

# 弱电离尘埃等离子体的介电张量研究\*

石雁祥<sup>1)†</sup> 吴 健<sup>2)</sup> 葛德彪<sup>3)</sup>

1) 新疆伊犁师范学院物理系, 伊宁 835000)

2) 中国电波传播研究所电波环境特性与模化技术国家重点实验室, 北京 102206)

3) 西安电子科技大学理学院, 西安 710071)

(2008 年 4 月 4 日收到, 2009 年 2 月 4 日收到修改稿)

忽略磁场作用, 通过求解含 BGK 碰撞项的 Boltzmann 方程和尘埃粒子充电方程导出了弱电离尘埃等离子体介电张量的表达式, 证明了“冷”尘埃等离子体的纵向介电张量系数与横向介电张量系数相等, 完善了弱电离尘埃等离子体电磁特性的理论模型.

关键词: 弱电离尘埃等离子体, Boltzmann 方程, 充电方程, 介电张量

PACC: 5225M, 5225Z, 5225D

## 1. 引 言

固体火箭喷焰对微波的强衰减和极区中层顶大气(高度 80—90 km)在每年夏季对微波的强散射现象是困扰理论界多年的问题<sup>[1-6]</sup>. 在计算固体火箭喷焰对微波的强衰减时, 为使理论与实测值吻合, 常要将电子浓度估计到一个很高的值, 但高的电子浓度所要求的温度值又与喷焰微波衰减区的实测值相差很大. 人们已经发现固体火箭喷焰中  $\text{Al}_2\text{O}_3$  尘埃粒子的浓度和大小都对微波衰减有重要影响<sup>[1-3]</sup>; 另一方面, 极区中层顶大气对微波的强散射与该区域的尘埃冰晶颗粒也有密切关系<sup>[4-6]</sup>.

固体火箭喷焰和极区中层顶大气都是弱电离的尘埃等离子体, 其中分子浓度远大于电子和离子浓度数个量级, 而后的浓度一般又远大于尘埃粒子浓度, 尘埃粒子之间的库仑耦合系数远小于 1, 其间的德拜-胡克斯势可以忽略不计. 建立这种弱电离尘埃等离子体的电磁特性模型, 对于研究微波在固体火箭喷焰以及极区中层顶大气中的传播和散射规律有重要的意义. 在忽略磁场的作用下, 本文导出了弱电离尘埃等离子体介电张量的表达式, 给出了纵向和横向介电张量, 证明了“冷”尘埃等离子体的纵向与横向介电张量系数相等, 且结果与文献 [7] 给出的公式一致, 完善了弱电离尘埃等离子体的电磁特性理

论. 在此基础上计算了固体火箭喷焰二次燃烧区的微波衰减常数. 研究表明, 考虑尘埃等离子体理论给出的微波衰减常数远大于一般等离子体理论给出的衰减常数. 为进一步研究微波在固体火箭喷焰和极区中层大气中的传播规律奠定了基础.

## 2. 弱电场中弱电离尘埃等离子体的分布函数

考虑这样一种弱电离尘埃等离子体, 其中分子浓度远大于电子和离子浓度, 而电子和离子的浓度又远大于尘埃粒子的浓度. 尘埃粒子之间的库仑耦合系数远远小于 1, 其德拜-胡克斯势可以忽略不计. 这种弱电离尘埃等离子体处在电磁场中, 带电粒子  $\alpha$  的分布函数  $f_\alpha$  ( $\alpha = e, i$  分别表示电子和离子) 满足 Boltzmann 方程<sup>[8, 9]</sup>

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla_r f_\alpha + \frac{e_\alpha}{m_\alpha} \left( \mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B} \right) \cdot \nabla_v f_\alpha = -\nu_{\alpha n} (f_\alpha - n_\alpha \Phi_{\alpha n}). \quad (1)$$

这里  $\Phi_{\alpha n} = \left( \frac{m_\alpha}{2\pi k_B T_\alpha} \right)^{3/2} \exp\left( \frac{-m_\alpha v^2}{2k_B T_\alpha} \right)$  是 Maxwell 标准归一化函数;  $\nu_{\alpha n}$  是带电粒子与分子的碰撞频率. 不受电磁场作用时, 方程 (1) 的解为

$$f_{\alpha 0} = n_{\alpha 0} \Phi_{\alpha n}. \quad (2)$$

\* 国家自然科学基金(批准号: 10865005)和伊犁师范学院科研基金重点项目(批准号: 2007ZD007)资助的课题.

