

# 计算二维声腔传递矩阵的正方形线声源模型<sup>\*</sup>

林 力<sup>1)</sup> 李 云<sup>1)†</sup> 顾兆林<sup>2)</sup> 刘兆杰<sup>3)</sup> 程光旭<sup>1)</sup>

1) 西安交通大学能源与动力工程学院, 西安 710049)

2) 西安交通大学人居环境与建筑工程学院, 西安 710049)

3) 香港理工大学屋宇设备工程学系, 香港九龙)

(2008 年 11 月 26 日收到, 2008 年 12 月 19 日收到修改稿)

在比较现有二维矩形声腔的声源计算模型特点的基础上, 提出了一种新的正方形线声源计算模型, 用于计算基于模态级数叠加法的压力响应函数. 分析表明, 此模型不仅可以克服点声源模型的奇异性, 而且在合理选择模型的几何尺寸的前提下能得到比面源模型更为均匀的压力分布, 提高了传递函数计算的准确率. 数值试验考察了此模型的实际应用效果, 表明新的线声源数学模型较圆形线声源更为简便, 可以提高计算效率.

关键词: 传递矩阵, 正方形线声源模型, 二维声腔, 模态级数叠加法

PACC: 4320, 0340K, 0270

## 1. 引 言

压缩机吸排气过程产生的压力脉动不仅影响压缩机的热力性能, 而且会诱发管路振动产生噪声<sup>[1]</sup>. 阻性消声器虽然具有良好的消声性能<sup>[2-4]</sup>, 但是由于压缩机工作过程中混在气体内的油滴会阻塞阻性消声器的微开孔或者覆盖在黏弹性层上, 使消声材料失效. 因此, 抗性消声器被更为广泛地应用于减弱压缩机的压力脉动. 为了计算消声器的进出口参数, 传统的方法是采用一维集总参数模型. 这种方法假设压力脉动在消声器中只是以平面波的形式传播, 忽略了管内高次波的存在, 因此这种一维的处理方法仅适用于声学系统的特征尺度远远小于最高频压力脉动波长的情况<sup>[5]</sup>. Lai 和 Soedel<sup>[6]</sup>利用点声源的性质和模态级数叠加法求解了二维声腔的压力响应函数并建立了计算传递函数模型, 他们运用这种模型得到了不同正交曲面坐标系下二维声腔的传递函数. 但是 Zhou 和 Kim 的研究<sup>[7]</sup>发现, Lai 和 Soedel<sup>[6]</sup>采用的点声源模型在源点处压力响应函数的计算结果会产生奇异性, 因此运用点声源计算得到的声腔传递函数是不准确的. 为了克服点声源模型的奇异性, Zhou 和 Kim<sup>[7]</sup>提出了代替点声源的面声源模型, 通过对面声源压力响应求平均值可以近似代替源点

的压力响应. 这种模型虽然解决了压力函数的发散问题, 但是由于其声源表面的压力不均匀度很大, 因此面声源上压力响应函数的平均值并不能准确代替源点的压力响应值. 最近, Huang 和 Jiang<sup>[8]</sup>提出了一种线声源模型用于分析二维声腔的传递函数. 这种模型虽然较好地克服了点声源的奇异性, 但是面声源模型的不均匀性, 但是由于使用这种声源模型在求解压力响应函数的过程中需要运用数值积分, 因此较前两种方法会增加更多的计算量. 由此可见, 为了保证声腔压力响应函数计算结果的准确性和提高计算效率, 需要合理地建立声源计算模型.

本文将在比较现有的声源计算模型的基础上, 综合考虑各种模型的优缺点, 提出一种新的正方形线声源模型, 并将此模型应用于二维矩形声腔的计算.

## 2. 声源数学模型

运用传递函数法可以得到声学系统进出口参数变化的规律. 对于图 1 所示的二维矩形声腔, 其传递矩阵可以表示为<sup>[9]</sup>

$$\begin{pmatrix} Q_1 \\ P_1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{pmatrix} Q_2 \\ P_2 \end{pmatrix}, \quad (1)$$

式中下标 1, 2 分别表示进口和出口,  $Q$  和  $P$  分别为

<sup>\*</sup> 香港理工大学与内地、台湾、澳门高校联合培养博士生基金(批准号: A-PB0Q)和西安交通大学“211”工程三期项目资助的课题.

