

主干道交通流的路口效应^{*}

郑容森[†] 吕集尔 朱留华 陈时东 庞寿全

(玉林师范学院物理与信息科学系, 玉林 537000)

(2008 年 7 月 8 日收到, 2008 年 12 月 22 日收到修改稿)

基于 Nagel-Schreckenberg 交通流模型的演化规则, 建立了路口等距分布的主干道交通流模型, 在开放性边界及路口以同步红绿灯控制的条件下对交通流进行了数值模拟. 分析结果发现: 主干道的通行能力由路口的通行能力决定; 低密度时, 流量与路口数目无关, 利用平均场方法, 可算出平均速度随绿灯周期变化的极值位置; 高密度时, 流量与路口数目有关, 通过调整交通灯周期, 可使主干道处于最佳交通状态.

关键词: 元胞自动机, 交通流, 数值模拟, 平均场理论

PACC: 0550

1. 引 言

路口是城市二维交通系统中的关键元素之一, 研究交通灯控制下的路口对城市交通流的作用规律, 对城市交通系统的规划、建设和管理有重要的意义. 近年来, 人们利用元胞自动机^[1] (cellular automaton, 简称 CA) 从不同的角度对交通流问题展开了研究, 已获得了许多成果^[2-17], 与路口相关的问题也得到了较多的关注. Ishibashi 和 Fukui 研究了路口的交通流相图^[2]; Huang 等^[3] 研究了主干道的交通灯延时对交通流的影响; 黄兵花等^[5] 在 BML 模型的基础上, 引入了车辆在路口转向的概率, 建立了一个主干道 CA 交通流模型, 模拟和分析了路口有红绿灯控制的主干道交通流的自组织现象; 在文献 [6-8] 中, 对主干道交通流分别进行了进一步的研究, 探讨了红绿灯周期、绿信比、车站位置设置、转向概率、路口距离和边界条件等因素对主干道交通流的速度和流量的影响; 而文献 9, 10 则研究了路口二维分布的城市交通网络中, 红绿灯对交通流的作用规律等. 本文利用 Nagel-Schreckenberg (NaSch) 模型^[11] 的演化规则建立了一个开放边界条件下的多交叉路口的城市主干道交通流模型, 通过计算机数值模拟, 分析和讨论了在同步交通信号灯控制下的主干道通行能力、路口数的变化和红绿灯周期对交

通流产生的效应等问题, 利用平均场方法对低密度情况下速度的极值点与红绿灯周期的关系进行了分析, 给出了解析结果, 所发现的规律可为主干道交通的建设、规划和管理提供参考.

2. 模型和演化规则

如图 1 所示, 系统由一条由西向东的主干道和若干条等距分布的南北向支道组成. 主干道长 L_e 为 2000 个格点, 支道长 L_s 为 500 个格点, 每格点长为 7.5 m, 各支道在其中点上与主干道垂直相交, 形成交叉路口. 主、支道上行驶的车辆最大速度为 $V_{\max} = 2$, 每一格点可由一辆速度为 $V = \{0, 1, 2\}$ 的车辆占据或为空; 路口格点不能同时由主、支道车辆占据; 各路口用同步交通灯控制: 交通灯周期为 $T = T_G + T_R$, T_G 和 T_R 分别对应主车道的绿灯和红灯周期, 支道则相反.

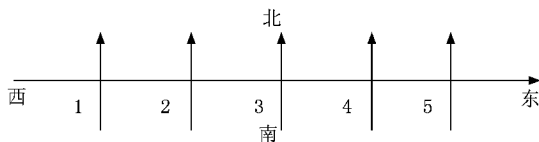


图 1 模型示意图

其红绿灯控制规则如下: 1) 在绿灯时步, 车辆的

^{*} 国家自然科学基金 (批准号: 10762005), 广西壮族自治区自然科学基金 (批准号: 桂科自 0991286) 和广西壮族自治区教育厅科研计划 (批准号: 200807LX401, 200607LX079) 资助的课题.

[†] E-mail: zrs117@126.com

直行不受影响,经过路口的车辆可按转向概率 P_T 转到另一方向的车道上,但最后一个绿灯时步设为警告时步,车辆可穿过路口前行或转向而不允许进占路口,在路口滞留的车辆要转向驶离路口.2)红灯时步,车辆不允许转向、穿过或进入路口.