† E-mail: stonm1234@yahoo.com.cn

$n_{\alpha 0}$  是带电粒子未受扰动时的浓度. 忽略磁场, 并假定在弱的电场作用下, 带电粒子的分布函数相对于 Maxwell 分布只发生很小的偏离  $\delta f_{\alpha}$ , 其分布函数为

$$\begin{aligned} f_{\alpha} &= f_{\alpha 0} + \delta f_{\alpha}, \\ \delta f_{\alpha} &\ll f_{\alpha 0}, \end{aligned} \quad (3)$$

且

$$\begin{aligned} n_{\alpha} &= n_{\alpha 0} + \tilde{n}_{\alpha}, \\ \tilde{n}_{\alpha} &= \int \delta f_{\alpha} dv. \end{aligned} \quad (4)$$

将(3)和(4)式代入(1)式得

$$\begin{aligned} \frac{\partial \delta f_{\alpha}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla_r \delta f_{\alpha} + \frac{e_{\alpha}}{m_{\alpha}} \mathbf{E} \cdot \nabla_v f_{\alpha 0} \\ = -\nu_{\alpha n} \left( \delta f_{\alpha} - \Phi_{\alpha n} \int \delta f_{\alpha} dv \right). \end{aligned} \quad (5)$$

(5)式左边第三项忽略了  $\delta f_{\alpha}$  对速度的梯度.(5)式的频域解为

$$\begin{aligned} \delta f_{\alpha} &= \frac{i e_{\alpha}}{k_B T_{\alpha}} \frac{(\mathbf{E} \cdot \mathbf{v}) f_{\alpha 0}}{\omega + i \nu_{\alpha n} - i \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}} \\ &+ \frac{i \nu_{\alpha n} \eta f_{\alpha 0}}{\omega + i \nu_{\alpha n} - i \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}}. \end{aligned} \quad (6)$$

这里,

$$\eta = \frac{1}{n_{\alpha 0}} \int \delta f_{\alpha} d\mathbf{v}. \quad (7)$$

### 3. 弱电离等离子体的纵向和横向介电系数

在弱电场扰动下, 不考虑尘埃时等离子体中的电荷密度扰动及电流密度矢量为

$$\rho_{\alpha} = e_{\alpha} \tilde{n}_{\alpha} = e_{\alpha} \int \delta f_{\alpha} dv, \quad (8)$$

$$\mathbf{J}_{\alpha} = e_{\alpha} \int \mathbf{v} \delta f_{\alpha} dv. \quad (9)$$

考虑到电荷守恒定律

$$\nabla \cdot \mathbf{J}_{\alpha} + \frac{\partial \rho_{\alpha}}{\partial t} = 0. \quad (10)$$

(9)式可写为

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_{\alpha} &= e_{\alpha} \int \mathbf{v} \frac{i e_{\alpha}}{k_B T_{\alpha}} \frac{(\mathbf{E} \cdot \mathbf{v}) f_{\alpha 0}}{\omega + i \nu_{\alpha n} - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}} dv \\ &+ \frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{J}_{\alpha}}{\omega} \int \mathbf{v} \frac{i \nu_{\alpha n} f_{\alpha 0}}{(\omega + i \nu_{\alpha n} - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}) n_{\alpha 0}} dv. \end{aligned} \quad (11)$$

(11)式两边点乘波矢  $\mathbf{k}$ , 并考虑到  $\mathbf{k}$  为任意波矢可得

$$\mathbf{J}_{\alpha} = \frac{\frac{i e_{\alpha}^2}{k_B T_{\alpha}} \int \mathbf{v} \frac{(\mathbf{E} \cdot \mathbf{v}) f_{\alpha 0}}{\omega + i \nu_{\alpha n} - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}} dv}{1 - \int \frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}}{\omega} \frac{i \nu_{\alpha n} f_{\alpha 0}}{(\omega + i \nu_{\alpha n} - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}) n_{\alpha 0}} dv}. \quad (12)$$

