

边界耦合的 Marangoni 对流边界层问题的 近似解析解*

张 艳^{1)†} 郑连存^{1)†} 张欣欣³⁾

1) 北京科技大学数学力学系, 北京 100083)

2) 北京建筑工程学院理学院, 北京 100044)

3) 北京科技大学机械工程学院, 北京 100083)

(2008 年 10 月 22 日收到, 2008 年 11 月 22 日收到修改稿)

研究了由温度梯度引起的 Marangoni 对流边界层问题. 由于动量方程和能量方程的边界条件耦合, 利用相似变换将偏微分方程组转化为常微分方程非线性边界值问题. 通过巧妙引入摄动小参数对速度和温度边界层方程同时渐近展开求解, 得到了问题的近似解析解, 并对相应的动量、能量传递特性进行了讨论.

关键词: Marangoni 对流, 近似解析解, 渐近展开

PACC: 4715C, 4725Q, 0340G, 0365D

1. 引 言

近几十年来, 随着太空科技的迅猛发展, 对微重力或者零重力条件下的各种物理现象及其规律的认识和研究已日益突显其重要性. Marangoni 对流是近年来备受人们关注的一种微重力条件下的重要物理现象, 它是由界面上的表面张力梯度引起的一种流动, 有别于我们所熟悉的自然对流. 由热量传递和质量传递引发的 Marangoni 对流对化学工业中的传热、传质过程以及材料科学中的合金、晶体制备有着显著的影响^[1-3]. Marangoni 效应根据其起源不同可以分为热 Marangoni 效应(EMT)和溶质 Marangoni 效应(EMS). 在 EMT 方面, Benard 开创了对 Marangoni 效应的理论研究, Pearson^[4]建立了最初的理论模型和判断准则. 实验证明, 流体表面张力的大小与温度有关, 一般情况下温度越高表面张力越小^[5]. 在 EMS 方面, Sternling 和 Scriven^[6]建立了最初的理论模型和判断准则. 文献 [7, 8] 对不同起因的 EMS 的动力学特征及其复合机理进行了研究. 文献 [9-12] 研究了包含两个组分迁移和界面化学反应的复杂体系. Simanovskif^[12]研究了多层体系中的非线性 Marangoni 对流问题. Zheng 等^[13-15]给出了 In-Ga-Sb 系统中

Marangoni 对流的解析近似解.

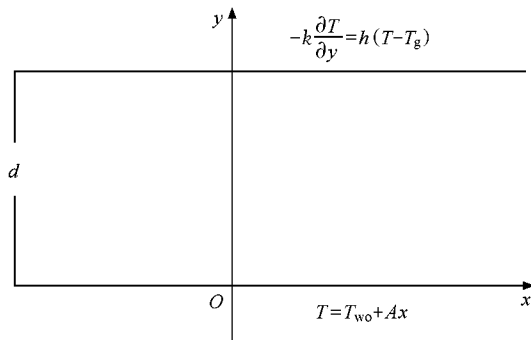


图 1 Marangoni 对流模型示意图

Slavtchev^[16, 17]研究了由温度梯度引起的两种不同介质 Marangoni 对流的边界层问题(图 1), 图 1 中位于下方的是一种黏性液体, 宽度不限, 厚度有限, 流体的上方是静止的气体. 大多数流体的表面张力是温度的线性减函数, 然而脂肪醇稀释水溶液等^[18, 19]的表面张力是温度的先减后增函数, 在某一温度达到最小值, 表面张力和温度的关系可以用平方关系式表示为

$$\sigma = \sigma_0 + \frac{\delta}{2}(T - T_0)^2,$$

其中 δ , σ_0 和 T_0 都是正常数. 当 $T = T_0$ 时, 表面张力取到最小值 σ_0 , δ 为此时表面张力关于温度的二

* 国家自然科学基金(批准号 50476083)资助的课题.

† 通讯联系人. E-mail: liancunzheng@sina.com

阶导数. 假设流体的各项物理参数都是常数. 本文利用坐标变换和引入小参数渐进展开的方法研究边界耦合的 Marangoni 对流边界层问题近似解析解.

