

# 二维完全阻挫 XY 模型的动力学指数<sup>\*</sup>

雷晓蔚<sup>†</sup> 赵晓雨

(重庆文理学院物理系, 重庆 402160)

(2008 年 10 月 23 日收到, 2008 年 12 月 20 日收到修改稿)

采用大规模动力学蒙特卡罗模拟方法, 对二维完全阻挫 XY 模型的 Kosterlitz-Thouless (KT) 型相变展开数值研究. 系统从有序初始态出发演化到高于 KT 相变的温度, 以普适的动力学标度形式为基础, 通过测量磁化和 Binder 累积量, 得出动力学关联时间和平衡态空间关联长度, 确定出更精确的动力学指数  $z$ . 特别是建议并证实了一种在 KT 相变温度以上 ( $T > T_{KT}$ ) 独立判断动力学指数  $z$  的方法. 模拟结果表明, 动力学指数  $z \approx 2$ , 这与在相变温度以下 ( $T < T_{KT}$ ) 测量的结果一致.

关键词: 蒙特卡罗法, 动力学指数, Kosterlitz-Thouless 相变, 二维完全阻挫 XY 模型

PACC: 7115Q, 0570J, 7540C, 7540D

## 1. 引言

二维 XY 模型和二维完全阻挫 (fully frustrated) XY (FFXY) 模型可以很好地描写超流体和超导体的临界性质, 并已得到了深入的研究, 两种模型都表现为 Kosterlitz-Thouless (KT) 型相变<sup>[1-3]</sup>, FFXY 模型还要经历一个额外的二阶相变<sup>[4-6]</sup>. 近几年对这两种典型模型的研究已经取得了一些进展<sup>[7-13]</sup>, 但对 XY 特别是 FFXY 模型的数值模拟仍然面临巨大的困难. 这是因为呈指数发散的关联长度和导致临界慢化变得更为严重的阻挫因素. 这种无序和掺杂系统的一个典型特征是动力学十分缓慢, 甚至不存在真正的平衡态. 在数值模拟方面, 体现为临界慢化和标度行为的修正. 无序和掺杂系统的数值模拟是物理学研究的难题之一. 迄今为止, 还没有能应用于 FFXY 模型有效算法, 人们对 FFXY 模型的物理机制尚不十分明确, 文献中对 KT 相变温度和临界指数的报道也有些偏差<sup>[5, 10, 14-17]</sup>.

运用短时动力学可以避免临界慢化的困扰, 同时也容易控制有限尺寸效应, 因为在早期非平衡的空间关联长度很小. 这是一种行之有效的研究非平衡态动力学的方法<sup>[18-22]</sup>, 系统平衡态的指数可以通过分析非平衡态动力学标度行为来获得<sup>[6, 18, 23-26]</sup>.

现在已知, 始于无序态的二维 XY 模型和 FFXY 模型中的动力学标度行为存在对数修正<sup>[27-29]</sup>, 这种修正与自由涡旋有关. 一般情况下, 对数修正会使临界指数的测量更困难. 而对于从有序态出发的动力学过程, 由于非零磁化抑制了涡旋的效应, 因此不存在对数修正. 随着研究的深入, 测量出了越来越精确的临界指数<sup>[24, 30]</sup>. 此外, 二维 XY 模型在温度高于 KT 相变温度时, 从分析磁化的动力学标度形式得到了关联时间  $\xi^z$ , 进而得到平衡态的关联长度  $\xi^{[31]}$ . 现已证实二维 XY 模型具有指数发散的关联长度.