将  $\mathbf{J}_{\alpha}$  写成分量式  $J_i$ , 由  $J_i = \sigma_{ij} E_j$  可得

$$\sigma_{ij} = \frac{\frac{i e_{\alpha}^2}{k_B T_{\alpha}} \int v_i v_j \frac{f_{\alpha 0}}{(\omega + i \nu_{\alpha n} - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v})} dv}{1 - \int \frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}}{\omega} \frac{i \nu_{\alpha n} f_{\alpha 0}}{(\omega + i \nu_{\alpha n} - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}) n_{\alpha 0}} dv}. \quad (13)$$

考虑到介电张量和电导率的关系  $\epsilon_{ij} = \delta_{ij} + i \sigma_{ij} / (\epsilon_0 \omega)$  得

$$\begin{aligned} \epsilon_{ij} &= \delta_{ij} - \frac{e_{\alpha}^2}{\epsilon_0 \omega k_B T_{\alpha}} \\ &\times \frac{\int v_i v_j \frac{f_{\alpha 0}}{\omega + i \nu_{\alpha n} - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}} dv}{1 - \int \frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}}{\omega} \frac{i \nu_{\alpha n} f_{\alpha 0}}{(\omega + i \nu_{\alpha n} - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}) n_{\alpha 0}} dv}. \end{aligned} \quad (14)$$

对于各向同性等离子体, 介电张量可用横向系数  $\epsilon^{\text{tr}}$  和纵向介电系数  $\epsilon^{\text{lo}}$  表示为

$$\epsilon_{ij} = \left( \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right) \epsilon^{\text{tr}} + \frac{k_i k_j}{k^2} \epsilon^{\text{lo}}. \quad (15)$$

这里  $k_i$  和  $k_j$  表示波矢  $\mathbf{k}$  的直角分量, 通过张量运算和积分可以得到

$$\epsilon^{\text{lo}} = 1 + \frac{\omega_{pa}^2}{k^2 V_{T_{\alpha}}^2} \frac{W(\xi)}{1 - \frac{i \nu_{\alpha n}}{\omega + i \nu_{\alpha n}} (1 - W(\xi))} \quad (16)$$

$$\epsilon^{\text{tr}} = 1 - \frac{\omega_{pa}^2}{\omega(\omega + i \nu_{\alpha n})} \frac{1 - W(\xi)}{1 + \frac{i \nu_{\alpha n}}{\omega} W(\xi)}. \quad (17)$$

这里  $\omega_{pa} = \sqrt{\frac{e N_{\alpha}}{\epsilon_0 m_{\alpha}}}$  是带电粒子  $\alpha$  的等离子体频率,

$V_{T_{\alpha}} = \sqrt{\frac{k_B T_{\alpha}}{m_{\alpha}}}$  是带电粒子  $\alpha$  的热速度,  $W(\xi)$  被称为

色散函数<sup>[9]</sup>,  $\xi = \frac{\omega + i \nu_{\alpha n}}{k V_{T_{\alpha}}}$ . 满足  $|\xi| = |(\omega + i \nu_{\alpha n}) / k V_{T_{\alpha}}| \gg 1$  条件的尘埃等离子体被称为“冷”尘埃等

离子体, 对“冷”尘埃等离子体

$$\begin{aligned} W(\xi) &= i \left( \frac{\pi}{2} \right)^{1/2} \xi \exp\left(-\frac{\xi^2}{2}\right) - \frac{1}{\xi^2} \\ &- \frac{3}{\xi^4} - \dots - \frac{(2n-1)!!}{\xi^{2n+2}}. \end{aligned} \quad (18)$$

弱电离尘埃等离子体均可以被看作“冷”尘埃等离

体. 温度极高时 ( $T \approx 10^9$  K),  $|\xi| = |(\omega + i\nu_{an})/kV_{T_e}| \ll 1$  被称为“热”等离子体, 尘埃粒子在这种等离子体中已被气化并完全电离, 不能以尘埃粒子形式存在, 这里不予讨论. 要说明的是, 上述含  $\alpha$  指标的各式实际为电子和离子的求和, 但由外场引起的电子电流远大于离子电流, 对电导率张量和介电张量的贡献主要来自电子, 求和中常忽略离子的贡献.

