [10] Zheng Y A 2006 *Chin. Phys. B* **15** 2549
- [11] Yue L J, Shen K, Xu M Q 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 4378 (in Chinese) [岳立娟、沈柯、徐明奇 2007 物理学报 **56** 4378]
- [12] Li R H, Xu W, Li S 2007 *Chin. Phys. B* **16** 1591
- [13] Wang X Y, Wang M J 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 731 (in Chinese) [王兴元、王明军 2008 物理学报 **57** 731]
- [14] Lü L, Li G, Chai Y 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 7517 (in Chinese) [吕翎、李钢、柴元 2008 物理学报 **57** 7517]
- [15] Ahlborn A, Parlitz U 2008 *Phys. Rev. E* **77** 016201
- [16] Pyragas K 1992 *Phys. Lett. A* **170** 421
- [17] Xiao J H, Hu G, Yang J Z, Gao J H 1998 *Phys. Rev. Lett.* **81** 5552
- [18] Hu G, Xiao J H, Gao J H, Li X M, Yao Y G, Hu B 2000 *Phys. Rev. E* **62** R3043
- [19] Guan S G, Li K, Lai C H 2006 *Chaos* **16** 023107
- [20] Gao J H, Zheng Z G 2007 *Chin. Phys. Lett.* **24** 359
- [21] Tao C H, Yang C D, Luo Y, Xiong H X, Hu F 2005 *Chaos Solitons Fract.* **23** 259
- [22] Tao C H, Lu J A 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 5058 (in Chinese) [陶朝海、陆君安 2005 物理学报 **54** 5058]
- [23] Gao J H, Yang Q P, Gong X Z, Tang J N, Peng J H 2006 *Sci. Tech. Eng.* **6** 1 (in Chinese) [高继华、杨钦鹏、龚晓钟、汤皎宁、彭建华 2006 科学技术与工程 **6** 1]
- [24] Gao J H, Yang Q P, Gong X Z, Tang J N, Peng J H 2007 *Sci. Tech. Eng.* **7** 8 (in Chinese) [高继华、杨钦鹏、龚晓钟、汤皎宁、彭建华 2007 科学技术与工程 **7** 8]
- [25] Lu W G, Zhou L W, Luo Q M, Du X 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 6275 (in Chinese) [卢伟国、周雒维、罗全明、杜雄 2007 物理学报 **56** 6275]
- [26] Feng Y L, Shen K 2008 *Chin. Phys. B* **17** 111
- [27] Aranson I, Levine H, Tsimring L 1994 *Phys. Rev. Lett.* **72** 2561
- [28] Luo X S 1999 *Acta Phys. Sin.* **48** 402 (in Chinese) [罗晓曙 1999 物理学报 **48** 402]

- [ 29 ] Zhang X ,Shen K 2001 *Phys. Rev. E* **63** 046212
- [ 30 ] Jiang M X ,Wang X N ,Ouyang Q ,Zhang H 2004 *Phys. Rev. E* **69** 056202
- [ 31 ] Zhang H ,Cao Z J ,Wu N J ,Ying H P ,Hu G 2005 *Phys. Rev. Lett.* **94** 188301
- [ 32 ] Gao J H ,Peng J H 2007 *Chin. Phys. Lett.* **24** 1614
- [ 33 ] Gao J H ,Zheng Z G ,Ma J 2008 *Int. J. Mod. Phys. B* **22** 3855
- [ 34 ] Kuramoto Y 1984 *Chemical Oscillations ,Waves and Turbulence* ( New York : Springer )
- [ 35 ] Janiaud B ,Pumir A ,Bensimon D ,Croquette V ,Richter H ,Kramer L 1992 *Physica D* **55** 269
- [ 36 ] Cross M ,Hohenberg P 1993 *Rev. Mod. Phys.* **65** 851
- [ 37 ] Aranson I ,Kramer L 2002 *Rev. Mod. Phys.* **74** 99

## Controlling spatiotemporal chaos by speed feedback method<sup>\*</sup>

Gao Ji-Hua<sup>1,2)†</sup> Xie Ling-Ling<sup>1)</sup> Peng Jian-Hua<sup>3)</sup>

<sup>1</sup> *College of Materials ,Shenzhen University ,Shenzhen 518060 , China*

<sup>2</sup> *Key Laboratory of Special Functional Materials of Shenzhen ,Shenzhen University , Shenzhen 518060 , China*

<sup>3</sup> *College of Physics Science ,Shenzhen University ,Shenzhen 518060 , China*

( Received 4 December 2008 ; revised manuscript received 15 December 2008 )

### Abstract

The usual linear variable feedback control method is extended to the speed feedback approach in the study of controlling spatiotemporal chaos in the one-dimensional complex Ginzburg-Landau equation. The controllabilities in diverse systems with different sizes and target periodic states are investigated by theoretical analysis and numerical simulation.

**Keywords** : chaos control , spatiotemporal chaos , speed feedback , complex Ginzburg-Landau equation

**PACC** : 0545

<sup>\*</sup> Project supported by the National Natural Science Foundation of China ( Grant Nos. 10405018 ,70571053 ).

<sup>†</sup> E-mail : jhgao@szu.edu.cn