然而, 无论是平衡态还是在远离平衡态, 对 FFXY 模型的模拟要比 XY 模型困难得多. 由于  $T = T_{KT}$  时关联长度无穷大, 因此数值模拟时设定的温度总是在  $T_{KT}$  附近. 从有序态出发的热力学涨落较小, 模拟相对简单, 所以从有序态出发演化到低于相变温度 ( $T < T_{KT}$ ) 的过程已经得到研究, 结果表明 FFXY 模型始于有序态的动力学过程与 XY 模型类似<sup>[24]</sup>. 然而还不清楚该模型从无序态出发的动力学过程. 在高于 KT 相变的温度 ( $T > T_{KT}$ ) 下, 能否得到关联时间进而得到平衡态的空间关联长度, 尤其是发散的关联长度, 这些问题的研究通过测量磁化及其涨落已经初步展开<sup>[16, 17]</sup>, 但根据磁化的标度拟合只能得到关联时间  $\xi^z$  和指数  $\eta/2z$ , 而不能直接测量关联长度  $\xi$  和动力学指数  $z$ . 为了计算指数  $\eta$  和平

<sup>\*</sup> 重庆市教育委员会科学技术研究基金 (批准号: KJ081207, KJ091212) 资助的课题.

<sup>†</sup> E-mail: xwlei5@126.com

平衡态关联长度之比  $\xi_1/\xi_2$ , 必须要把在小于  $T_{KT}$  温度下测量的  $z$  值作为已知条件<sup>[31]</sup>. 但这可能会带来问题, 因为我们并不清楚在高于  $T_{KT}$  的温度下  $z = 2$ <sup>[24]</sup> 是否依然成立. 因此通过数值模拟的方法直接测量出高于  $T_{KT}$  温度时的动力学指数  $z$  变得很重要.

本文对 FFXY 模型展开了大规模的蒙特卡罗模拟. 系统从有序态出发, 演化到高于 KT 相变的温度 ( $T > T_{KT}$ ), 通过测量磁化和 Binder 累积量, 以短时动力学标度形式为基础, 得到关联长度  $\xi$ , 确定出更为精确的动力学指数  $z$ . 通过仔细的标度分析, 我们主张可定义恰当的 Binder 累积量来直接测量动力学指数  $z$ . 这是一种在  $T > T_{KT}$  温度条件下独立判断  $z$  的新方法.

## 2. 模型和动力学标度行为

### 2.1. 完全阻挫 XY 模型

考虑近邻相互作用的二维 FFXY 模型的哈密顿量可表达为

$$-\frac{1}{k_B T} H = K \sum_{i,j} f_{ij} \mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_j, \quad (1)$$

其中  $\mathbf{S}_i = (S_{ix}, S_{iy})$ , 表示在格点  $i$  上的平面单位矢量,  $i, j$  代表最近邻求和. 在竖直方向, 耦合系数一半为正另一半为负, 即  $f_{ij} = \pm 1$  相间取值, 这就是所谓的阻挫. 与 XY 模型不同的是, 从有序态出发的 FFXY 模型的基态初矢量不是同一个方向, 一个正方点格按取向可分为四个子格<sup>[17, 24]</sup>.

假设基态的自旋构形是  $\{S_i^{(0)}\}$ , 磁化及其二阶矩可定义为

$$M(t) \equiv \sum_k \sum_{(k,k)} \mathbf{S}_{i,k}(t) \cdot \mathbf{S}_{i,k}^{(0)} / L^2, \quad (2)$$

$$M^2(t) \equiv \sum_k \left[ \sum_{(k,k)} \mathbf{S}_{i,k}(t) \cdot \mathbf{S}_{i,k}^{(0)} \right]^2 / L^4. \quad (3)$$

这里  $\cdot$  表示对微观初始状态和随机数的统计平均,  $k = 1, 2, 3, 4$  代表四个子格.

### 2.2. 磁化的动力学标度行为

已经证实, 在二阶相变或 KT 相变点附近, 在动力学演化的早期就已经存在标度形式. 忽略有限尺寸效应, 磁化  $k$  阶矩的标度形式可表示为<sup>[18, 31, 32]</sup>

$$M^{(k)}(t, \xi) = b^{-k\eta/2} M^{(k)}(b^{-z}t, b^{-1}\xi) \quad (k = 1, 2), \quad (4)$$

其中  $M^{(1)}(t) \equiv M(t)$  代表磁化,  $\xi$  是平衡态的空间关联长度,  $\eta$  是静态指数,  $z$  是动力学指数,  $b$  是任意标度因子.