#### 4. 弱电离尘埃等离子体介电张量表达式

在弱电场扰动下, 电子和离子的充电电流使尘埃粒子的带电量  $q_d$  在平衡值  $q_{d0}$  附近有一个起伏  $\delta q_d$ , 且

$$\frac{\partial \delta q_d}{\partial t} = \sum_{\alpha=e,i} I_{\alpha}. \quad (19)$$

(19) 式已考虑到  $q_{d0}$  不随时间和空间变化以及高频电场不能使惯性很大的尘埃粒子产生定向的运动速度;  $I_{\alpha}$  表示在弱电场作用下的充电电流

$$I_{\alpha} = e_{\alpha} \int_{v_{am}}^{\infty} \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\sigma}_{\alpha}^d f_{\alpha} dv. \quad (20)$$

(20) 式中积分下限  $v_{am}$  是电子对尘埃粒子充电所应具有的最小速度<sup>[10]</sup>,  $\boldsymbol{\sigma}_{\alpha}^d$  是充电截面矢量, 其大小为

$$\sigma_{\alpha}^d = \pi r_d^2 \left( 1 - \frac{2e_{\alpha} \phi_d}{m_{\alpha} v_{\alpha}^2} \right). \quad (21)$$

(21) 式中电子  $e_{\alpha} = -e$ , 离子  $e_{\alpha} = e$ , 这里假定了离子是一次电离的;  $r_d$  是尘埃粒子半径 (假设尘埃粒子是球形);  $\phi_d$  是弱场作用下的尘埃粒子浮动势,

$$\begin{aligned} \phi_d &= \phi_{d0} + \delta \phi \\ &= \frac{q_{d0} + \delta q_d}{4\pi \epsilon_0 r_d}. \end{aligned} \quad (22)$$

考虑到  $\delta f_{\alpha} \ll f_{\alpha 0}$  和  $\delta \phi \ll \phi_{d0}$ , 忽略充电电流的二阶微扰项, 由(20)–(22)式给出充电电流

$$I_{\alpha} = I_{\alpha 0} + I_{\alpha 1} + \pi r_d^2 e_{\alpha} \int_{v_{amin}}^{\infty} v_{\alpha} \left( -\frac{2e_{\alpha} \delta \phi}{m_{\alpha} v_{\alpha}^2} \right) f_{\alpha 0} dv_{\alpha} \quad (23)$$

$$I_{\alpha 0} = \pi r_d^2 e_{\alpha} \int_{v_{amin}}^{\infty} v_{\alpha} \left( 1 - \frac{2e_{\alpha} \phi_{d0}}{m_{\alpha} v_{\alpha}^2} \right) f_{\alpha 0} dv_{\alpha}, \quad (24)$$

$$I_{\alpha 1} = \pi r_d^2 e_{\alpha} \int_{v_{amin}}^{\infty} v_{\alpha} \left( 1 - \frac{2e_{\alpha} \phi_{d0}}{m_{\alpha} v_{\alpha}^2} \right) \delta f_{\alpha} dv_{\alpha}. \quad (25)$$

把(23)式右边第三项积分并代入(19)式, 考虑充电平衡条件  $\sum_{\alpha=e,i} I_{\alpha 0} = I_{\alpha 0} + I_{i0} = 0$ , 可得

$$\frac{\partial \delta q_d}{\partial t} + \nu_{ch} \delta q_d = \sum_{\alpha=e,i} I_{\alpha 1}. \quad (26)$$

(26) 式即为充电方程,  $\nu_{ch}$  是电荷弛豫速率, 反映尘埃电荷回到平衡值的快慢程度. 其近似表达式为<sup>[11]</sup>

$$\nu_{ch} = \frac{r_d}{\sqrt{2\pi}} \frac{\omega_{pi}^2}{V_{Ti}} \left( 1 + \frac{T_i}{T_e} + \frac{Ze^2}{r_d k_B T_e} \right). \quad (27)$$