2. 边界层控制方程

假设流动是二维不可压缩, 并忽略体积力、外部压力梯度的影响, 描述牛顿流体的质量守恒、动量守恒和能量守恒边界层方程以无量纲形式可表示为

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (1)$$

$$q \left(u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} \right) (u \cdot v) = - \left(\frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial y} \right) + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + q(0, -g), \quad (2)$$

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = K \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}, \quad (3)$$

其中 p 是压力, μ 是动力黏性系数, q 是密度, K 是热扩散系数, g 是重力加速度. 在 $y=0$ 处, 速度场边界条件是

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= 0, \\ v(x, 0) &= 0. \end{aligned} \quad (4)$$

在 $y=d$ 处, 速度场边界条件是

$$\begin{aligned} u(x, d) &= 0, \\ \mu \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial \sigma}{\partial x} = \alpha(T - T_0) \frac{\partial T}{\partial x}. \end{aligned} \quad (5)$$

温度场边界层边界条件如下: 当 $y=0$ 时,

$$T = T_{wo} + Ax;$$

当 $y=d$ 时,

$$-k \frac{\partial T}{\partial y} = h(T - T_g). \quad (6)$$

在液体的下表面存在温度梯度 A , 这里规定 $A > 0$, 而在液体的上表面, 换热率满足牛顿定律, T_{wo} 是液体下表面的初始温度, T_g 是上方气体的温度, k 是热导率, h 是液体上表面的换热系数.

引入相似变换

$$\bar{x} = \frac{x}{d},$$

$$\eta = \frac{y}{d},$$

$$u = \frac{\delta A^2 d^2}{\mu} \bar{x} F'(\eta),$$

$$v = -\frac{\delta A^2 d^2}{\mu} F(\eta),$$

$$p - p_g = \delta A^2 d \left[\frac{\lambda}{2} \bar{x}^2 + p(\eta) \right],$$

$$T = T_1 \theta_1(\eta) + A d \bar{x} \theta(\eta),$$

其中 p_g 是气体压力, λ 是一个未知的常数, $T_1 = T_{wo}$. 可以将动量方程转化为

$$F''' + M(FF'' - F'^2) = \lambda. \quad (7)$$

相应的动量方程边界条件简化为

$$\begin{aligned} F(0) &= F'(0) = 0, \\ F(1) &= 0, \\ F'(1) &= \theta^2(1). \end{aligned} \quad (8)$$

这里 M 为 Marangoni 数,

$$M = \frac{q \delta A^2 d^3}{\mu^2},$$

而 λ 是与 M 有关的常数. 能量方程转化为以下两个方程:

$$\theta_1'' + M Pr F \theta_1' = 0, \quad (9a)$$

$$\theta'' + M Pr (F \theta' - F' \theta) = 0. \quad (9b)$$

其中 Pr 为 Prandtl 数,

$$Pr = \frac{\mu}{qK}.$$

能量方程边界条件为

$$\begin{aligned} \theta_1(0) &= 1, \\ \theta_1'(1) + Bi \left[\theta_1(1) - \frac{T_g}{T_{wo}} \right] &= 0, \\ \theta(0) &= 1, \\ \theta'(1) + Bi \theta(1) &= 0. \end{aligned} \quad (10)$$

其中 Bi 为毕渥数, $Bi = hd/k$.

3. 动量方程求解

假设初始条件为 $F'(0) = c$, 引入一个人工小参数 ε , 做如下变换:

$$\begin{aligned} F(\eta) &= \varepsilon g(\xi) + \frac{c}{2} \eta^2 \\ &= \varepsilon g(\xi) + \varepsilon^{2/3} \frac{c}{2} \xi^2, \end{aligned}$$

$$\xi = \varepsilon^{-1/3} \eta,$$

代入方程(7)控制方程可以改写为

$$\begin{aligned} g''' + M \left[(\varepsilon g + \varepsilon^{2/3} \frac{c}{2} \xi^2) (\varepsilon^{1/3} g'' + c) \right. \\ \left. - (\varepsilon^{2/3} g' + \varepsilon^{1/3} c \xi)^2 \right] &= \lambda. \end{aligned} \quad (11)$$

边界条件为

$$\begin{aligned} g(0) &= 0, \\ g'(0) &= 0, \\ g''(0) &= 0. \end{aligned}$$

把 $g(\xi)$ 在 $\varepsilon=0$ 处展开成如下幂级数形式:

$g(\xi) = g_0 + g_1 \epsilon^{1/3} + g_2 \epsilon^{2/3} + g_3 \epsilon + g_4 \epsilon^{4/3} + \dots$,
将展开式代入方程(11), 比较 ϵ 同次幂的系数, 可以得到

$$F = \frac{c}{2} \eta^2 + \frac{\lambda}{6} \eta^3 + \frac{Mc^2}{120} \eta^5 + \frac{M\lambda c}{360} \eta^6 + \frac{M\lambda^2}{2520} \eta^7 - \frac{M^2 c^3}{40320} \eta^8 - \frac{M^2 \lambda c^2}{90720} \eta^9 - \frac{M^2 c \lambda^2}{226800} \eta^{10} + \frac{M^3 c^4}{1478400} \eta^{11} + \frac{181M^3 c^3 \lambda}{479001600} \eta^{12} - \frac{317M^4 c^5}{29059430400} \eta^{14}.$$

此近似解的误差不超过 $\frac{M^3 \lambda^4}{2476656000} - \frac{M^4 c^4 \lambda}{121927680}$.

从而

$$F' = c\eta + \frac{\lambda}{2} \eta^2 + \frac{Mc^2}{24} \eta^4 + \frac{M\lambda c}{60} \eta^5 + \frac{M\lambda^2}{360} \eta^6 - \frac{M^2 c^3}{5040} \eta^7 - \frac{M^2 \lambda c^2}{10080} \eta^8 - \frac{M^2 c \lambda^2}{22680} \eta^9 + \frac{M^3 c^4}{134400} \eta^{10} + \frac{181M^3 c^3 \lambda}{39916800} \eta^{11} - \frac{317M^4 c^5}{2075673600} \eta^{13}.$$

由于动量方程的边界条件与能量方程的边界条件耦合, 故需要求解能量方程, 再来确定参数 c, λ 的值.

4. 能量方程求解

首先求解方程(9b), 假设初始条件为 $\theta'(0) = s$, 类似于动量方程的求解, 做如下变换:

$$\theta = \epsilon \chi(\xi) + s\eta + 1, \quad \xi = \epsilon^{-1/2} \eta, \quad (12)$$

代入方程(9b), 利用摄动展开方法, 我们可以得到

$$\begin{aligned} \chi(\eta) = & 1 + s\eta + \frac{MPr c}{6} \eta^3 + \frac{1}{24} (MPrsc + MPr\lambda) \eta^4 \\ & + \frac{MPrs\lambda}{60} \eta^5 + \frac{1}{720} (-2M^2 Pr^2 c^2 + M^2 Prc^2) \eta^6 \\ & + \frac{1}{5040} (4M^2 Prsc^2 + 2M^2 Pr\lambda c - 5M^2 Pr^2 sc^2 - 5M^2 Pr^2 c\lambda) \eta^7 \\ & + \frac{1}{40320} (-23M^2 Pr^2 s\lambda c + 10M^2 Prs\lambda c - 5M^2 Pr^2 \lambda^2 + 2M^2 Pr\lambda^2) \eta^8 \\ & + \frac{1}{362880} (28M^3 Pr^3 c^3 - 28M^2 Pr^2 s\lambda^2 + 12M^2 Prs\lambda^2 - M^3 Prc^3) \eta^9 \\ & + \frac{1}{3628800} (-66M^3 Pr^2 sc^3 + 2M^3 Pr^2 \lambda c^2 \end{aligned}$$

$$+ 100M^3 Pr^3 sc^3 + 156M^3 Pr^3 c^2 \lambda - 7M^3 Prsc^3 - 4M^3 Pr\lambda c^2) \eta^{10}.$$

当 $Pr = 1$ 时, 此近似解的误差不超过 $\frac{2723}{279417600}$

$M^3 c \lambda^2 + \frac{451}{39916800} M^3 s \lambda c^2$. 利用条件 $\theta'(1) + Bi\theta(1) = 0$, $F(1) = 0$ 和 $F''(1) = \theta^2(1) = 1$, 就可以确定参数 s, c 和 λ 的值.