主、支道上行驶的车辆,在时步 t 到 $t+1$ 过程中,除在经过路口时受红绿灯的控制外,按以下规则演化:

1)加速过程,

$$v_i^{(t+\frac{1}{3})} = \min(v_i^{(t)} + 1, V_{\max}).$$

2)减速过程,

$$v_i^{(t+\frac{2}{3})} = \min(v_i^{(t+\frac{1}{3})}, d_i^{(t)}).$$

3)随机慢化,

$$v_i^{(t+1)} = \max(v_i^{(t+\frac{2}{3})} - 1, 0).$$

随机慢化以概率 P 发生.

4)位置更新

$$X_i^{(t+1)} = X_i^{(t)} + v_i^{(t+1)}.$$

这里 $v_i^{(t)}$, $X_i^{(t)}$ 和 $d_i^{(t)} = X_{i+1}^{(t)} + X_i^{(t)} - 1$ 分别为 t 时步 i 车的速度、位置和与前面 $i+1$ 车的间距.

3. 数值模拟与结果讨论

主干道上的车辆密度 ρ 、平均速度 \bar{V} 和流量 J 定义如下:

$$\rho = \frac{N_e}{L_e},$$

$$\bar{V} = \frac{1}{N_e} \sum_{i=1}^{N_e} v_{ei}^{(t)},$$

$$J = \rho \bar{V},$$

其中 N_e 为 t 时刻东西向行驶车辆总数, $v_{ei}^{(t)}$ 为第 i 辆东西向行驶车辆的速度.

在模拟中,主、支道均采用开放边界条件,注入概率分别为 α 和 α_1 ,消失概率分别为 β 和 β_1 ;为突出路口数、红绿灯周期对交通流的效应,对部分参量的关系或取值作出规定: $\alpha = \alpha_1, \beta = \beta_1$,红灯周期等于绿灯周期($T_C = T_R, T = 2T_C$), $P_T = 0.2, P = 0.2$.模拟所得的数据中,每个样本均运行 10^5 时步,取后 6×10^4 时步的值作时间平均,为消除随机性影响,取 20 个样本作系综平均.

3.1. 主干道的通行能力

图 2 为 $\beta = \beta_1 = 1, T_C = 50, P = P_T = 0.2$ 时,不

同路口数的主干道流量与注入概率的关系图.由图 2 可见,在 $\alpha \leq \alpha_c$ (约为 0.26) 区间,流量仅随注入概率的变化而变化,与路口数无关.此时,主干道流量由入口的注入流量决定,即 $J = J_{in}$.在 $\alpha \geq \alpha_c$ 区间,当无路口存在时,得到的即为单车道情况下的结果;当存在路口时,流量保持一个恒定的最大值 Q .这表明,通过主干道路口的交通流量最大不能超过 Q .我们把 Q 称为主干道路口的通行能力,相应地, α_c 称为主干道路口的临界注入概率.显然,主干道的通行能力由主干道路口的通行能力决定,与路口数无关;当 $\alpha \geq \alpha_c$ 时,绿灯时步的流量 $J_C = 2Q$.

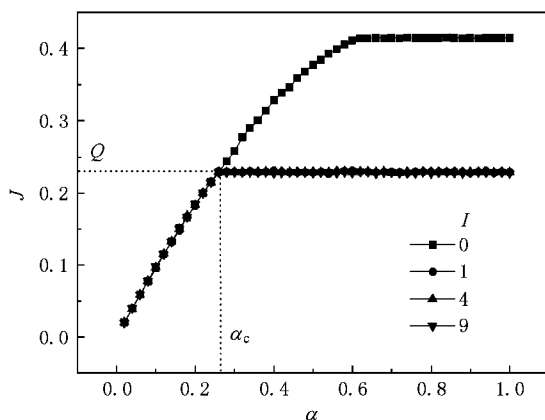


图 2 主干道流量与注入概率的关系 其中 I 为路口数, $\beta = \beta_1 = 1, P = P_T = 0.2, T_C = 50$

图 3 为主干道的时空斑图,黑点代表车辆,白点代表空格点.在同步交通灯的控制下,路口前后形成移动带和阻塞带,即形成所谓的“交通激波”.因为在第一个路口后的阻塞带延伸到主干道的入口处,所以车辆的注入受到了限制,表明在 $\alpha \geq \alpha_c$ 的情况下,流

