

精确计算非旋波近似下二能级系统的 能谱和动力学性质*

任学藻† 姜道来 丛红璐 廖 旭

(西南科技大学理学院, 绵阳 621010)

(2008 年 11 月 22 日收到, 2008 年 12 月 22 日收到修改稿)

利用相干态正交化展开法, 精确求解了非旋波近似下 Jaynes-Cummings 模型的能谱和动力学性质. 与近似下解析解比较发现, 在弱耦合和强耦合区近似解析解与数值精确解符合很好, 但在中间耦合区符合较差.

关键词: 相干态正交化展开, 非旋波近似, Jaynes-Cummings 模型

PACC: 4250

1. 引 言

在量子光学和激光领域中, Jaynes-Cummings (JC) 模型^[1]是描述原子与辐射场相互作用的最简单和最典型的模型. 长期以来, 旋波近似因为有解析解而被广泛地使用, 并且在实验上原子与光场之间的耦合强度 λ 与光场频率 ω_0 相比非常小 (λ/ω_0 约为 10^{-7} — 10^{-6})^[2,3], 因此旋波近似非常有效. 近年来, 人们发现量子固态装置提供了一种代替传统原子-腔模式的方法, 所提供的光谱分析清晰表明, Josephson 电荷量子比特、库珀对腔及离子阱与在腔中的原子非常的相似^[4], 但耦合强度比原子系统获得的强度大 3 4 个数量级 (λ/ω_0 约为 10^{-3}). 在这种情况下旋波近似不再有效, 必须考虑非旋波项的作用. 实际上在整个光与原子相互作用系统中, 除了有旋波项跃迁产生的长寿命实光子, 还有许多快速产生而又快速吸收的虚光子. 因为虚光子对光与原子相互作用系统具有影响, 比如系统的能谱和动力学演化行为, 故研究非旋波近似下 JC 模型的严格求解具有一定的理论意义和实际意义.

用相干态展开方法研究经激光照射一个被囚禁的超冷离子的离子阱系统, 当系统处在强耦合区时, JC 模型非旋波近似与旋波近似的结果非常不同^[5-9]. 由于非旋波近似下模型不能解析求解, 我们

通过相干态正交化展开方法可以精确求解出 JC 模型能谱、波函数和下能级占有率的动力学演化行为.

2. 模型及严格解

JC 模型的哈密顿量^[10]

$$H = \frac{\Omega}{2} \sigma_x + \lambda (a + a^\dagger) \sigma_z + \omega_0 a^\dagger a, \quad (1)$$

式中 Ω 是二能级间隔, σ_x, σ_z 是泡利算符, $a (a^\dagger)$ 是频率为 ω_0 的腔场湮没 (产生) 算符, λ 代表腔场与原子的耦合常数. 为方便起见, 这里的 $\hbar = 1$. 令其定态波函数的形式为

$$|\cdot\rangle = |\varphi_1\rangle |e\rangle + |\varphi_2\rangle |g\rangle, \quad (2)$$

式中 $|\varphi_1\rangle$ 代表处于原子激发态 $|e\rangle$ 上光场的波函数, $|\varphi_2\rangle$ 代表处于原子基态 $|g\rangle$ 上光场的波函数. 把 (1) 和 (2) 式代入定态薛定谔方程

$$H|\cdot\rangle = E|\cdot\rangle. \quad (3)$$

利用 $|e\rangle, |g\rangle$ 的正交性得

$$\begin{aligned} \omega_0 a^\dagger a |\varphi_1\rangle + \lambda (a^\dagger + a) |\varphi_1\rangle + \frac{\Omega}{2} |\varphi_2\rangle \\ = E |\varphi_1\rangle, \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \omega_0 a^\dagger a |\varphi_2\rangle - \lambda (a^\dagger + a) |\varphi_2\rangle + \frac{\Omega}{2} |\varphi_1\rangle \\ = E |\varphi_2\rangle. \end{aligned} \quad (5)$$

引入新的玻色算符^[7]

* 四川省自然科学基金 (批准号 2006C028) 资助的课题.