<sup>†</sup> 通讯联系人. E-mail: yunli@mail.xjtu.edu.cn

频域容积流率和声压的谐振幅,  $A, B, C, D$  为传递矩阵的四极参数, 定义为

$$\begin{aligned} A &= \frac{f_{22}}{f_{21}}, \\ B &= \frac{1}{f_{21}}, \\ C &= -f_{12} + \frac{f_{11}}{f_{12}}f_{22}, \\ D &= \frac{f_{11}}{f_{12}}, \end{aligned} \quad (2)$$

其中  $f_{ij}$  表示系统在  $j$  点受到单位容积流率的激励同时阻塞另外一点 ( $i$  点) 的压力响应函数。

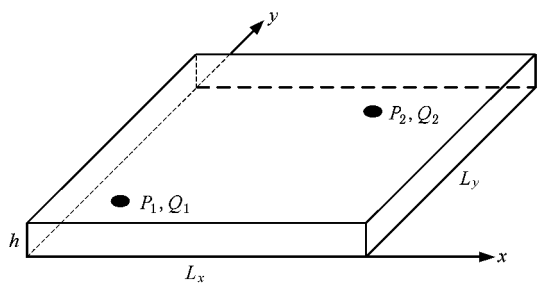


图1 二维矩形声腔模型示意图

为了计算声腔的传递矩阵, 首先需要计算压力响应函数  $f_{ij}$ 。应用模态级数叠加法求解线性波动方程可以得到压力响应函数。对于二维声腔, 带有声源的波动方程可以表示为

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = - \frac{\partial \dot{m}}{\partial t}, \quad (3)$$

式中  $p$  为时域声压,  $c$  为声速,  $\dot{m}$  为质量流率。

### 2.1. 点声源模型

文献 6 的点声源模型中, 质量流率可以表示为

$$\dot{m} = \frac{\rho Q}{h} \delta(x - x_1) \delta(y - y_1) e^{j\omega t}, \quad (4)$$

式中  $\rho$  为密度,  $\delta(\cdot)$  为狄拉克函数,  $(x_1, y_1)$  为声源的坐标,  $\omega$  为角频率。应用模态级数叠加法, 点声源的压力响应函数为

$$f(x, y, \omega) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{j\omega\rho Qc^2 p_{mn}(x_1, y_1) p_{mn}(x, y)}{hN_{mn}[(\omega_{mn}^2 - \omega^2) + 2j\omega\omega_{mn}\xi_{mn}]}, \quad (5)$$

式中  $p_{mn}$  和  $\omega_{mn}$  分别为声腔固有模态和固有频率,  $\xi_{mn}$  为阻尼率,  $N_{mn}$  可表示为

$$N_{mn} = \begin{cases} L_x L_y / 4 & (m, n = 1, 2, \dots), \\ L_x L_y / 2 & (m = 0, n = 1, 2, \dots), \\ L_x L_y & (m = n = 0). \end{cases} \quad (6)$$

### 2.2. 面声源模型

对于文献 7 中的面声源模型, 质量流率可以表示为

$$\begin{aligned} \dot{m} &= \iint_S \left( \frac{\rho Q}{hl^2} \right) \delta(x - x_1) \delta(y - y_1) e^{j\omega t} ds \\ &= \frac{\rho Q}{hl^2} \left[ H\left(x - x_1 + \frac{l}{2}\right) - H\left(x - x_1 - \frac{l}{2}\right) \right] \\ &\quad \times \left[ H\left(y - y_1 + \frac{l}{2}\right) - H\left(y - y_1 - \frac{l}{2}\right) \right] e^{j\omega t}, \end{aligned} \quad (7)$$

式中  $H(\cdot)$  代表单位阶跃函数,  $l$  为面源的边长,  $(x_1, y_1)$  为面源中心的坐标。其相应的压力响应函数为

$$f(x, y, \omega) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{j\omega\rho Qc^2 p_{mn}(x, y) B_x B_y}{hl^2 N_{mn}[(\omega_{mn}^2 - \omega^2) + 2j\omega\omega_{mn}\xi_{mn}]}, \quad (8)$$

式中

$$B_x = \begin{cases} \frac{2L_x}{m\pi} \sin\left(\frac{m\pi l}{2L_x}\right) \cos\left(\frac{m\pi x_1}{L_x}\right) & (m \neq 0), \\ l & (m = 0), \end{cases} \quad (9)$$

$$B_y = \begin{cases} \frac{2L_y}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi l}{2L_y}\right) \cos\left(\frac{n\pi y_1}{L_y}\right) & (n \neq 0), \\ l & (n = 0). \end{cases} \quad (10)$$