设尘埃粒子的浓度为  $N_d$ , 则弱电场作用下尘埃粒子的电荷密度增量  $\rho_{dl}$  的频域形式为

$$\begin{aligned} \rho_{dl} &= \delta q_d N_d \\ &= \frac{i N_d}{\omega + i \nu_{ch}} \sum_{\alpha=e,i} I_{\alpha 1}. \end{aligned} \quad (28)$$

设  $\mathbf{J}_{dl}$  是弱电场作用下的充电电流密度矢量, 它与  $\rho_{dl}$  满足电荷守恒定律, 其频域形式的关系是

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{J}_{dl} = \omega \rho_{dl}. \quad (29)$$

考虑到(9)(21)(25)和(28)式以及  $\delta \phi \ll \phi_{d0}$ , 可将(29)式写为

$$\begin{aligned} \mathbf{k} \cdot \mathbf{J}_{dl} &= \frac{i \omega N_d}{\omega + i \nu_{ch}} \sum_{\alpha=e,i} e_{\alpha} \int \boldsymbol{\sigma}_{\alpha}^d \cdot \mathbf{v} \delta f dv \\ &= \frac{i \omega N_d}{\omega + i \nu_{ch}} \sum_{\alpha=e,i} \bar{\boldsymbol{\sigma}}_{\alpha}^d \cdot \mathbf{J}_{\alpha}. \end{aligned} \quad (30)$$

因  $\mathbf{J}_{\alpha}$  以及  $\mathbf{J}_{dl}$  与电场方向一致, 可令  $\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{\alpha}^d = \frac{\mathbf{k}}{k} \bar{\sigma}_{\alpha}^d$ ,

代入(30)式整理得

$$\mathbf{J}_{dl} = \frac{i \omega N_d}{\omega + i \nu_{ch}} \frac{\bar{\sigma}_{\alpha}^d}{k} \mathbf{J}_{\alpha}. \quad (31)$$

将(12)式代入(31)式得

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_{dl} &= \frac{i \omega N_d}{\omega + i \nu_{ch}} \frac{\bar{\sigma}_{\alpha}^d}{k} \\ &\times \frac{\frac{i e_{\alpha}^2}{k_B T_{\alpha}} \int \mathbf{v} \frac{(\mathbf{E} \cdot \mathbf{v}) f_{\alpha 0}}{\omega + i \nu_{an} - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}} dv}{1 - \int \frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}}{\omega} \frac{i \nu_{an} f_{\alpha 0}}{(\omega + i \nu_{an} - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}) n_{\alpha 0}} dv}. \end{aligned} \quad (32)$$

由于尘埃粒子的存在, 弱电场作用下的总电流密度

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_{\alpha} - \mathbf{J}_{dl} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{E}. \quad (33)$$

由(31)–(33)式不难给出弱电离尘埃等离子体的纵向和横向介电张量为

$$\begin{aligned} \epsilon^{lo} &= 1 + \left( 1 - \frac{i \omega N_d}{\omega + i \nu_{ch}} \frac{\bar{\sigma}_{\alpha}^d}{k} \right) \frac{\omega_{pa}^2}{k^2 V_{\alpha}^2} \\ &\times \frac{W(\xi)}{1 - \frac{i \nu_{an}}{\omega + i \nu_{an}} (1 - W(\xi))}, \end{aligned} \quad (34)$$

$$\begin{aligned} \epsilon^{tr} &= 1 - \left( 1 - \frac{i \omega N_d}{\omega + i \nu_{ch}} \frac{\bar{\sigma}_{\alpha}^d}{k} \right) \frac{\omega_{pa}^2}{\omega + i \nu_{an}^2} \\ &\times \frac{1 - W(\xi)}{1 - \frac{i \nu_{an}}{\omega + i \nu_{an}} (1 - W(\xi))}. \end{aligned} \quad (35)$$