† E-mail: rxz63@sohu.com

$$\begin{aligned} A &= a + \lambda/\omega_0, \\ A^+ &= a^+ + \lambda/\omega_0, \\ B &= a - \lambda/\omega_0, \\ B^+ &= a^+ - \lambda/\omega_0, \end{aligned}$$

则(4)和(5)式可以改写为

$$\omega_0 \left(A^+ A - \frac{\lambda^2}{\omega_0^2} \right) |\varphi_1\rangle + \frac{\Omega}{2} |\varphi_2\rangle = E |\varphi_1\rangle, \quad (6)$$

$$\omega_0 \left(B^+ B - \frac{\lambda^2}{\omega_0^2} \right) |\varphi_2\rangle + \frac{\Omega}{2} |\varphi_1\rangle = E |\varphi_2\rangle. \quad (7)$$

令

$$|\varphi_1\rangle = \sum_{n=0}^N c_n |n_A\rangle, \quad (8)$$

$$|\varphi_2\rangle = \sum_{n=0}^N d_n |n_B\rangle.$$

式中 $|n_A\rangle, |n_B\rangle$ 分别是 A 空间和 B 空间的 Fock 态, 或称为平移 Fock 态 (displaced Fock state)^[10]. 它满足正交归一性 因此由 $|n_A\rangle$ 和 $|n_B\rangle$ 构成了两组新的完备归一基 在(8)式中将上下能级的波函数按相干态正交化展开 只要在计算中将 n 取到足够大 (n 的取值依赖于耦合强度 λ) 展开系数 c_n 和 d_n 会变得很小 因此用(8)式表示的波函数计算能谱和占有率随时间的演化是非常精确的. $|n_A\rangle$ 和 $|n_B\rangle$ 的定义如下:

$$|n_A\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} (A^+)^n |0_A\rangle, \quad (9)$$

$$|0_A\rangle = e^{-\frac{\lambda}{\omega_0} a^+ - \frac{\lambda^2}{2\omega_0^2}} |0\rangle.$$

$$|n_B\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} (B^+)^n |0_B\rangle, \quad (10)$$

$$|0_B\rangle = e^{\frac{\lambda}{\omega_0} a^+ - \frac{\lambda^2}{2\omega_0^2}} |0\rangle.$$

将(8)–(10)式代入(6)和(7)式得

$$\begin{aligned} &\omega_0 \left(A^+ A - \frac{\lambda^2}{\omega_0^2} \right) \sum_{n=0}^N c_n |n_A\rangle + \frac{\Omega}{2} \sum_{n=0}^N d_n |n_B\rangle \\ &= E \sum_{n=0}^N c_n |n_A\rangle, \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} &\omega_0 \left(B^+ B - \frac{\lambda^2}{\omega_0^2} \right) \sum_{n=0}^N d_n |n_B\rangle + \frac{\Omega}{2} \sum_{n=0}^N c_n |n_A\rangle \\ &= E \sum_{n=0}^N d_n |n_B\rangle. \end{aligned} \quad (12)$$

因为 $A^+ A |n_A\rangle = n |n_A\rangle, B^+ B |n_B\rangle = n |n_B\rangle$, 所以将(11)式左乘 ${}_A \langle m|$, (12)式左乘 ${}_B \langle m|$ 得

$$\omega_0 \left(m - \frac{\lambda^2}{\omega_0^2} \right) c_m + \frac{\Omega}{2} \sum_{n=0}^N d_n {}_A \langle m|n\rangle = E c_m \quad (13)$$

$$\omega_0 \left(m - \frac{\lambda^2}{\omega_0^2} \right) d_m + \frac{\Omega}{2} \sum_{n=0}^N c_n {}_B \langle m|n\rangle = E d_m \quad (14)$$