### 2.3. 圆形线声源模型

文献 8 提出的圆形线声源模型将质量流率表示为

$$\dot{m} = \int_{L_s} \frac{\rho Q}{2\pi Rh} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_s) \cdot d\mathbf{s} e^{j\omega t}. \quad (11)$$

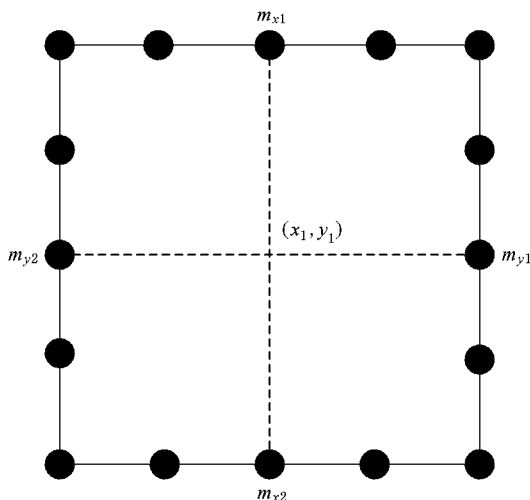


图2 正方形线声源模型

式中  $R$  为圆的半径. 其相应的压力响应函数为

$$f_1(x, y, \omega) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{j\omega\rho Qc^2 p_{nm}(x, y)}{2\pi R h N_{nm} [(\omega_{nm}^2 - \omega^2) + 2j\omega\omega_{nm}\xi_{nm}]} \times \int_0^{2\pi} \cos\left(\frac{m\pi(x_1 + R\cos\theta)}{L_x}\right) \times \cos\left(\frac{n\pi(y_1 + R\sin\theta)}{L_y}\right) R d\theta. \quad (12)$$

2.4. 正方形线声源模型

本文提出的正方形线声源模型如图 2 所示, 质量流率表示为正方形四条边上质量流率之和, 即

$$\dot{m} = \sum_{i=1}^2 (\dot{m}_{xi} + \dot{m}_{yi}), \quad (13)$$

式中

$$\dot{m}_{xi} = \int_{x_i} - \left(\frac{\rho Q}{4lh}\right) \delta(x - x_1) \delta\left(y - y_1 - \frac{l}{2}\right) e^{j\omega t} dx = \frac{\rho Q}{4lh} \left[ H\left(x - x_1 + \frac{l}{2}\right) - H\left(x - x_1 - \frac{l}{2}\right) \right]$$

$$\times \delta\left(y - y_1 + (-1)^j \frac{l}{2}\right) e^{j\omega t}, \quad (14)$$

$$\dot{m}_{yi} = \int_{y_i} - \left(\frac{\rho Q}{4lh}\right) \delta(y - y_1) \delta\left(x - x_1 - \frac{l}{2}\right) e^{j\omega t} dy = \frac{\rho Q}{4lh} \left[ H\left(y - y_1 + \frac{l}{2}\right) - H\left(y - y_1 - \frac{l}{2}\right) \right] \times \delta\left(x - x_1 + (-1)^j \frac{l}{2}\right) e^{j\omega t}. \quad (15)$$

通过模态级数叠加, 正方形线声源模型的压力响应函数为

$$f_1(x, y, \omega) = \frac{j\rho c^2 \omega Q}{4lh} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{p_{nm}(x, y) (C_x B_y + C_y B_x)}{N_{nm} [(\omega_{nm}^2 - \omega) + 2j\omega\omega_{nm}\xi_{nm}]}, \quad (16)$$

式中

$$C_x = 2\cos\left(\frac{m\pi x_1}{L_x}\right) \cos\left(\frac{m\pi l}{2L_x}\right),$$

$$C_y = 2\cos\left(\frac{n\pi y_1}{L_y}\right) \cos\left(\frac{n\pi l}{2L_y}\right). \quad (17)$$