根据标度形式, 可以将两条不同温度下的磁化曲线重叠在一起. 具体做法是将  $M_i(t_1, \xi_1)$  乘以因子  $b^\alpha$ , 而时间  $t_1$  变成  $t_1/b$ , 其中  $\alpha = \eta(2z)$ ,  $b = \xi_1/\xi_2 = t_1/t_2$ . 利用标度分析可知,  $\xi$  代表动力学系统的关联时间, 呈指数发散<sup>[17]</sup>,

$$\xi(\tau) = a \exp(b\tau^{-\nu}), \quad (5)$$

其中  $\tau$  是约化温度,  $\tau = (T - T_{KT})/T_{KT}$ ;  $\nu$  是由平衡态定义的临界指数<sup>[1, 2]</sup>, 在平均场近似下  $\nu = 1/2$ ;  $a$  和  $b$  是常数.

以下两点需要特别说明 (1) 和 (5) 式中的指数部分温度略高于  $T_{KT}$ , 而 (4) 式中的  $\eta$  和  $z$  理论上都是定义在  $T_{KT}$  上的. (2) 根据磁化的标度拟合只能得到关联时间  $\xi$  和指数  $\eta(2z)$ , 而不能直接测量关联长度  $\xi$  和动力学指数  $z$ . 事实上, 到目前为止还不完全清楚该如何在  $T > T_{KT}$  的情形下去估计动力学指数  $z$ . 经过标度分析, 我们定义一个适合 FFXY 模型的 Binder 累积量来直接测量动力学指数  $z$ .

### 2.3. Binder 累积量的动力学标度行为

与时间有关的 Binder 累积量  $U = M^{(2)}/M^2 - 1$ , (3) 式中的  $M^{(2)}$  只代表 4 个子格中的一个, 所以对整个 FFXY 系统, 上述定义应改写为  $U = 4M^{(2)}/M^2 - 1$ .  $U$  的标度形式与  $M$  类似, 但还与格点尺寸  $L$  有关<sup>[18]</sup>, 可表示为

$$U(t, \xi, L) = U(b^{-z}t, b^{-1}\xi, b^{-1}L). \quad (6)$$

这里  $L$  对  $U$  有着非常重要的作用. 在动力学演化早期, 非平衡空间关联长度很小, 所以  $U \propto 1/L^d$  ( $d$  表示系统的空间维度)<sup>[18]</sup>. 基于这一点 (6) 式可简化为

$$U(t, \xi) = b^d U(b^{-z}t, b^{-1}\xi). \quad (7)$$

通过对一对温度 ( $T_1, T_2$ ) 下的 Binder 累积量进行标度拟合, 我们可以得到动力学指数  $d/z$ 、关联时间之比  $\xi_1/\xi_2$  或  $\xi_1/\xi_2$ . 这就提供了一种方法, 可以确认从磁化的标度拟合测量出的  $\xi_1/\xi_2$ . 更重要的是, 在 KT 相变温度以上 ( $T > T_{KT}$ ), 提供了一种独立判断动力学指数  $z$  的方法 (通过测量  $d/z$ ). 这样一种测量指数  $z$  方法, 据我们所知还没有人实现过.

如果不知道  $U \propto 1/L^d$ , 或者是这样的行为无效, 那么基于 (6) 式的标度拟合将十分复杂, 就要对比不

同温度下不同格点尺寸的 Binder 累积量  $U$ 。所以在数值模拟中必须仔细分析  $U \propto 1/L^d$  的行为。

### 3. 数值模拟

从完全有序初态出发,以“热浴 (heat bath) 迭代算法<sup>[30]</sup>构造蒙特卡罗迭代过程,按动力学 A 模型<sup>[33]</sup>进行系统演化。