取 $Pr = 1$, 即需求解下列方程组:

$$\begin{aligned} & 0.1 + 1.1s + \frac{31Mc}{60} + \frac{41}{240} (Msc + M\lambda) \\ & + \frac{51Ms\lambda}{600} - \frac{61}{7200} M^2 c^2 \\ & - \frac{71}{50400} (M^2 sc^2 + 3M^2 c\lambda) \\ & - \frac{81}{403200} (13M^2 s\lambda c + 3M^2 \lambda^2) \\ & + \frac{91}{3628800} (27M^3 c^3 - 16M^2 s\lambda^2) \\ & + \frac{101}{36288000} (27M^3 sc^3 + 154M^3 c^2 \lambda) \\ & = 0, \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} & \frac{c}{2} + \frac{\lambda}{6} + \frac{Mc^2}{120} + \frac{M\lambda c}{360} + \frac{M\lambda^2}{2520} \\ & - \frac{M^2 c^3}{40320} - \frac{M^2 \lambda c^2}{90720} - \frac{M^2 c \lambda^2}{226800} \\ & + \frac{M^3 c^4}{1478400} + \frac{181M^3 c^3 \lambda}{479001600} - \frac{317M^4 c^5}{29059430400} \\ & = 0, \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} & c + \lambda + \frac{Mc^2}{6} + \frac{M\lambda c}{12} + \frac{M\lambda^2}{60} - \frac{M^2 c^3}{720} \\ & - \frac{M^2 \lambda c^2}{1260} - \frac{M^2 c \lambda^2}{2520} + \frac{M^3 c^4}{13440} \\ & + \frac{181M^3 c^3 \lambda}{3628800} - \frac{317M^4 c^5}{159667200} \\ & = \left[1 + s + \frac{Mc}{6} + \frac{1}{24} (Msc + M\lambda) \right. \\ & + \frac{Ms\lambda}{60} - \frac{1}{720} M^2 c^2 - \frac{1}{5040} (M^2 sc^2 + 3M^2 c\lambda) \\ & - \frac{1}{40320} (13M^2 s\lambda c + 3M^2 \lambda^2) \\ & + \frac{1}{362880} (27M^3 c^3 - 16M^2 s\lambda^2) \\ & \left. + \frac{1}{3628800} (27M^3 sc^3 + 154M^3 c^2 \lambda) \right]^2. \end{aligned} \quad (15)$$

将不同的 M 值代入, 得到相应的参数 s, c 和 λ 的值.

下面再求解方程(9a), 假设初始条件为 $\theta'_1(0)$

= α ,做如下变换 :

$$\begin{aligned} \theta_1 &= \epsilon\psi(\xi) + \alpha\eta + 1, \\ \xi &= \epsilon^{-1/2}\eta. \end{aligned} \tag{16}$$

同理可以得出

$$\begin{aligned} \theta_1(\eta) &= 1 + \alpha\eta - \frac{MPrac}{24}\eta^4 - \frac{MPrac\lambda}{120}\eta^5 \\ &+ \frac{1}{5040}(10M^2Pr^2ac^2 - M^2Prac^2)\eta^7 \\ &+ \frac{1}{40320}(35M^2Pr^2\alpha\lambda c - 2M^2Prac\lambda c)\eta^8 \\ &+ \frac{1}{362880}(35M^2Pr^2\alpha\lambda^2 - 2M^2Prac\lambda^2)\eta^9 \\ &+ \frac{1}{3628800}(-280M^3Pr^3ac^3 \\ &+ 84M^3Pr^2ac^3 + M^3Prac^3)\eta^{10} \\ &+ \frac{1}{19958400}(-438M^3Pr^3\alpha\lambda c^2 \\ &+ 225M^3Pr^2\alpha\lambda c^2 + 2M^3Prac\lambda c^2)\eta^{11}. \end{aligned}$$

当 $Pr = 1$ 时,此近似解的误差不超过 $\frac{4769}{470001600} M^3ac\lambda^2$. 利用条件 $\theta(1) = 1$,可以计算出 α 的值.

图 2 和图 3 给出了当 Pr 固定时 M 变化和当 M 固定时 Pr 变化的情况下,无量纲速度函数 $F'(\eta)$ 的分布. 从图 2 和图 3 可以发现,当 M 和 Pr 较小时,液体中从下边界到自由表面的速度场变化非常剧烈,而当 M 和 Pr 足够大时,液体中速度场变化非常微小. 同时从图 2 和图 3 还可以发现,大约在 $\eta = 0.65$ 附近,不同情况下液体的速度都为零,此处为速度的转折点,并且自由表面处的速度 $F'(1)$ 随着 M 和 Pr 的增大而减小.