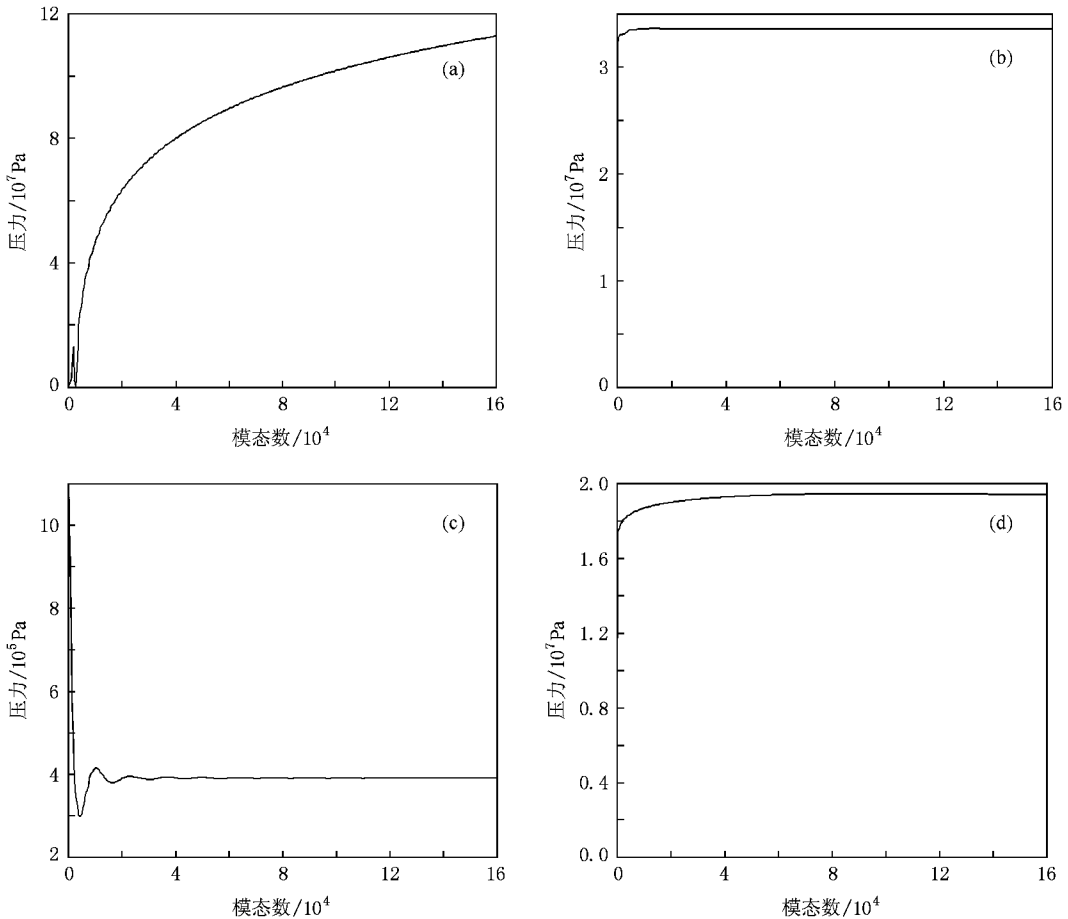


图 3 压力响应值随模态数的变化规律 (a)点声源, (b)面声源, (c)圆形线声源, (d)正方形线声源

### 3. 声源模型比较

#### 3.1. 计算收敛性

选择如图 1 所示的矩形声腔进行数值计算,其几何尺寸为  $L_x = 0.1 \text{ m}$ ,  $L_y = 0.1 \text{ m}$ ,  $h = 0.01 \text{ m}$ . 其余计算参数分别为  $c = 162.9 \text{ m/s}$ ,  $\rho = 6.01 \text{ kg/m}^3$ ,  $(0.08, 0.07)$  为声源中心坐标. 在  $1000 \text{ Hz}$  激振频率下计算 4 种计算模型在声源处的压力响应函数. 分别采用 4 种声源模型得到的压力响应的值随所取模态数的变化结果示于图 3.

从图 3 可以看出,点声源模型得到的压力响应值随模态数的增加逐渐增大,最终发散,而其余声源模型的计算结果均能比较快地得到收敛. 由此可见,采用点源模型计算声腔的压力响应函数是不合理的,应该选择其他模型进行计算. 面源模型具有最好的收敛性质,当模态数累加到  $3 \times 10^4$  左右时结果就已经收敛. 两种线声源模型则具有相似的收敛性质,均为当模态数叠加到  $8 \times 10^4$  左右时得到收敛的压力响应结果.