#### 3.1. 磁化

为克服有限尺寸效应的影响,模拟的格点尺度达  $L = 1024$ ,演化时间达到  $10^5$  步,取超过 100 个随机数的样本作平均。按以上所述的标度拟合,可以得到不同温度下关联时间之比  $\xi_1/\xi_2$  和指数  $\eta(2z)$ ,图 1 是以较低温度对 (0.457, 0.460) 为例的拟合情况。图中虚线表示  $T = 0.457$  的磁化曲线  $M_1(t)$ ,实线表示  $T = 0.460$  的磁化曲线  $M_2(t)$ 。将  $T = 0.457$  的曲线进行重新标度后,以  $M_1(t)b^a$  为纵坐标,  $t/b$  为横坐标,这样的拟合结果用圆点表示在图 1 中,可见拟合效果很好。拟合得到  $\xi_1/\xi_2 = 2.21(2)$ ,  $\eta/2z = 0.096(10)$  (括号内的数值代表涨落)。从其他温度对拟合得到的  $\xi_1/\xi_2$  值列于表 1。

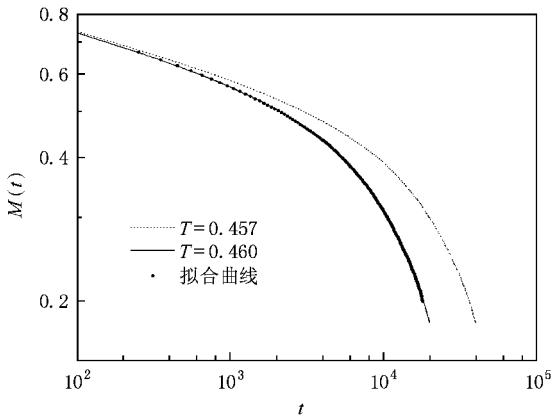


图 1 二维 FFXY 模型在  $T$  为 0.457, 0.460 温度下两条磁化曲线的标度拟合  $L = 1024$

表 1 二维 FFXY 模型在不同温度下通过测量磁化得到的  $\xi_1/\xi_2$  拟合值和  $z$  的计算结果

$(T_1, T_2)$	$\xi_1/\xi_2^{[14]}$	$\xi_1/\xi_2$	$z$
(0.460, 0.470)	1.526	4.054	3.312
(0.470, 0.475)	1.309	1.517	1.548
(0.475, 0.485)	1.291	1.850	2.409
(0.485, 0.500)	1.241	1.872	2.904

#### 3.2. Binder 累积量

因为在动力学演化早期, Binder 累积量的行为类似于  $U \propto 1/L^d$ 。  $L$  要有足够大才会有  $U \propto 1/L^d$  行为,但格点尺寸太大会导致较大的涨落,所以要合理地选择格点尺寸。在数值模拟中选取  $L = 256$ ,用几千个样本来做统计平均。再对比  $L = 256$  和  $L = 1024$  的结果,观察到了  $U \propto 1/L^d$  行为。

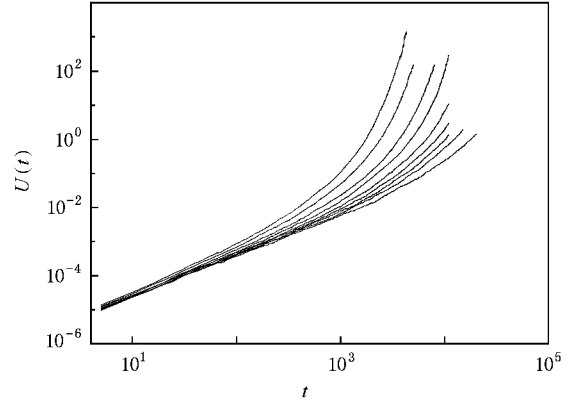


图 2 二维 FFXY 模型在不同温度下  $U(t)$  随  $t$  的变化  $L = 256$ , 曲线从上到下温度依次为  $T$  为 0.500, 0.490, 0.480, 0.475, 0.470, 0.467, 0.465, 0.463, 0.460