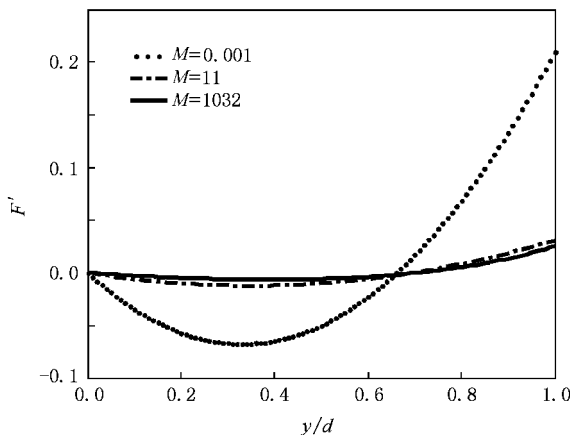


图 2 $Pr = 1$ 时,无量纲速度 $F'(\eta)$ 的分布

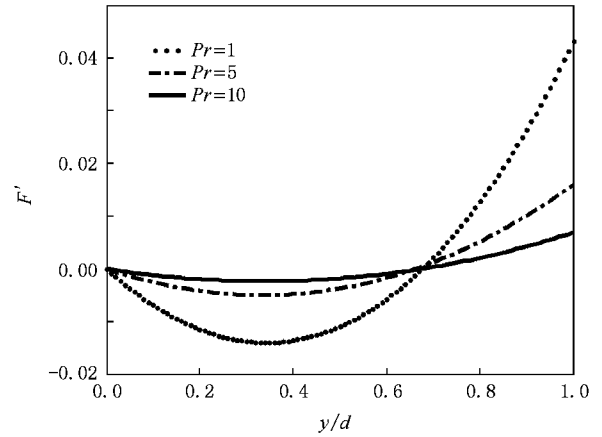


图 3 $M = 100$ 时,无量纲速度 $F'(\eta)$ 的分布

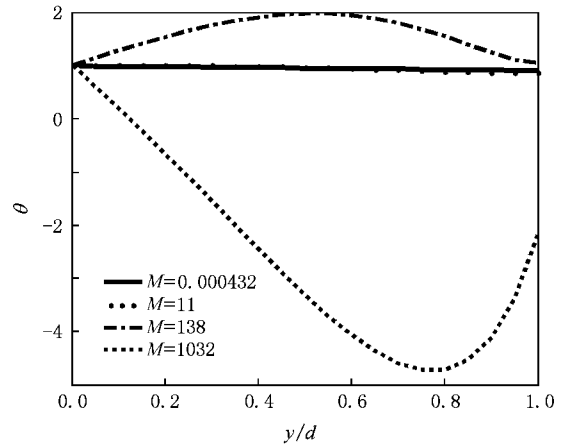


图 4 当 $Pr = 1$, M 取不同值时,无量纲温度 $\theta(\eta)$ 的分布

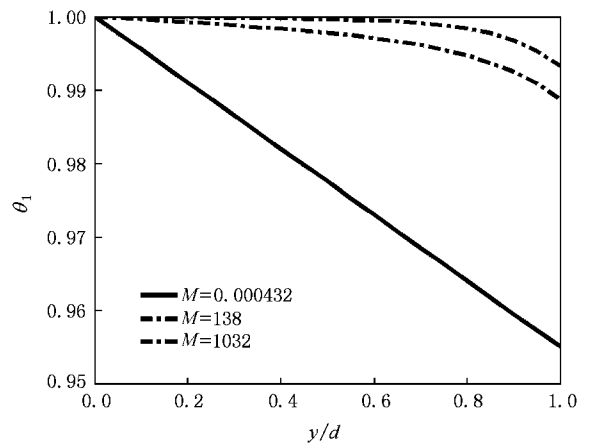


图 5 当 $Pr = 1, T_g/T_{w0} = 0.5$ 且 $Bi = 0.1$ 时,无量纲温度 $\theta_1(\eta)$ 的分布

图 4 给出了当 $Pr = 1, M$ 取不同的值时 $\theta(\eta)$ 的分布. 从图 4 中可以看出,当 M 较小时,整层液体中

的温度变化都不明显,并且处处为正,即比初始温度高,而当 M 足够大时,整层液体中的温度变化都很剧

烈 并且处处为负 即液体中的温度比初始温度低.