#### 3.2. 压力分布不均匀度

为了比较不同声源计算模型的压力分布均匀特性,定义压力不均匀度为

$$\Delta = \frac{P - \bar{P}}{\bar{P}}, \quad (18)$$

式中  $\bar{P}$  为声源平均响应压力. 点声源模型不存在压力分布的问题,因此只比较周长相等的三种声源模型. 所选用的正方形面声源模型和正方形线声源模型的边长均为  $0.006 \text{ m}$ ,选用的圆形线声源的半径为  $0.00382 \text{ m}$ ,声源中心坐标均取为  $(0.08, 0.07)$ . 图 4(a) 表示面声源模型的压力分布情况,可以看出面声源的压力不均匀度的变化区间为  $-0.3 \sim 0.15$ . 图 4(b) 表示圆形线声源模型的压力分布情况,圆形的几何对称性质有效地改善了其压力分布的均匀程度,压力不均匀度的变化区间为  $-0.025 \sim 0.025$ . 图 4(c) 表示正方形线声源模型的压力分布情况,压力不均匀度的变化区间为  $-0.09 \sim 0.09$ . 由此可知,圆形线声源模型的压力分布最均匀,正方形线声源次之,而面声源的压力分布变化范围最大. 因此,应用面声源平均值计算传递矩阵会产生不准确的结果.

需要注意的是,以上有关压力分布不均匀度的比

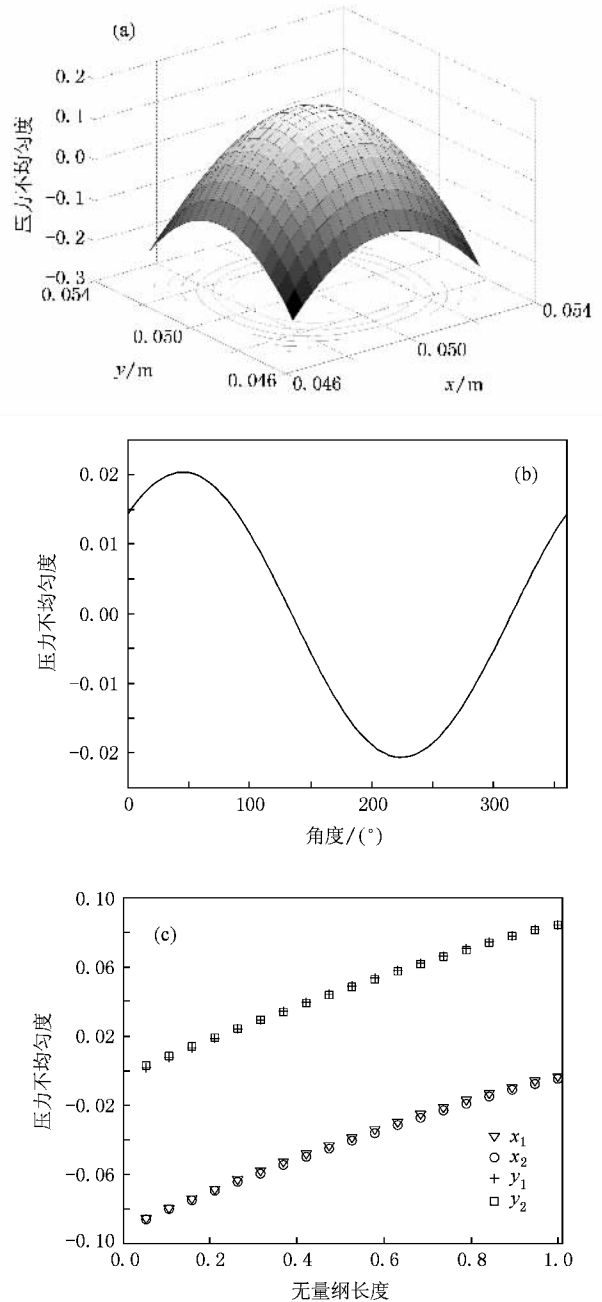


图 4 压力分布不均匀度 (a)面声源 (b)圆形线声源 (c)正方形线声源

较是在确定声源模型的几何形状及大小的情况下进行的. 当声源模型的几何形状及大小改变时,其相应的压力分布均匀性也会发生改变. 因此需要比较不同尺寸的正方形线声源的压力分布均匀度. 图 5 表示了正方形线声源的最大压力分布不均匀度随边长  $(0.001 \sim 0.01 \text{ m})$  变化的规律. 结果表明压力分布的最大不均匀度基本上随声源边长的增加而呈线性增加. 在此例中,只有当正方形线声源的边长小于  $0.007 \text{ m}$  时,最大压力分布不均匀度才小于  $0.1$ . 从

这点来看,需要选用尽可能小的正方形模型进行计算.但是另一方面,选用过小的正方形模型需要叠加更多的模态数使压力响应函数得到收敛.因此为了保证计算的准确度和效率,应该根据实际情况的需要合理地选用正方形线声源的大小.在这里控制正方形线声源的边长在 0.001—0.007 m 范围内可以得到较为理想的结果.