图 2 所示为  $L = 256$  时,不同温度下的 Binder 累积量随时间的变化规律。通过对两个温度下  $U$  的标度拟合,可以确定指数  $d/z, \xi_1/\xi_2$ 。图 3 是以温度对 (0.470, 0.480) 为例进行拟合的结果,图中虚线表示  $T = 0.470$  的 Binder 累积量曲线  $U_1(t)$ ,实线表示  $T = 0.480$  的 Binder 累积量曲线  $U_2(t)$ 。将  $U_1(t)$  曲线按标度律进行重新标度后用圆点表示在图 3 中。

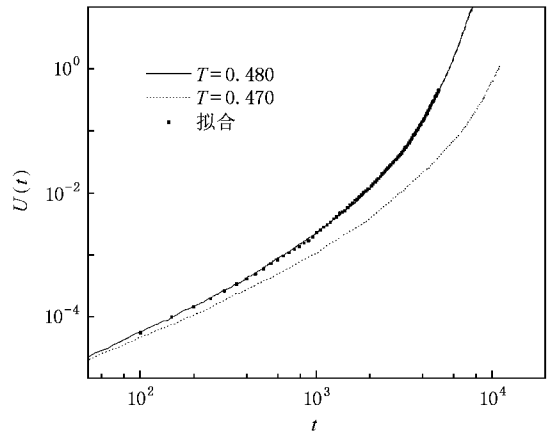


图 3 二维 FFXY 模型在  $T$  为 0.470, 0.480 温度下两条 Binder 累积量曲线的标度拟合  $L = 256$

表2列出了温度从0.460到0.490的计算结果,其中 $\xi_1/\xi_2$ 和 $d/z$ 是根据标度关系拟合所得, $z$ 由 $d/z$ 的值计算而得.从表2数据可见, $z$ 在2附近涨落,这与在 $T < T_{KT}$ 温度下的测量结果一致.如果温度再低于0.460,则需要更大尺寸的格点和更长的时间.

表2 二维FFXY模型Binder累积量的标度拟合结果和 $z$ 的计算结果

$(T_1, T_2)$	$\xi_1/\xi_2$	$d/z$	$z$
(0.460, 0.463)	1.82(9)	1.08(8)	1.85(14)
(0.460, 0.465)	2.39(13)	1.04(6)	1.93(11)
(0.463, 0.465)	1.33(4)	0.99(12)	2.02(25)
(0.463, 0.467)	1.75(6)	0.97(6)	2.06(13)
(0.465, 0.467)	1.31(4)	0.92(9)	2.16(22)
(0.465, 0.470)	1.81(6)	0.96(7)	2.09(16)
(0.467, 0.470)	1.36(5)	0.95(5)	2.10(11)
(0.467, 0.475)	2.13(5)	0.99(2)	2.02(4)
(0.470, 0.475)	1.56(3)	1.01(9)	1.99(18)
(0.470, 0.480)	2.17(3)	0.97(3)	2.07(7)
(0.475, 0.480)	1.40(14)	1.01(6)	1.99(12)
(0.480, 0.490)	1.674(8)	0.86(5)	2.32(14)

### 4. 分 析

对在一定温度范围内的二维XY和二维FFXY模型,从平衡态测出的空间关联长度 $\xi$ 是可用的.对比从平衡态测量出的 $\xi$ 和利用磁化的标度拟合得到的 $\xi^z$ ,可以得到动力学指数 $z$ ,结果分别列在表1和表3中,其中 $\xi_1/\xi_2$ 是由平衡态测量得到<sup>[14,34]</sup>,而 $\xi_1/\xi_2$ 是利用短时动力学的磁化标度关系获得.由 $\xi_1/\xi_2$ 和 $d/z$ 就可以计算出 $z$ 的值.从表3可见,对二维XY模型, $z$ 接近2,这表明二维XY模型在平衡态的模拟相对精确.而对二维FFXY模型,从表1可见,动力学指数 $z$ 偏离2且涨落较大.我们认为,这是因为二维FFXY模型在平衡态的模拟会发生严重的临界慢化现象,导致模拟结果不是很精确,即表1中的 $\xi_1/\xi_2$ 值不准确,这样计算得出的 $z$ 值误差也就相对较大.由表2列出的计算结果可见,利用 $U$ 的标度测量得到的 $z$ 值会更精确和更稳定,同时也表现出了短时动力学的优势<sup>[35,36]</sup>.