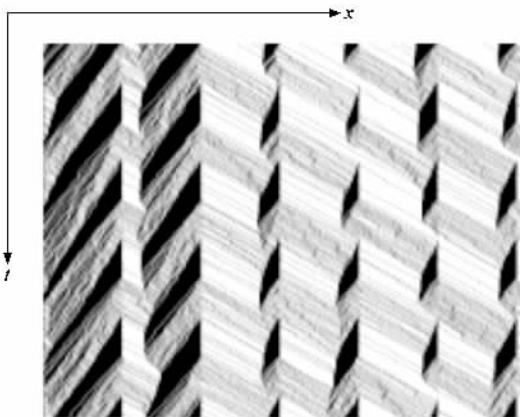


图 3 主干道时空斑图 $\alpha = \alpha_1 = 0.3, \beta = \beta_1 = 1, T_C = 50, P = P_T = 0.2$, 路口数 $I = 19, t = 40000-40610, x = 0-61$

量由第一个路口的通行能力决定,其他路口的存在不对流量产生影响,这与图2的结果相一致.

3.2. 低密度下路口数量对交通流的影响

图4为 $\alpha = 0.2, p = 0.2, P_T = 0.2, T_C = 50$ 时,主干道密度、速度和流量与消失概率的关系.由图4可见,密度、速度和流量在 $\beta = \beta_c$ 处出现相变现象, β_c 即为临界消失概率.当 $\beta < \beta_c$ 时,主干道处于高

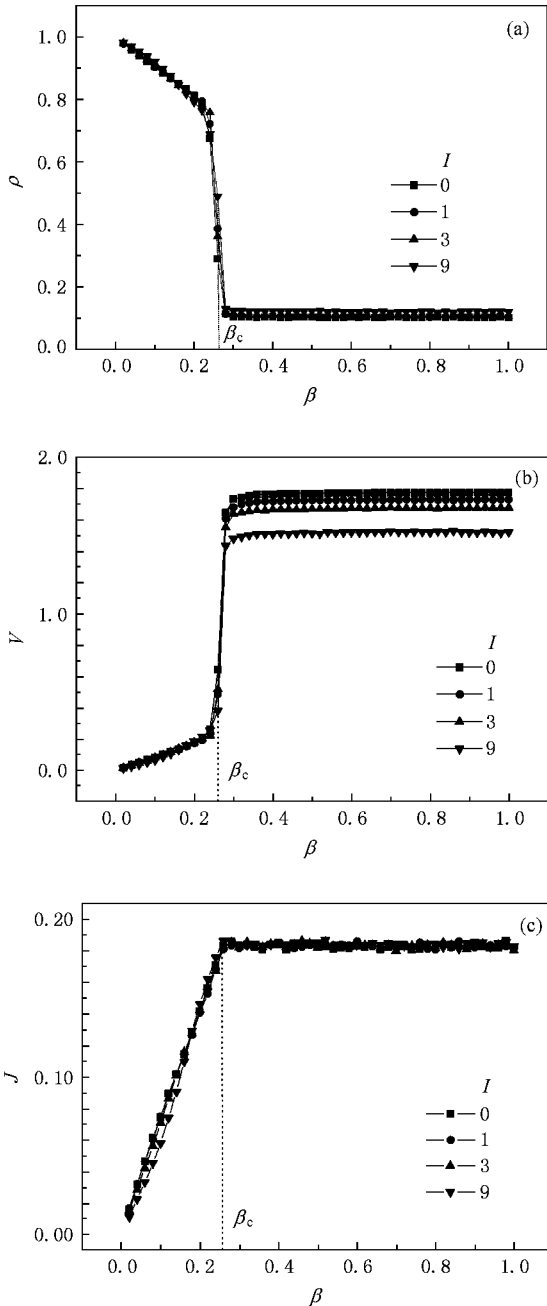


图4 主干道密度、速度和流量与注入概率的关系 $\alpha = 0.2, p = 0.2, P_T = 0.2, T_C = 50$. (a) 主干道密度与消失概率的关系 (b) 主干道速度与消失概率的关系 (c) 主干道流量与消失概率的关系

密度状态,速度很低,流量随 β 的增大呈线性增大.当 $\beta > \beta_c$ 时,主干道处于低密度高速度的畅通状态,密度、速度和流量均与 β 值无关;密度和速度与路口数有关,流量与路口数无关.