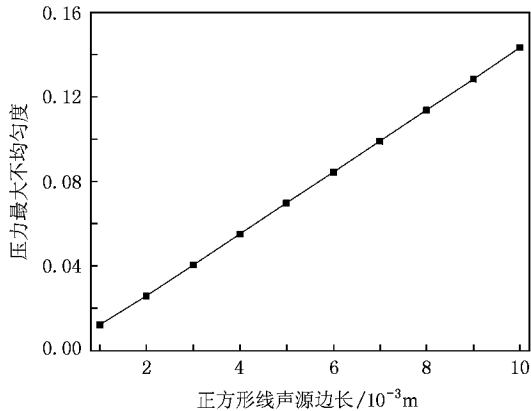


图5 压力最大不均匀度随正方形线声源边长的变化规律

### 3.3. 计算效率

通过比较 4 种声源模型的压力响应函数计算式可以看出,点声源具有最简单的数学描述,因此消耗的计算资源最少.面声源和正方形线声源模型中的压力响应函数的计算式中出现了三角函数,相比于点声源需要更多的计算资源.而消耗计算资源最大的是圆形线声源模型,在计算压力响应函数时既用到了三角函数又用到了数值积分.表 1 比较了采用 4 种声源计算其中心点在 50—2000 Hz 范围内的压力响应所需要的不同 CPU 时间.计算在一台 CPU 主频为 2.8 GHz 的个人电脑上的 Matlab7 平台上进行,每种模型叠加的总模态数均为  $1.6 \times 10^4$ .从表 1 可以看出,虽然圆形线声源模型能有效地克服源点奇异性并具有压力均匀分布的性质,但是由于其消耗的计算资源比较大,限制了应用范围.需要指出的是,一方面由于 Matlab 处理循环计算的能力较其他语言(如 C 和 Fortran 语言等)有一定差距,如果换用这些语言,可以预见不同声源的计算时间的结果差异会小于表 1 中的值.但另一方面从数值计算的角度出发,数值积分的过程总是需要消耗比常规运算更多的计算机浮点计算次数.比较三种声源模型的压力响应函数(8)(12)和(16)式可以看出(12)式需要对每组模态( $m, n$ )多进行一次数值积分.如果

采用复化 Simpson 求积公式并控制积分误差在  $10^{-5}$  范围之内,由复化 Simpson 公式的误差定义式

$$E_c = -\frac{b-a}{2880} h^4 f^{(4)}(\eta) \quad (a < \eta < b), \quad (19)$$

可得圆形线声源模型每计算一次数值积分需要的浮点运算总量比面声源模型多出大约  $5[|f^{(4)}(\eta)|]^{0.25}$  次,而正方形线声源模型的浮点运算总量则与面声源模型在同一个数量级上.这点在表 1 中也得到了体现.因此,综合考虑计算收敛性、压力分布均匀度和计算效率三种因素,正方形线声源模型既能得到收敛的计算结果,又能有效地改善压力分布不均匀度,而且对计算资源的要求也不如圆形线声源模型那样苛刻.因此,正方形线声源模型与其他三种模型比较起来具有一定的优势.

表 1 各种声源模型计算耗费 CPU 时间比较

频率分辨率	10 Hz	5 Hz
点声源模型	14 s	30 s
面声源模型	19 s	41 s
圆形线声源模型	1753 s	3510 s
正方形线声源模型	23 s	50 s

## 4. 正方形线声源实用性讨论

虽然正方形线声源模型具有上述优势,但是实际的声源往往是以平面的形式存在,因此考察正方形声源的实用性十分必要.为了模拟面声源模型需要找到恰当的线源模型边长,通过对方程(8)和(16)的比较可以得到

$$\begin{aligned} & \frac{1}{S} \int_S \frac{1}{l_1^2} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{p_{mn}(x, y) B_{x1} B_{y1}}{N_{mn} [(\omega_{mn}^2 - \omega^2) + 2j\omega\omega_{mn}\xi_{mn}]} dA \\ &= \frac{1}{L} \int_L \frac{1}{4l_2} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{p_{mn}(x, y) (C_{x2} B_{y2} + C_{y2} B_{x2})}{N_{mn} [(\omega_{mn}^2 - \omega) + 2j\omega\omega_{mn}\xi_{mn}]} ds, \end{aligned} \quad (20)$$