表3 二维XY模型磁化的标度拟合结果和 $z$ 的计算结果

$(T_1, T_2)$	$\xi_1/\xi_2^{[34]}$	$\xi_1/\xi_2^{[31]}$	$z$
(0.98, 0.99)	1.3645	1.965	2.173
(0.99, 1.00)	1.270	1.840	2.526
(1.00, 1.01)	1.274	1.710	2.230
(1.01, 1.02)	1.210	1.564	2.346
(1.02, 1.03)	1.202	1.474	2.109
(1.03, 1.04)	1.166	1.424	2.302

按照(5)式,二维XY模型的 $T_{KT} = 0.894^{[9,31]}$ ,二维FFXY模型的 $T_{KT} = 0.446^{[5,14,16,31]}$ .先将(5)式两边取对数, $z \ln \xi = \ln a + b\tau^{-\nu}$ ,再将横坐标变换为 $\tau^{-\nu}$ ,以 $z \ln \xi$ 为纵坐标,就得到一个直线方程,如图4虚线所示,图中带点实线为实验结果.由图4可见:对于二维XY模型,呈现出很好的线性关系,说明其遵循(5)式,表现为KT相变.而对于二维FFXY模型,在温度离KT相变温度较接近时呈线性关系,但当温度离KT相变温度较远时则逐渐偏离.由此可知,两种模型虽然都是KT相变,但存在较大的不同.二维XY模型在整个模拟实验的温度范围内[0.98, 1.04]都遵循(5)式,而二维FFXY模型在温度很接近 $T_{KT}$ 时,才满足(5)式.两种模型的不同也表现于表1和表3所列拟合结果的差异上.

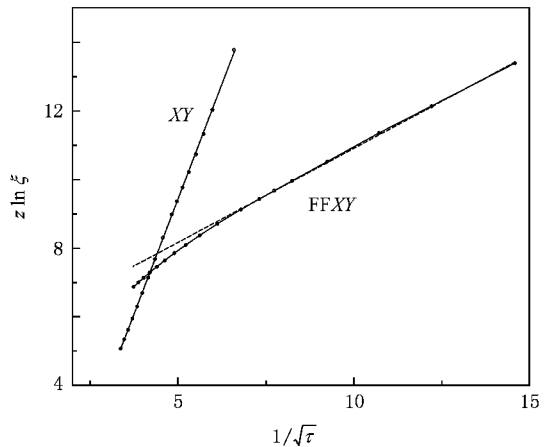


图4 二维XY模型与FFXY模型的对比分析

### 5. 结 论

标度理论是一种唯象理论,不能靠它算出各种临界指数的具体值,但是可以用它建立一些临界指数之间的关系式,即标度律.本文在仔细分析动力学

标度关系的基础上,在  $T > T_{KT}$  情形下对二维 FFXY 模型展开了大规模的蒙特卡罗模拟,研究 KT 型相变的临界现象.通过测量磁化和 Binder 累积量,得到了关联时间  $\xi$  和动力学指数  $z$ .特别是通过对 Binder 累积量标度行为的分析来得到  $z$ ,这是一种能

够在  $T > T_{KT}$  温度条件下直接得出  $z$  的新方法.模拟结果表明,动力学指数  $z \approx 2$ ,这与低温( $T < T_{KT}$ )下测量的结果一致.将二维 XY 模型和二维 FFXY 模型的模拟结果对比可知,两种模型虽然都表现为 KT 型相变,但在相变点附近的行为却不完全一样.