## 5. “冷”尘埃等离子体电导率和介电常数

由于“冷”等离子体  $|\xi| = |(\omega + i\nu_{an})/kV_{T_a}| \gg 1$  (18) 式可简化为

$$W(\xi) = -\frac{k^2 V_{T_a}^2}{(\omega + i\nu_{an})^2}. \quad (36)$$

将(36)式代入(34)和(35)式,并考虑到  $|W(\xi)| \ll 1$  可得

$$\begin{aligned} \epsilon^{\text{tr}} = \epsilon^{\text{lo}} = 1 - \frac{\omega_{pa}^2}{\omega(\omega + i\nu_{an})} \\ + \frac{i\omega_{pa}^2 N_d \bar{\sigma}_a^d}{k(\omega + i\nu_{an})(\omega + i\nu_{ch})}. \end{aligned} \quad (37)$$

(37)式说明,对“冷”尘埃等离子体,其纵向介电张量与横向介电张量相等.(37)式中  $\omega_{pa}^2 = e_a^2 N_a^2 / (\epsilon_0 m_a)$ ,  $\bar{\sigma}_a^d \approx \pi r_d^2$ .

由弱电离尘埃等离子体复介电常数  $\epsilon_{\text{complex}} = \epsilon_0 \epsilon^{\text{tr}} = \epsilon_0 \epsilon^{\text{lo}}$  可得尘埃等离子体电导率和介电常数分别为

$$\begin{aligned} \sigma = \epsilon_0 \frac{\omega_{pa}^2 \nu_{an}}{\omega^2 + \nu_{an}^2} + \eta \frac{\omega^2 - \nu_{ch} \nu_{an}}{(\omega^2 + \nu_{ch}^2)(\omega^2 + \nu_{an}^2)}, \quad (38) \\ \epsilon = \epsilon_0 \left( 1 - \frac{\omega_{pa}^2}{\omega^2 + \nu_{an}^2} \right) + \eta \frac{\nu_{ch} + \nu_{an}}{(\omega^2 + \nu_{ch}^2)(\omega^2 + \nu_{an}^2)}. \end{aligned} \quad (39)$$

(38)和(39)式中,  $\eta = e^2 \pi r_d^2 N_e N_d v_\phi / m_e$  是充电响应因子,且  $v_\phi = \frac{\omega}{k}$  (计算时可令  $v_\phi = c$ ),这正是文献[7]给出的结果.

## 6. 固体火箭喷焰微波衰减常数和相位常数的频率特性

首先估计(38)和(39)式中的相关特征参数.固体火箭喷焰中的电子主要来自推进剂中含量极少的K和Na的电离,由此电离产生的电子浓度由下式决定<sup>[12]</sup>:

$$N_e = 1.332 \times 10^{13} \sqrt{PW_A} \sqrt{T} \exp\left(-\frac{5805I}{T}\right). \quad (40)$$

(40)式中  $P, T$  分别为喷焰的压强与温度,  $I$  为碱金属电离电位势, K 的电离电位势是 4.339 eV, Na 的电离电位势是 5.138 eV. 碱金属的含量分别是  $W_K = 30 \times 10^{-6}$ ,  $W_{Na} = 100 \times 10^{-6}$ . 固体火箭喷焰中  $\text{Al}_2\text{O}_3$  尘埃粒子是由 Al 粉的燃烧形成的,尘埃粒子半径的统计平均值取  $10 \mu\text{m}$ , 尘埃粒子浓度取  $10^{13}/\text{m}^3$ ; 火箭喷焰的微波衰减区的温度一般在 1700—2200 K, 将  $P = 10^5 \text{ Pa}$ ,  $T = 1800 \text{ K}$  代入(40)式可得火箭喷焰在此种环境下的电子浓度,电子与分子的碰撞频率可由  $\nu_{en} = 2 \times 10^7 P/\sqrt{T}$  得到;电荷弛豫速率通过(27)式给出.计算时考虑到尘埃粒子电荷数  $Z$  不超过  $10^3$  的量级,忽略(27)式括号中的第三项.令  $\phi = c$ , 由此给出  $N_e \approx 4.53 \times 10^{16} \text{ m}^{-3}$ ,  $\nu_{en} = 4.7 \times 10^{10}$ ,  $\omega_{pe}^2 = 1.44 \times 10^{20}$ ,  $\nu_{ch} \approx 4.2 \times 10^4$ ,  $\eta \approx 1.2 \times 10^{21}$ .