式中  $l_1$  和  $l_2$  分别表示面声源模型和线声源模型的正方形边长,  $S$  为面声源模型的面积,  $L$  为线声源模型的周长.由于很难从方程(20)中直接得出  $l_1$  和  $l_2$  之间的关系,所以选用数值试验的方法,将正方形线声源模型的压力响应表示为边长的函数,与面声源模型进行比较,计算点(0.08, 0.07)不同激振频率的结果如图 6 所示.结果表明,当  $l_1/l_2$  控制在 0.77 左右时,线声源的计算结果可以代替面声源的计算结果.另外,由上述讨论可知,使用线声源模型的计算

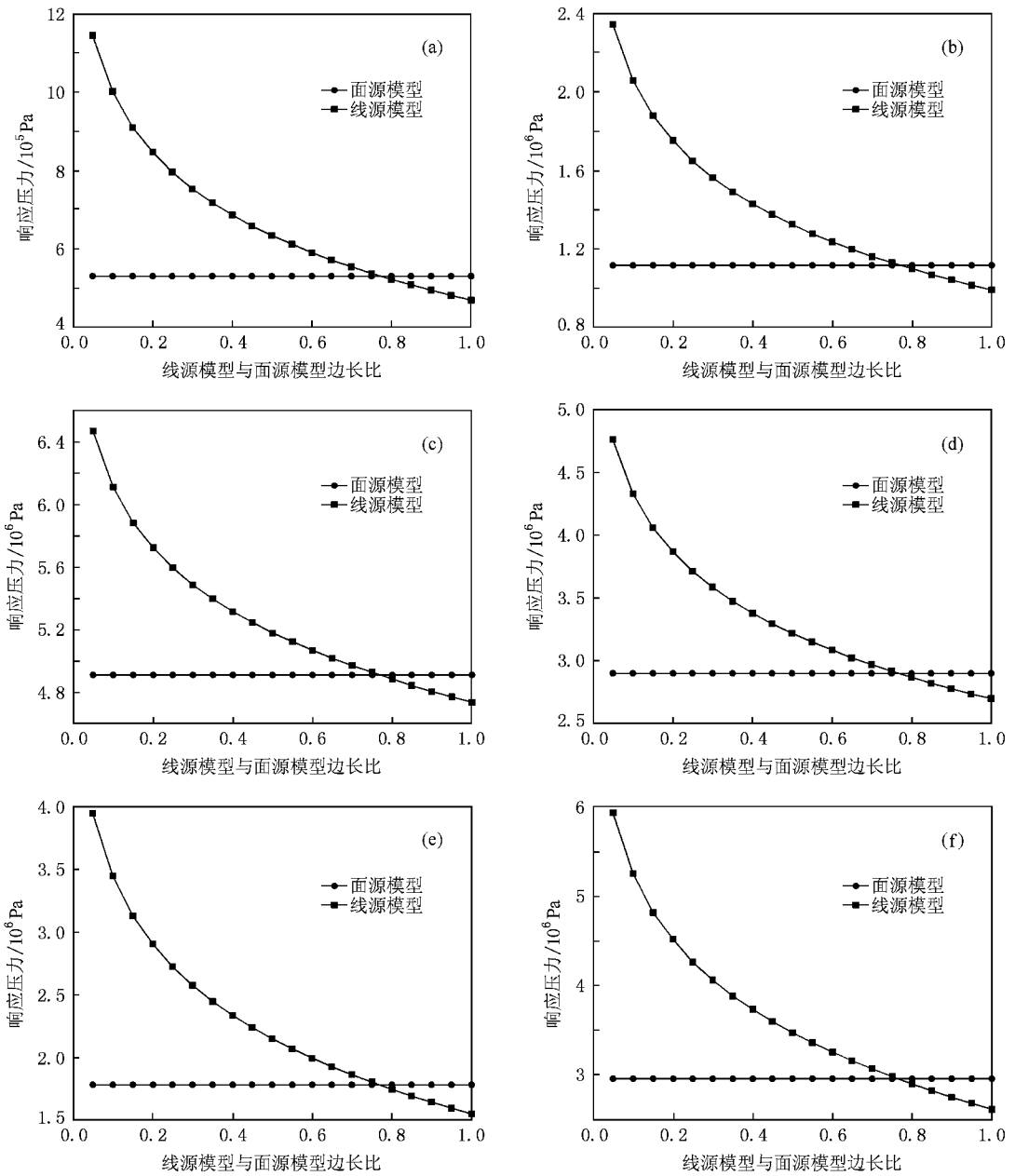


图6 线声源模型与面声源模型压力响应计算结果比较 (a)400 Hz ,(b)800 Hz ,(c)1000 Hz ,(d)1200 Hz ,(e)1400 Hz ,(f)1900 Hz

结果具有更好的压力分布均匀性.综上所述,正方形线声源模型具有一定的实际应用价值.