式中

$${}_A \langle m|n\rangle = (-1)^n D_{mn} \left(\frac{2\lambda}{\omega_0} \right),$$

$${}_B \langle m|n\rangle = (-1)^m D_{mn} \left(\frac{2\lambda}{\omega_0} \right). \quad (15)$$

经简单变换后

$$D_{mn}(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} \sum_{r=0}^{\min[m,n]} \frac{(-1)^r \sqrt{m!n!} x^{m+n-2r}}{(m-r)!(n-r)!r!},$$

可写成缔合拉盖尔多项式.

$$\begin{aligned} D_{mn}(x) &= (-1)^m e^{-\frac{x^2}{2}} x^{m-n} \sqrt{n!m!} L_n^{m-n}(x^2) \\ &\quad (m \geq n), \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} D_{mn}(x) &= (-1)^n e^{-\frac{x^2}{2}} x^{n-m} \sqrt{m!n!} L_m^{n-m}(x^2) \\ &\quad (n \geq m). \end{aligned} \quad (17)$$

将(15)式代入(13)和(14)式 解 $2N+2$ 个本征方程 ($m, n = 0, \dots, N$), 可求出能谱 $E^{(i)}$ 、波函数 $\{c_n^{(i)}\}$ 和 $\{d_n^{(i)}\}$. 这样就得到了该系统的能量本征值和对应的本征波函数.

下面研究系统的动力学演化行为, 假定初态 ($t=0$) 腔场是 B 空间的相干态^[10], 原子处于下能级, 即

$$\begin{aligned} |t=0\rangle &= e^{-\frac{\alpha^2}{2}} \sum_n \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n_B\rangle |g\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{2N+2} f_i \left(\sum_{n=0}^N c_n^{(i)} |n_A\rangle |e\rangle \right. \\ &\quad \left. + \sum_{n=0}^N d_n^{(i)} |n_B\rangle |g\rangle \right). \end{aligned} \quad (18)$$

这里 α 是相干态的幅值, 光子数的平均值 $\bar{n} = n = \alpha^2$, f_i 是与初始条件相关的待定系数.

将(18)式左乘 ${}_B \langle m|$ 得

$$\sum_{i=1}^{2N+2} c_m^{(i)} f_i = 0, \quad (19)$$

$$\sum_{i=1}^{2N+2} d_m^{(i)} f_i = \frac{1}{\sqrt{m!}} e^{-\frac{\alpha^2}{2}} \alpha^m. \quad (20)$$

联立(19)和(20)式求解 $\{f_i\}$ 的非齐次线性方程组得 $\{f_i\} (i = 1, \dots, 2N+2)$ 这样就得到了 $t=0$ 时刻波函数的具体形式. 任意时刻电子处于下能级的波函数为

$$|t\rangle = \sum_{i=1}^{2N+2} f_i e^{-iE_i t} \sum_{n=0}^N d_n^{(i)} |n_B\rangle |g\rangle, \quad (21)$$

电子处在下能级的概率为

$$P_{\text{Exact}} = \sum_{i,j=1}^{2N+2} f_i^* f_j e^{(E_i - E_j)t} \left[\sum_{m=0}^N d_m^{(i)*} d_m^{(j)} \right]. \quad (22)$$

3. 模型的近似解析解

上面的讨论给出了可以精确求解从弱耦合到强耦合、从小失谐到大失谐普遍情况下 JC 模型的能谱和动力学演化行为. 下面讨论在 $\Omega/\omega_0 \ll 1$ 情况下^[10]系统的近似解析解.