由介质中的横波存在条件可导出弱电离尘埃等离子体的微波衰减常数和相位常数分别为

$$\alpha = \frac{\omega}{\sqrt{2}c} \sqrt{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2 + \nu_{\text{eff}}^2} + \epsilon_{\text{dr}}\right)^2 + \left(\frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2 + \nu_{\text{eff}}^2} \frac{\nu_{\text{eff}}}{\omega} + \frac{\sigma_d}{\epsilon_0 \omega}\right)^2} - \left(1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2 + \nu_{\text{eff}}^2} + \epsilon_{\text{dr}}\right)}, \quad (41)$$

$$\beta = \frac{\omega}{\sqrt{2}c} \sqrt{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2 + \nu_{\text{eff}}^2} + \epsilon_{\text{dr}}\right)^2 + \left(\frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2 + \nu_{\text{eff}}^2} \frac{\nu_{\text{eff}}}{\omega} + \frac{\sigma_d}{\epsilon_0 \omega}\right)^2} + \left(1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2 + \nu_{\text{eff}}^2} + \epsilon_{\text{dr}}\right)}. \quad (42)$$

这里,

$$\sigma_d = \eta \frac{\omega^2 - \nu_{ch} \nu_{an}}{(\omega^2 + \nu_{ch}^2)(\omega^2 + \nu_{an}^2)}, \quad (43)$$

$$\epsilon_{\text{dr}} = \frac{\eta}{\epsilon_0} \frac{\nu_{\text{eff}} + \nu_{ch}}{(\omega^2 + \nu_{\text{eff}}^2)(\omega^2 + \nu_{ch}^2)}. \quad (44)$$

将固体火箭喷焰相关特征参数代入(41)和(42)式,可得到固体火箭喷焰的微波衰减常数和相位常数的频率特性,结果如图1和图2所示.由图1可

知,在 10—100 GHz 频段,随频率升高,由尘埃等离子体理论给出的微波衰减常数远大于等离子体理论给出的微波衰减常数.固体火箭喷焰微波衰减常数的典型测量值为 4 dB/m,由尘埃等离子体理论给出的计算值在量级上与典型测量值一致.由图2可知,上述条件下,当微波频率大于 15 GHz 时,两种理论给出的相位常数频率特性趋于一致,低于 15 GHz 时,考虑尘埃粒子作用的相位常数与等离子体理论给

出的结果有很大不同.