### 5. 结 论

本文综合现有的应用于二维矩形薄腔的声源计算模型的优缺点,提出了一种新的正方形线声源计算模型.这种模型具有以下特点(1)解决了点声源

模型的奇异性问题,在源点处的计算结果可以较快收敛.(2)根据实际情况,合理地选择正方形线声源的几何尺寸,可以使正方形线声源上的压力分布较正方形面声源更为均匀,压力响应的平均过程更为合理.(3)克服了圆形线声源模型需要数值积分计算压力响应函数的缺陷,有效地提高了计算效率.(4)通过合理选用线声源模型的边长可以有效地代替实际情况中的面声源,具有一定的实用价值.

- [ 1 ] Soedel W 2007 *Sound and Vibrations of Positive Displacement Compressors* ( Boca Raton : CRC Press ) p195
- [ 2 ] Zhu W Y , Wang Y J , Ning W 1996 *Acta Phys. Sin.* **45** 58 ( in Chinese ) [ 朱为勇、王耀俊、宁 伟 1996 物理学报 **45** 58 ]
- [ 3 ] Han F S , Zhen G , Liu C S , Da R , Cai X L 1998 *Chin. Phys. B* **7** 134
- [ 4 ] Zhao H G , Liu Y Z , Wen J H , Yu D L , Wen X S 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 4700 ( in Chinese ) [ 赵宏刚、刘耀宗、温激鸿、郁殿龙、温熙森 2007 物理学报 **56** 4700 ]
- [ 5 ] Munjal M L 1987 *Acoustics of Ducts and Mufflers with Application to Exhaust and Ventilation System Design* ( New York : John Wiley & Sons ) p8
- [ 6 ] Lai P C C , Soedel W 1996 *J. Sound Vib.* **194** 137
- [ 7 ] Zhou W , Kim J 1999 *J. Sound Vib.* **219** 89
- [ 8 ] Huang Z , Jiang W 2007 *J. Sound Vib.* **306** 215
- [ 9 ] Kim J , Soedel W 1989 *J. Sound Vib.* **129** 237

## A square lines-source model for calculating transfer matrix of two-dimensional acoustic cavity<sup>\*</sup>

Lin Li<sup>1)</sup> Li Yun<sup>1)†</sup> Gu Zhao-Lin<sup>2)</sup> Lau Sit-Kit<sup>3)</sup> Cheng Guang-Xu<sup>1)</sup>

<sup>1</sup> *School of Energy and Power Engineering , Xi 'an Jiaotong University , Xi 'an 710049 , China )*

<sup>2</sup> *School of Human Settlements and Civil Engineering , Xi 'an Jiaotong University , Xi 'an 710049 , China )*

<sup>3</sup> *Department of Building Service Engineering , The Hong Kong Polytechnic University , Kowloon Hong Kong , China )*

( Received 26 November 2008 ; revised manuscript received 19 December 2008 )

### Abstract

A comparison of the existing sound source model for calculating transfer matrix of two-dimensional rectangular acoustic cavity is performed in this paper. Based on the comparison , a new square linear sound source model is developed to calculate the pressure response function. Results show that this new source model can not only overcome the singularity problem of the point source model but also get more uniform pressure distribution than that of the surface source model provided that the size of the new model 's geometry is reasonably controlled. On the other hand , the mathematical model of the new square line-source is simpler than that of the circular line-source model. Therefore , it can improve the computational efficiency significantly. Finally , the feasibility of the new source model is substantiated by performing some numerical experiments.

**Keywords** : transfer matrix , square line-sound source model , two-dimensional acoustic cavity , modal series superposition

**PACC** : 4320 , 0340K , 0270

<sup>\*</sup> Project supported by the Grant of Joint Supervision Scheme with Mainland China Taiwan and Macao Universities ( Grant No. A-PB0Q ) and the Fund of the Third Stage of " 211 Project " of Xi'an Jiaotong University .

<sup>†</sup> Corresponding author. E-mail : yunli@mail.xjtu.edu.cn