将方程组 (6) 和 (7) 式的解作近似, 并令

$$\begin{aligned} |\varphi_1\rangle &= c_m |m_A\rangle, \\ |\varphi_2\rangle &= d_m |m_B\rangle. \end{aligned} \quad (23)$$

(23) 式与 (8) 式不同的是不考虑不同“平移 Fock 态”叠加项的贡献. 将 (23) 式代入 (6) 和 (7) 式, 得到

$$\omega_0 \left(m - \frac{\lambda^2}{\omega_0^2} \right) c_m + \frac{\Omega}{2} d_m |m_A\rangle |m_B\rangle = E c_m \quad (24)$$

$$\omega_0 \left(m - \frac{\lambda^2}{\omega_0^2} \right) d_m + \frac{\Omega}{2} c_m |m_B\rangle |m_A\rangle = E d_m \quad (25)$$

其中

$${}_B m |m_A\rangle = {}_A m |m_B\rangle. \quad (26)$$

将 (24) 与 (25) 式相加减, 可得在此近似下能量本征值的解析解

$$E_{\pm, m} / \Omega = \left(m - \frac{\lambda^2}{\omega_0^2} \right) \omega_0 / \Omega \pm \frac{1}{2} {}_A m |m_B\rangle \quad (27)$$

$$c_m^{(\pm)} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad (28)$$

$$d_m^{(\pm)} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

对应的本征波函数为

$$|\psi_{\pm, m}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|e\rangle |m_A \pm\rangle |g\rangle |m_B\rangle). \quad (29)$$

下面研究其演化行为, 同样考虑初态为原子处于下能级, 腔场处于 B 空间的相干态. 将初态按能量本征态展开,

$$\begin{aligned} |t=0\rangle &= e^{-\frac{\alpha^2}{2}} \sum_n \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n_B\rangle |g\rangle \\ &= \sum_{m=1}^{N+1} f_m^{(+)} |\psi_{+, m}\rangle + \sum_{m=1}^{N+1} f_m^{(-)} |\psi_{-, m}\rangle \\ &= \sum_{m=1}^{N+1} f_m^{(+)} \frac{1}{\sqrt{2}} (|e\rangle |m_A\rangle + |g\rangle |m_B\rangle) \\ &\quad + \sum_{m=1}^{N+1} f_m^{(-)} \frac{1}{\sqrt{2}} (|e\rangle |m_A\rangle - |g\rangle |m_B\rangle) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{m=1}^{N+1} (f_m^{(+)} + f_m^{(-)}) |m_A\rangle |e\rangle \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{m=1}^{N+1} (f_m^{(+)} - f_m^{(-)}) |m_B\rangle |g\rangle. \end{aligned} \quad (30)$$

对比 (30) 式等号两端得到

$$f_m^{(+)} + f_m^{(-)} = 0, \quad (31)$$

$$f_m^{(+)} - f_m^{(-)} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{m!}} e^{-\frac{\alpha^2}{2}} \alpha^m. \quad (32)$$

解之得

$$\begin{aligned} f_m^{(+)} &= \frac{1}{\sqrt{2(m!)}} e^{-\frac{\alpha^2}{2}} \alpha^m, \\ f_m^{(-)} &= \frac{-1}{\sqrt{2(m!)}} e^{-\frac{\alpha^2}{2}} \alpha^m. \end{aligned} \quad (33)$$