图 5 给出了当 $Pr = 1, T_g/T_{wo} = 0.5$ 且 $Bi = 0.1$, M 取不同的值时 $\theta_1(\eta)$ 的分布. 从图 5 可以发现, 当 M 较小时, 液体中的温度变化几乎是线性的, 而当 M 足够大时, 从液体的下边界开始, 温度曲线几乎呈现水平状态, 其值接近于 1, 直到接近自由表面处温度才开始有比较轻微的变化, 从而会在自由表面处产生较薄的温度边界层.

图 6—图 9 给出了不同参数情况下, 无量纲速度和无量纲温度的近似解析解与数值解的比较, 由此可以看出两种方法得到的结果基本符合, 证明了本文所给出的求解方法的有效性.

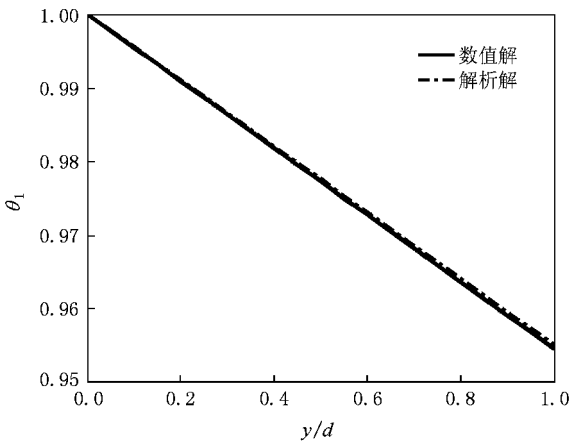


图 6 当 $M = 0.000432$ 时, 无量纲温度 $\theta_1(\eta)$ 数值解与解析解的比较

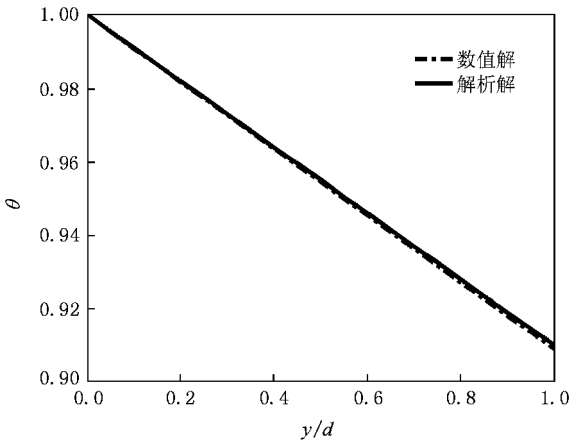


图 7 当 $M = 0.000432$ 时, 无量纲温度 $\theta(\eta)$ 数值解与解析解的比较

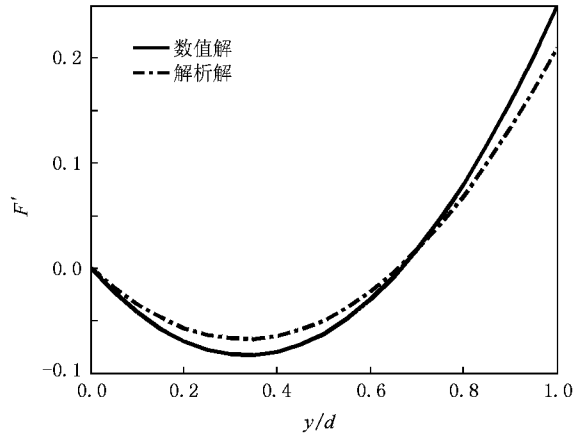


图 8 当 $M = 0.001$ 时, 无量纲速度 $F'(\eta)$ 数值解与解析解的比较

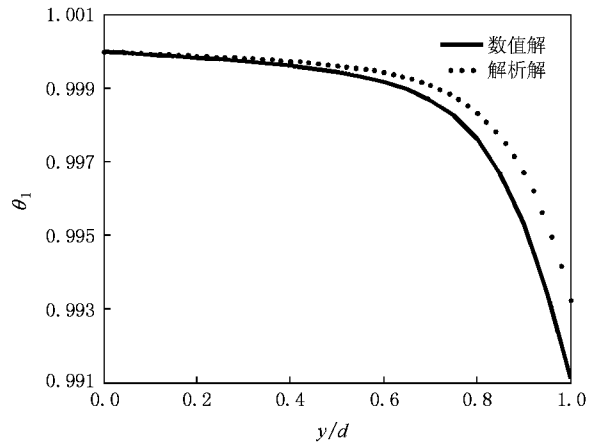


图 9 当 $M = 1032$ 时, 无量纲温度 $\theta_1(\eta)$ 数值解与解析解的比较

5. 结 论

本文研究了由温度梯度引起的 Marangoni 对流的边界层问题. 利用摄动小参数渐进展开对速度和温度边界层问题同时求解, 得到了近似解析解并对相应的传递行为进行了探讨. 研究表明: 当 M 和 Pr 较小时, 速度场变化非常剧烈; 而当 M 和 Pr 足够大时, 速度场变化非常小. 当 M 较小时, 整层液体中的温度变化较小, 液体中的温度几乎是呈线性变化; 而当 M 足够大时, 整层液体中的温度变化非常明显, 在自由表面处会产生较薄的温度边界层.

- [1] Sharma A , Ruckenstein E 1986 *J. Colloid Interf. Sci.* **111** 8
- [2] Hozawa M , Inoue M , Sato J 1991 *J. Chem. Eng. Jpn.* **24** 209
- [3] Lyford P A , Pratt H R C , Griesen F , Shallcross D C 1998 *Can. J. Chem. Eng.* **76** 167
- [4] Pearson J R A 1958 *J. Fluid Mech.* **4** 489
- [5] Arafune K , Hirata A 1997 *J. Cryst. Growth* **197** 811
- [6] Scriven L E , Sternling C V 1960 *Nature* **187** 186
- [7] Bekki S , Vignes-Vdler M , Nakache E 1990 *J. Colloid Interf. Sci.* **140** 492
- [8] Hu X Z , Viges-Adler M 1997 *Acta Phys. Chim. Sin.* **13** 873
- [9] Magyari E , Ali M E , Keller B 2001 *Heat Mass Transfer* **38** 65
- [10] Al-Mudhaf A , Chamkha A J 2005 *Heat Mass Transfer* **42** 112
- [11] Magyari E , Chamkha A J 2007 *Heat Mass Transfer* **43** 965
- [12] Simanovskii I 2006 *Phys. Rev. E* **73** 66310