图5为 $p = 0.2, P_T = 0.2, T_C = 50, \beta = 1$ 时,低

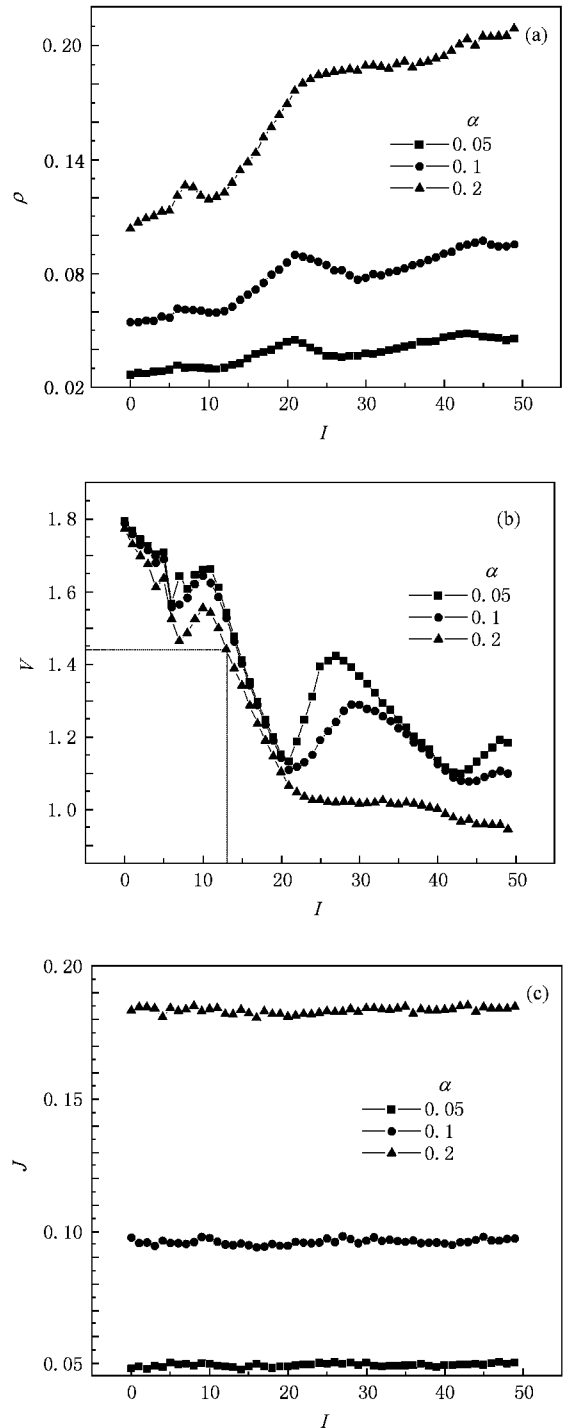


图5 主干道的密度、速度和流量与路口数的关系 $p = 0.2, P_T = 0.2, T_C = 50, \beta = 1$. (a) 密度与路口数的关系 (b) 速度与路口数的关系 (c) 流量与路口数的关系

密度情况下主干道密度、速度和流量与路口数的关系.由图 5 可见,密度和速度随路口数的变化情况相反,密度增大(减小)时,速度减小(增大),在相同的注入概率下,流量保持不变.这表明,在密度较低时路口数对主干道的交通流量没有影响.这是因为在注入概率小于临界注入概率 α_c 时,在主干道入口注入的流量小于主干道各路口的通行能力,不会因为路口的增加而降低流量,但由于路口的增加,使路口前的阻塞带数量随之增加,引起主干道的密度增大,速度也相应地随之降低.

从图 5(b) 可发现,在 $l \leq 13$ (即路口距离大于约 1072 m) 时,主干道的速度虽有波动但均大于 1.44,达到自由运动速度的 80% 以上,表明路口对主干道交通流的影响较小.这一结果对主干道的规划设计是有参考意义的.

3.3. 绿灯周期效应

3.3.1. 低车辆密度的情况

图 6 为 $p = 0.2, P_T = 0.2, T_G = 50, \beta = 1$ 时低车辆密度情况下,主干道的密度、速度和流量与绿灯周期的关系.由图 6 可见,随着绿灯周期的增加主干道交通流的密度波动性增大,速度波动性降低,流量基本保持不变.这表明,绿灯周期的增大会降低主干道交通流的速度,使交通状态变差.但从整体上看,存在一个区间(这里 $T_G \leq 72$) 速度约为自由运动速度的 80% 以上,交通灯对交通状态影响较少.对于速度的极小和极大值位置,可以用平均场方法估算得到.