任意时刻的波函数为

$$\begin{aligned} |t\rangle &= e^{-iHt} |t=0\rangle \\ &= e^{-iHt} \left[\sum_{m=1}^{N+1} f_m^{(+)} \frac{1}{\sqrt{2}} (|e\rangle |m_A\rangle + |g\rangle |m_B\rangle) + \sum_{m=1}^{N+1} f_m^{(-)} \frac{1}{\sqrt{2}} (|e\rangle |m_A\rangle - |g\rangle |m_B\rangle) \right] \\ &= \sum_{m=1}^{N+1} f_m^{(+)} e^{-iE_{+, m} t} \frac{1}{\sqrt{2}} (|e\rangle |m_A\rangle + |g\rangle |m_B\rangle) + \sum_{m=1}^{N+1} f_m^{(-)} e^{-iE_{-, m} t} \frac{1}{\sqrt{2}} (|e\rangle |m_A\rangle - |g\rangle |m_B\rangle) \\ &= \frac{e^{-\frac{\alpha^2}{2}}}{2} \left[\sum_{m=1}^{N+1} \frac{1}{\sqrt{(m!)}} \alpha^m (e^{-iE_{+, m} t} - e^{-iE_{-, m} t}) |e\rangle |m_A\rangle \right. \\ &\quad \left. + \sum_{m=1}^{N+1} \frac{1}{\sqrt{(m!)}} \alpha^m (e^{-iE_{+, m} t} + e^{-iE_{-, m} t}) |g\rangle |m_B\rangle \right]. \end{aligned} \quad (34)$$

因此, 电子处在下能级的概率 P 的解析表达式为

$$P = \sum_{m=0}^N \frac{1}{4(m!)^2} e^{-\alpha^2} \alpha^{2m} (2 + 2\cos(E_{+, m} - E_{-, m})t)$$

$$= \sum_{m=0}^N \frac{1}{m!} e^{-\alpha^2} \alpha^{2m} \cos^2(\Omega^{(m)} t / 2), \quad (35)$$

式中

$$\Omega^{(m)} = \Omega_B |m\rangle |m_A\rangle$$

$$= (-1)^m \Omega e^{-2\lambda^2/\omega_0} L_m[(2\lambda/\omega_0)^2]. \quad (36)$$

4. 结果与讨论

图 1, 图 2 和图 3 给出了定态时, 当参数 Ω/ω_0 为 $1/3, 1, 3$ 时的能谱与耦合强度的关系. 由此可以看到, 当 $\Omega/\omega_0 = 1/3$ 时, 近似解析解 (27) 式与方程 (6) 和 (7) 的数值精确解完全符合. 随着 Ω/ω_0 增大, 近似解析解与数值精确解在中间耦合区的符合程度逐渐变差, 但在弱耦合和强耦合区依然符合很好. 在弱耦合区 $x = \lambda/\omega_0 \rightarrow 0$, 由 (16) 式可知, 当 $m \neq n$ 时 $D_{mn}(x) \approx 0$, 因此在数值精确计算中矩阵的非对角元可略去不计, 这恰好与近似解析解 (27) 式只考虑对角元相一致. 在强耦合区, $x = \lambda/\omega_0$ 很大. 由 (16) 式可知, 由于 $e^{-x^2} \rightarrow 0$, 所以 $D_{mn}(x) \approx 0$, 由 (27) 式可知, 这时 $E_{\pm, m}/\Omega \approx \left(m - \frac{\lambda^2}{\omega_0^2}\right) \omega_0/\Omega$, 而第二项 $\frac{1}{2} \frac{m}{A} |m|_B \approx 0$. 因此, 在强耦合区近似解析解与数值精确解符合很好, 其能量与耦合强度呈抛物线下降关系.

子振动, 而旋波近似则是完全塌缩.