- [13] Zheng L C , Sheng X Y , Zhang X X 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 5298 (in Chinese) [郑连存、盛晓艳、张欣欣 2006 物理学报 **55** 5298]
- [14] Zheng L C , Feng Z F , Zhang X X 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 1549 (in Chinese) [郑连存、冯志丰、张欣欣 2007 物理学报 **56** 1549]
- [15] Zheng L C , Zhang X X , Gao Y T 2008 *Math. Comput. Model.* **48** 1787
- [16] Slvatcev S G , Dubovik K G 1992 *Theor. Appl. Mech.* **23** 85
- [17] Slvatcev S G , Miladinova S P 1998 *Acta Mech.* **127** 209
- [18] Legros J C 1986 *Acta Astron.* **13** 697
- [19] Petre G , Azouni M A , Tshinyame K 1993 *Appl. Sci. Res.* **50** 97

The analytical approximate solution for Marangoni convection in a liquid layer with coupled boundary conditions^{*}

Zhang Yan¹⁾²⁾ Zheng Lian-Cun^{1)†} Zhang Xin-Xin³⁾

^{1) X} Department of Mathematics and Mechanics , University of Science and Technology Beijing , Beijing 100083 , China)

^{2) X} School of Science , Beijing Institute of Civil Engineering and Architecture , Beijing 100044 , China)

^{3) X} School of Mechanical Engineering , University of Science and Technology Beijing , Beijing 100083 , China)

(Received 22 October 2008 ; revised manuscript received 22 November 2008)

Abstract

The analytical approximate solution for Marangoni convection is which is induced by variation of surface tension along the liquid of finite thickness presented. The surface tension changes with the variety of temperature. The Marangoni convection boundary layer problem is solved by an efficient transformation and asymptotic expansion technique. The associated transfer mechanism is analyzed in detail.

Keywords : Marangoni convection , analytical approximate solution , asymptotic expansion

PACC : 4715C , 4725Q , 0340G , 0365D

^{*} Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 50476083).

[†] Corresponding author. E-mail : liancunzheng@sina.com