当路口间距较大,满足关系 $T_G < \frac{D}{V_f}$ (其中 D 为相邻路口的间距, $V_f = V_{\max} - P$ 为车辆自由运动时的速度)时,相邻路口间会出现连续的多个交通波,每个交通波与一个红绿灯周期相对应.显然,第一个交通波的第一辆车近似处于自由运动状态,当其到达下一路口时,如果恰好遇上交通灯由绿转红,就会形成速度的极小值,其对应的绿灯周期为 T_{\min} .第一个绿灯周期开始时,在路口排队的第一辆车开始加速,加速到 V_{\max} 的时间为 $T_a = \frac{V_{\max}}{1 - P}$,加速期间通过的距离为 $\frac{T_a V_{\max}}{2}$,加速后在绿灯周期余下的时间里能通过的距离为 $(T_{\min} - T_a)V_f$,而后经 m 个交通灯周期到达下一路口,恰好遇上绿灯转为红灯.于是得到以下关系:

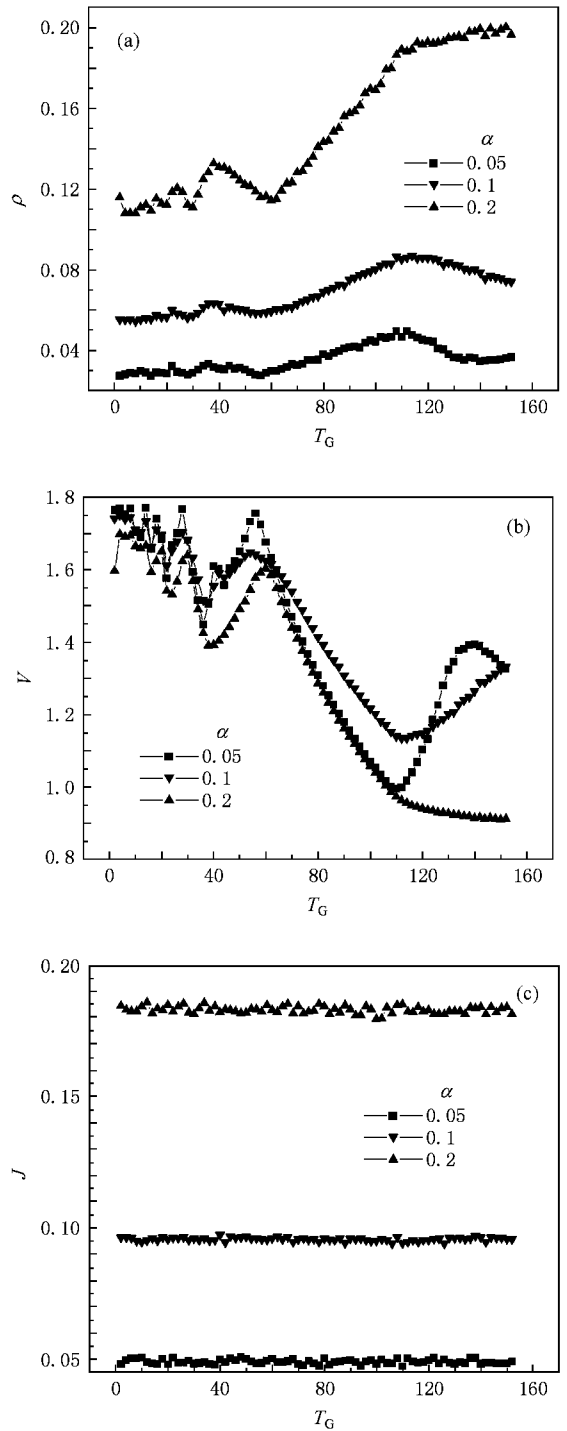


图 6 主干道的密度、速度和流量与绿灯周期关系 $p = 0.2, P_T = 0.2, I = 9, \beta = 1$. (a) 密度与绿灯周期的关系 (b) 速度与绿灯周期的关系 (c) 流量与绿灯周期的关系

$$T_a V_{\max} / 2 + (T_{\min} - T_a) V_f + 2m T_{\min} V_f = D, \quad \text{化简得}$$

$$T_{\min} = \frac{D - \frac{T_a V_{\max}}{2} + T_a V_f}{(2m + 1) V_f}. \quad (1)$$