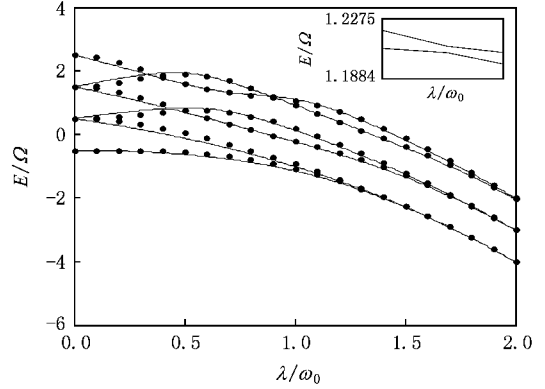


图 2 $\Omega/\omega_0 = 1$ 近似解析解 (点线) 与精确解 (实线) 的能谱, 内插图为看似交叉点附近的放大

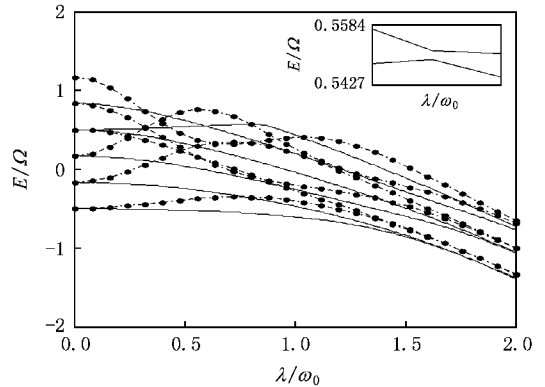


图 3 $\Omega/\omega_0 = 3$ 近似解析解 (点线) 与精确解 (实线) 的能谱, 内插图为看似交叉点附近的放大

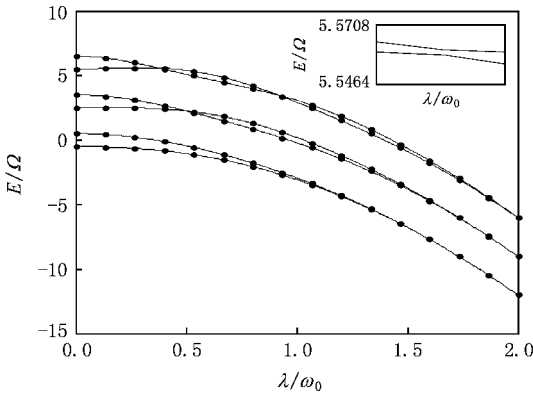


图 1 $\Omega/\omega_0 = 1/3$ 近似解析解 (点线) 与精确解 (实线) 的能谱, 内插图为看似交叉点附近的放大

从图 1—图 3 中还可以看出, 精确解给出的能谱是免交叉的, 而近似解的能谱是交叉的, 这与文献 [10] 相符. 图 4—图 6 给出二能级系统在 $\Omega/\omega_0 = 0.1$, 平均光子数为 $n = 10$ 时的下能级演化行为. 在强耦合区和弱耦合区, 近似解析解 (35) 式与数值精确解 (22) 式符合很好, 在中间耦合区符合较差. 精确解在塌缩阶段不会全部塌缩, 还会有振幅较大的高频量子振动. 但近似解析解只有振幅非常小的量

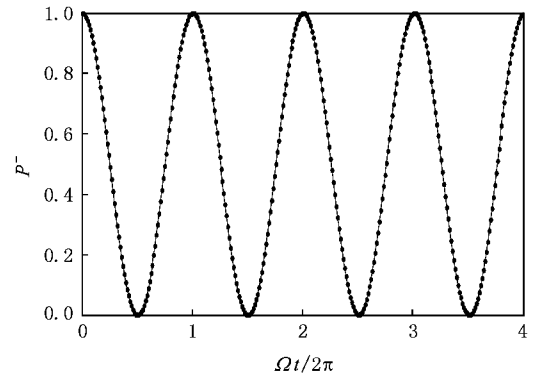


图 4 $\lambda/\omega_0 = 0.01$ 近似解析解 (点线) 与精确解 (实线) 的下能级占有率 $\Omega/\omega_0 = 0.1, n = 10$

无论是从系统处于定态时的能谱, 还是从占有率随时间的演化情形, 都说明了近似解析解成立的条件是在强耦合区和弱耦合区.