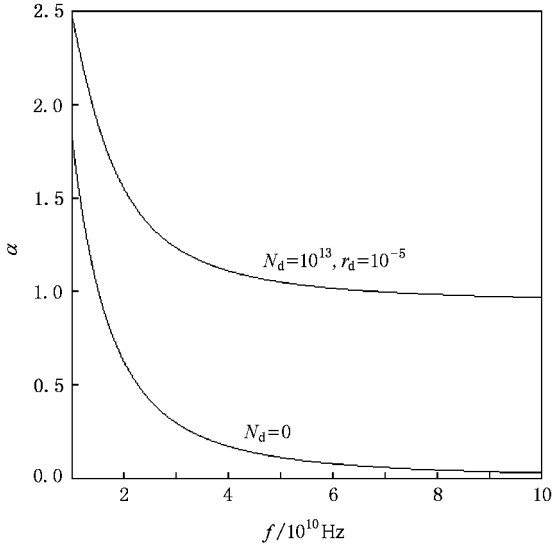


图1 微波衰减常数的频率特性

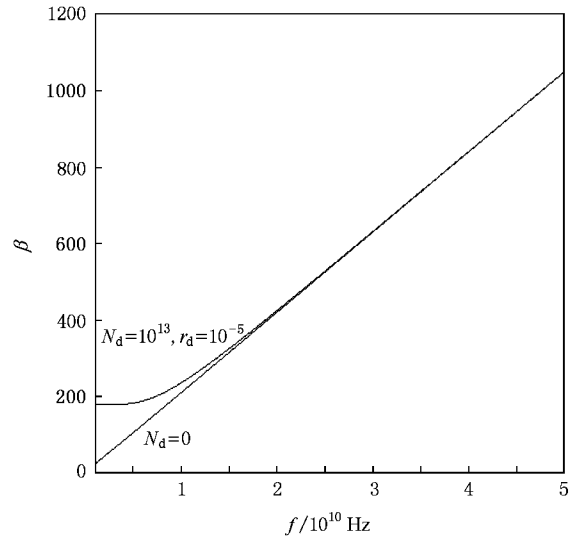


图2 微波相位常数的频率特性

## 7. 结 论

本文在统计理论上给出了弱电离尘埃等离子体介电张量表达式,从理论上对文献[7]做了进一

步完善,证明了忽略磁场情形下的“冷”尘埃等离子体,其纵向和横向介电张量相等.在此理论上计算了固体火箭喷焰的微波衰减常数和相位常数,结果与实验给出的典型测量值在一个量级上,改善了等离子体理论计算值远小于实测值的结果.

- [ 1 ] Peng P G , Liu Q 1991 *J. Propul. Technol.* **4** 57 ( in Chinese ) [ 彭培根、柳青 1991 推进技术 **4** 457 ]
- [ 2 ] Wang C Q 1992 *J. Solid Rocket Technol.* **2** 14 ( in Chinese ) [ 王长起 1992 固体火箭技术 **2** 14 ]
- [ 3 ] Abe T , Fujita K , Ogawa H , Funaki I 2000 *Am. Inst. Aeronaut. Astronaut.* 2484
- [ 4 ] Havnes O , Angelis U D , Bingham R , Goetz C K , Morfill G E , Tsytovich V 1990 *J. Atmos. Terr. Phys.* **52** 637
- [ 5 ] Havnes O , Melandsø F , Hoz C L , Aslaksen T K 1992 *Phys. Scripta* **45** 535
- [ 6 ] Rapp M , Lübken F J 2004 *Atmos. Chem. Phys.* **4** 2601
- [ 7 ] Shi Y X , Ge D B , Wu J 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 5318 ( in

Chinese ) [ 石雁祥、葛德彪、吴健 2006 物理学报 **55** 5318 ]

- [ 8 ] Alexandrov A F , Bogdankevich L S , Rukhadze A A 1984 *Principles of Plasma Electrodynamics* ( Berlin , Heidelberg , New York , Tokyo : Springer-Verlag )
- [ 9 ] Ichmaru S 1973 *Basic Principles of Plasma Physics : A Statistical Approach* ( London : Benjamin )
- [ 10 ] Ma J X , Yu M Y 1994 *Phys. Rev. E* **50** 2431
- [ 11 ] Tsytovich V N , Havnes O 1993 *Comments Plasma Phys.* **15** 267
- [ 12 ] Shi Y X , Ge D B , Wu J 2007 *Chin. J. Geophys.* **50** 1005 ( in Chinese ) [ 石雁祥、葛德彪、吴健 2007 地球物理学报 **50** 1005 ]

# The research on the dielectric tensor of weakly ionized dust plasma<sup>\*</sup>

Shi Yan-Xiang<sup>1)†</sup> Wu Jian<sup>2)</sup> Ge De-Biao<sup>3)</sup>

<sup>1</sup> *Department of Physics, Yili Normal University, Yining 835000, China*

<sup>2</sup> *National Key Laboratory of Electromagnetic Environment, China Research Institute of Radiowave Propagation, Beijing 102206, China*

<sup>3</sup> *College of Science, Xidian University, Xi'an 710071, China*

(Received 4 April 2008; revised manuscript received 4 February 2009)

## Abstract

The dielectric tensor for the weakly ionized dust plasma is deduced by solving the Boltzmann's equation and equation for charging of dust particles. It was proved that longitudinal and transverse dielectric susceptibility are equal for "cold" dust plasma, the theory of electromagnetic property for the weakly ionized dust plasma has been revised.

**Keywords** : weakly ionized dust plasma, Boltzmann's equation, charging equation, dielectric tensor

**PACC** : 5225M, 5225Z, 5225D

<sup>\*</sup> Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grand No. 10865005) and the Key Program of the Scientific Research Foundation of Yili Normal University, China (Grand No. 2007ZD007).

<sup>†</sup> E-mail: stonm1234@yahoo.com.cn