从红灯转绿灯时步开始,路口后队列的最后一辆车要等待 $T_w = (N_w - 1)J_c = (N_w - 1)2Q$ 时间才开始运动(其中 N_w 为队列的车辆数),其加速到最大速度 V_{max} 需要的时间为 $T_a = \frac{V_{max}}{1-P}$, 加速过程经过的距离为 $\frac{T_a V_{max}}{2}$, 而后以自由运动速度运行. 所以从启动到到达下一路口所需时间为

$$T_1 = T_a + (D + L_w - T_a V_{max}/2)V_f,$$

其中 L_w 为车辆队列的长度, $L_w = N_w$. 如果这一辆车刚通过下一路口,交通灯也恰好由绿灯转红灯,主干道的平均速度将达到一个极大值,其对应的绿灯周期为 T_{max} . 在 $T_c < \frac{D}{V_f}$ 的情况下,由于路口距离较大,

车辆一般除了开始的一个绿灯周期外,还要经过 m 个交通灯周期后才能到达下一路口. 由此可得 $(2m + 1)T_{max} = T_1 + T_w$. 考虑到在绿灯周期内,后方车辆不断加入到路口后面等待的车辆队列的情况,容易算出队列的车辆数为 $N_w = \frac{2QT_{max}J}{2Q - J}$ 其中 J 为主干道的平均流量. 当 $J = Q$ 时, $N_w = 2T_{max}Q$, 可得

$$T_{max} = \frac{[T_a(2V_f - V_{max}) + 2D]Q - V_f}{4(mV_f - Q)Q}. \quad (2)$$

当 $J < Q$ 时,路口后排队车辆能在小于绿灯周期的时间内全部通过路口,而且紧跟在队列后的一些车辆也可以以自由运动速度跟随并通过路口. 因此,对以上推算要作相应的改变. 以紧跟队列的第一辆车作近似计算,其自由运动到下一路口的时间为

$$T_1 = (D + L_w)V_f,$$

由于没有等待起动的的时间,所以 $(2m + 1)T_{max} = T_1$. 综合起来得到

$$T_{max} = \frac{(2Q - J)D}{(2m + 1)(2Q - J)V_f - 2QJ}. \quad (3)$$

(1)–(3)式中,不同的 m 值对应不同的极大值位置.

由图 6(b)可见,在 $\alpha = 0.05$ 的情况下, $T_c = 56$ 的速度极大值接近自由运动速度,表明这时主干道上的车辆几乎全部处于自由运动状态. 由此可推断,第一路口后队列中的车辆从第一个绿灯周期启动后,在各个路口都遇上绿灯,因此整个车辆队列能经 m 个红绿灯周期的自由运动通过所有路口. 从(3)式看,因为 $I = 9$ 我们只要把 D 改为 $8D$, 取 $m = 7$, 即可算得 $T_{max} = 59$. 这与模拟结果基本相符,说明以上推断是正确的. 对于 $\alpha = 0.1$ 的情况, $T_c = 54$ 出现

的速度极大值与上述情况类似. 但由于密度增大,车辆已不能完全处于自由运动状态,速度极大值降低. 当注入概率更大(比如 $\alpha = 0.2$)时,车辆密度较大,不出现全程自由运动的情况,所以不会出现上述结果.