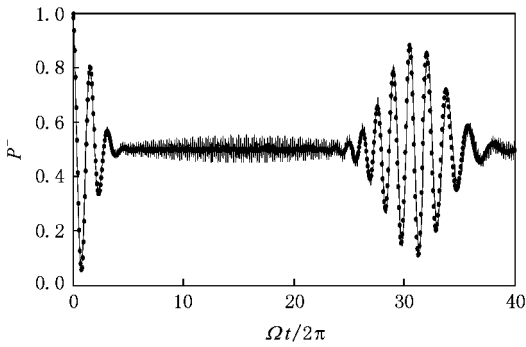


图 5 $\lambda/\omega_0 = 0.1$ 近似解析解(点线)与精确解(实线)的下能级占有率 $\Omega/\omega_0 = 0.1, n = 10$

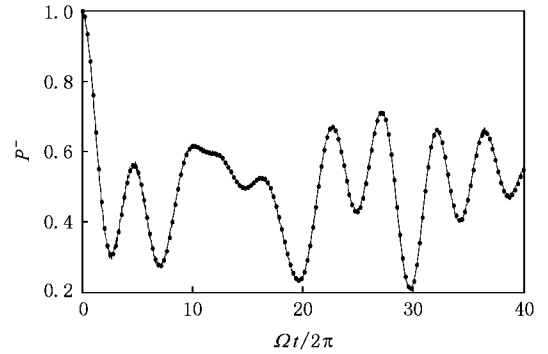


图 6 $\lambda/\omega_0 = 1$ 近似解析解(点线)与精确解(实线)的下能级占有率 $\Omega/\omega_0 = 0.1, n = 10$

5. 结 论

运用相干态正交化展开方法,精确计算了非旋

波 JC 模型的能谱和原子处于下能级占有率随时间的演化关系,并且给出在 $\Omega/\omega_0 \ll 1$ 时的近似解析解.通过比较发现,近似解析解只有在强耦合区和弱耦合区才能给出与数值精确解一致的结果.

- [1] Jaynes E T , Cummings F W , 1963 *Proc. IEEE* **51** 89
- [2] Raimond J M , Brune M , Haroche S 2001 *Rev. Mod. Phys.* **73** 565
- [3] Hood C J , Lynn T W , Doherty A C , Parkins A S , Kimble H J 2000 *Science* **287** 1447
- [4] Wallraff A , Schuster D I , Blais A , Frunzio L , Huang R S , Majer J , Kumar S , Girvin S M , Schoelkopf R J 2004 *Nature* **431** 162
- [5] Liu T , Wang K L , Feng M 2007 *J. Phys. B* **40** 1967

- [6] Liu T , Fan Y X , Huang S W , Wang K L , Wang Y 2007 *Commun. Theor. Phys.* **47** 791
- [7] Liu T , Feng M , Wang K L 2007 *Commun. Theor. Phys.* **47** 561
- [8] Fan Y X , Liu T , Feng M , Wang K L 2007 *Commun. Theor. Phys.* **47** 781
- [9] Zhang Z J , Wang K L , Qin G 2005 *Chin. Phys.* **14** 1317
- [10] Irish E K , Gea-Banacloche J , Martin I , Schwab K C 2006 *Phys. Rev. B* **72** 195410

Exact calculations of the energy spectra and the dynamical properties of a two-level system^{*}

Ren Xue-Zao[†] Jiang Dao-Lai Cong Hong-Lu Liao Xu

(*College of Science , Southwest University of Science and Technology , Mianyang 621010 , China*)

(Received 22 November 2008 ; revised manuscript received 22 December 2008)

Abstract

Applying the method of coherent-state orthogonalization expansion ,the energy spectra and the dynamical properties of the Jaynes-Cummings model with non-rotating wave approximation are calculated exactly. By comparison with the approximate analytical solutions , it is found that the approximate analytical solutions agree with our numerical exact solutions well both in weak coupling regime and in strong coupling regime , but not so well in intermediate strength coupling regime .

Keywords : coherent-state orthogonalization expansion , non-rotating wave approximation , Jaynes-Cummings model

PACC : 4250

^{*} Project supported by the Natural Science Foundation of Sichuan Province , China (Grant No.2006C028).

[†] E-mail : rxz63@sohu.com.