3.3.2. 高车辆密度的情况

由图 4 可见,临界消失概率要大于注入概率. 因此,当 $\beta < \alpha$ 时,道路处于高密度状态. 图 7 为 $p =$

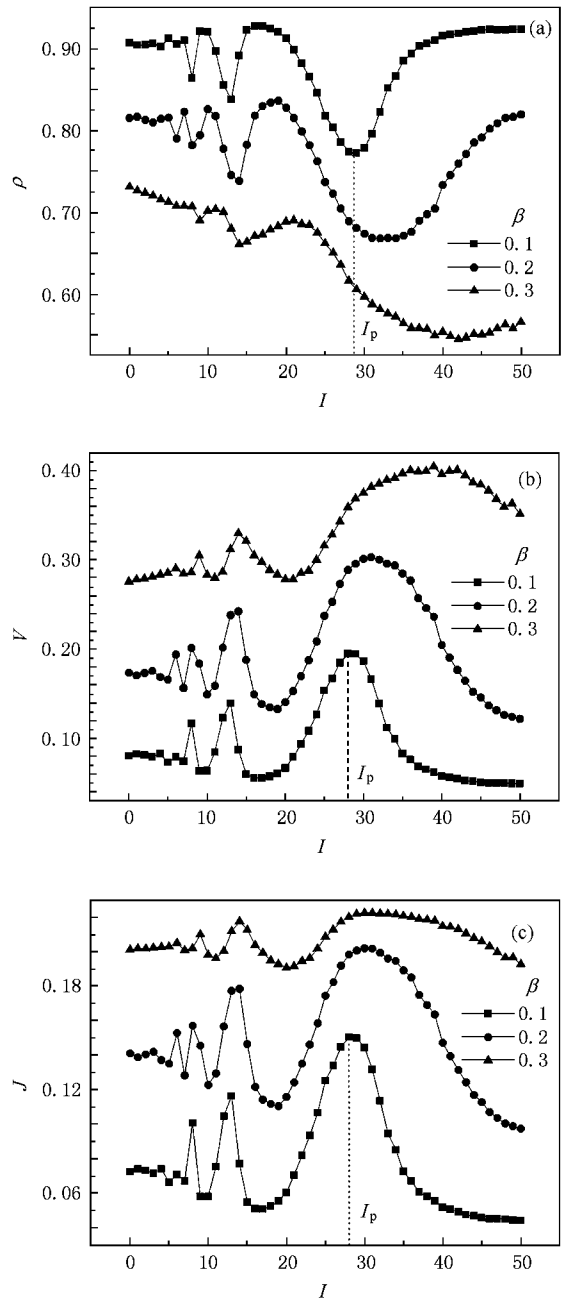


图 7 高密度状态下主干道密度、速度和流量与路口数的关系 $p = 0.2, P_T = 0.2, T_c = 50, \alpha = 0.8$. (a) 密度与路口数的关系, (b) 速度与路口数的关系 (c) 流量与路口数的关系

0.2, $P_T = 0.2$, $T_G = 50$, $\alpha = 0.8$ 时高密度状态下主干道密度、速度和流量与路口数的关系。可见密度、速度和流量随路口数的变化产生振动, 路口数越多振动的周期和幅度越大, 在 $I = I_p$ 处流量达到最大值; 当注入概率较小(如 $\alpha = 0.1$)时, 流量和速度同步达到最大, 而密度则为最小; 当注入概率较大(如 $\alpha = 0.2, 0.3$)时, 对应流量的最大值位置, 密度和速度也分别接近最小值和最大值。显然, 当流量为最大值时, 可以认为主干道处于最佳交通状态。模拟发现, 改变交通灯的周期, 最佳状态下的路口数 I_p 也相应发生变化。

图 8 为 $P = 0.2$, $P_T = 0.2$, $\alpha = 0.8$ 时高密度状

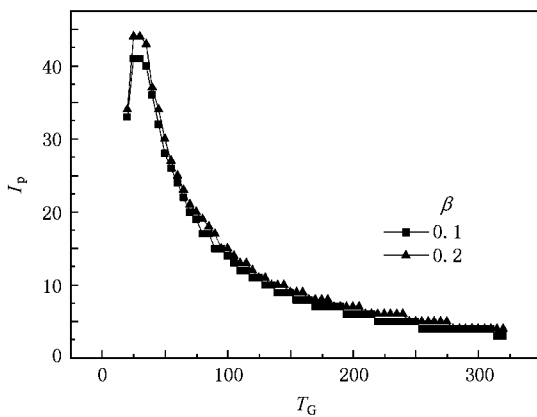


图 8 高密度状态下最佳交通状态的路口数与绿灯周期的关系

$P = 0.2, P_T = 0.2, \alpha = 0.8$

态下主干道最佳交通状态的路口数 I_p 与绿灯周期的关系。从图 8 可见, 除绿灯周期很短的一个小区间外, 路口数与绿灯周期的关系接近于指数变化。根据这一结果, 对于路口数一定的主干道, 可以通过改变同步交通灯的周期, 使道路处于最佳交通状态。这一结果对拥挤的城市主干道的交通管理具有积极的意义。

4. 结 论

本文引入 NaSch 模型的演化规则, 建立了一个路口在同步交通信号灯控制下的开放边界主干道交通流模型。通过数值模拟和结果分析, 发现路口对主干道交通流产生复杂的效应, 其中有以下几个主要的规律: (1) 主干道的车辆通行能力与路口数无关; (2) 在车辆密度较低的情况下, 路口数对主干道的交通流量没有影响; 车辆平均速度随交通信号灯周期的变化而波动, 用平均场方法可以估算出其极值位置; (3) 在高密度情况下, 主干道交通流的密度、速度和流量随路口数的变化而变化; 对路口数一定的主干道, 采用合适的交通灯周期, 可以使道路达到最佳交通状态。实际交通中的路口问题涉及更多的因素, 对主干道交通流的影响也更为复杂, 要进一步了解其内部规律, 需要进行更深入的研究。

- [1] Wolfram S 1983 *Rev. Mod. Phys.* **55** 601
- [2] Ishibashi Y, Fukui M 1996 *J. Phys. Soc. Jpn.* **65** 2793
- [3] Huang D W, Huang W N 2003 *Phys. Rev. E* **67** 56124
- [4] Biham O, Middleton A, Levine D 1992 *Phys. Rev. A* **46** R6124
- [5] Huang P H, Kong L J, Liu M R 2002 *Chin. Phys.* **11** 678
- [6] Tan H L, Huang P H, Li H B, Liu M R, Kong L J 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 1127 (in Chinese) [谭惠丽、黄兵花、李华兵、刘慕仁、孔令江 2003 物理学报 **52** 1127]
- [7] Peng L, Tan H L, Kong L J, Liu M R 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 3007 (in Chinese) [彭 麟、谭惠丽、孔令江、刘慕仁 2003 物理学报 **52** 3007]
- [8] Huang P H, Tan H L, Kong L J, Liu M R 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 3044 (in Chinese) [黄兵花、谭惠丽、孔令江、刘慕仁 2005 物理学报 **54** 3044]
- [9] Chowdhury D, Schadschneider A 1999 *Phys. Rev. E* **59** R1311
- [10] Brockfeld E, Barlovic R, Schadschneider A, Schreckenberg M 2001 *Phys. Rev. E* **64** 56132
- [11] Nagel K, Schreckenberg M 1992 *J. Phys. I France* **2** 2221
- [12] Hu S X, Gao K, Wang B H, Lu Y F 2008 *Chin. Phys.* **17** 1863
- [13] Tang T Q, Huang H J, Xu G, Xue Y 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 56 (in Chinese) [唐铁桥、黄海军、徐 刚、薛 郁 2008 物理学报 **57** 56]
- [14] Jiang R, Jin W L, Wu Q S 2008 *Chin. Phys.* **17** 829
- [15] Lei L, Dong L Y, Song T, Dai S Q 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 1711 (in Chinese) [雷 丽、董力耘、宋 涛、戴世强 2006 物理学报 **55** 1711]
- [16] Shang H Y, Huang H J, Gao Z Y 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 4342 (in Chinese) [尚华艳、黄海军、高自友 2007 物理学报 **56** 4342]
- [17] Tian L J, Liu T L, Huang H J 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 2122 (in Chinese) [田丽君、刘天亮、黄海军 2008 物理学报 **57** 2122]

Intersection effects of arterial road for traffic flow^{*}

Zheng Rong-Sen[†] Lü Ji-Er Zhu Liu-Hua Chen Shi-Dong Pang Shou-Quan

(*Department of Physics and Information Science, Yulin Normal College, Yulin 537000, China*)

(Received 8 July 2008 ; revised manuscript received 22 December 2008)

Abstract

Based on the Nagel-Schreckenberg model, a traffic model for an arterial road with equal-distance-distributed intersections is established. The traffic flow is numerically simulated under the open boundary condition and the control of red and green lights. It is found from the results that the capacity of the arterial road is determined by the capacity of the intersection. For small densities, the flow has no relation with the number of intersections. Moreover, the rule of variation of the maximum point of average velocity with the green-light period is obtained with the mean-field method. On the contrary, the number of intersections plays a crucial role in the flow at larger densities. The arterial road can achieve optimal traffic state via regulating the period of traffic lights.

Keywords : cellular automaton, traffic flow, numerical simulation, theory of mean-field

PACC : 0550

^{*} Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 10762005) and the Natural Science Foundation of Guangxi Zhuang Autonomous Region, China (Grant No. GKZ0991286) and the Scientific Research Program of the Department of Education of Guangxi Zhuang Autonomous Region, China (Grant Nos. 200807LX401, 200607LX079).

[†] E-mail : zrs117@126.com