- [ 1 ] Kosterlitz J M, Thouless D J 1973 *J. Phys.* C **6** 1181
- [ 2 ] Kosterlitz J 1974 *J. Phys.* C **7** 1046
- [ 3 ] Gan Z Z, Liu J J 2000 *Chin. Phys.* **9** 934
- [ 4 ] Lee J, Kosterlitz J M, Granato E 1991 *Phys. Rev. B* **43** 11531
- [ 5 ] Ramirez-Santiago G, José J V 1994 *Phys. Rev. B* **49** 9567
- [ 6 ] Luo H J, Schülke L, Zheng B 1998 *Phys. Rev. Lett.* **81** 180
- [ 7 ] Franzese G, Cataudella V, Korshunov S E, Fazio R 2000 *Phys. Rev. B* **62** R9287
- [ 8 ] Marconi V I, Domínguez D 2001 *Phys. Rev. Lett.* **87** 17004
- [ 9 ] Tomita Y, Okabe Y 2002 *Phys. Rev. B* **65** 184405
- [ 10 ] Granato E, Dominguez D 2003 *Europhys. Lett.* **63** 750
- [ 11 ] Wang Y, Han R Q, Liu X Y, Jue K G 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 1776 ( in Chinese ) [ 王 漪、韩汝琦、刘晓彦、岷口刚 2003 物理学报 **52** 1776 ]
- [ 12 ] Hasenbusch M, Pelissetto A, Vicari E 2005 *Phys. Rev. B* **72** 184502
- [ 13 ] Granato E, Dominguez D 2005 *Phys. Rev. B* **71** 094521
- [ 14 ] Ramirez-Santiago G, José J 1992 *Phys. Rev. Lett.* **68** 1224
- [ 15 ] Olsson P 1997 *Phys. Rev. B* **55** 3585
- [ 16 ] Ozeki Y, Ito N 2003 *Phys. Rev. B* **68** 054414
- [ 17 ] Lei X W, Zhao X Y 2009 *Chin. Phys. Lett.* **26** 16401
- [ 18 ] Zheng B 2004 *Computer Simulation Studies in Condensed-Matter Physics XVII* ( Berlin : Springer )
- [ 19 ] Zheng B, Schulz M, Trimper S 1999 *Phys. Rev. Lett.* **82** 1891
- [ 20 ] Calabrese P, Gambassi A 2005 *J. Phys.* A **38** R133
- [ 21 ] Fedorenko A A, Trimper S 2006 *Europhys. Lett.* **74** 89
- [ 22 ] Zhou N J, Zheng B 2007 *Europhys. Lett.* **78** 56001
- [ 23 ] Li Z B, Schülke L, Zheng B 1995 *Phys. Rev. Lett.* **74** 3396
- [ 24 ] Zheng B, Ren F, Ren H 2003 *Phys. Rev. E* **68** 046120
- [ 25 ] Yin J Q, Zheng B, Trimper S 2005 *Phys. Rev. E* **72** 036122
- [ 26 ] Zhou N J, Zheng B 2008 *Phys. Rev. E* **77** 051104
- [ 27 ] Bray A J, Briant A J, Jervis D K 2000 *Phys. Rev. Lett.* **84** 1503
- [ 28 ] Lei X W, Zheng B 2007 *Phys. Rev. E* **75** 040104
- [ 29 ] Lei X W, Zheng B, Ying H P 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 1713 ( in Chinese ) [ 雷晓蔚、郑 波、应和平 2007 物理学报 **56** 1713 ]
- [ 30 ] Ying H P, Zheng B, Yu Y, Trimper S 2001 *Phys. Rev. E* **63** 035101
- [ 31 ] Zheng B, Schulz M, Trimper S 1999 *Phys. Rev. E* **59** R1351
- [ 32 ] Lei X W, Zhao X Y 2007 *Sci. Chin. Bull.* **52** 307 ( in Chinese ) [ 雷晓蔚、赵晓雨 2007 科学通报 **52** 307 ]
- [ 33 ] Hohenberg P C, Halperin B I 1977 *Rev. Mod. Phys.* **49** 435
- [ 34 ] Gupta R, Baillie C F 1992 *Phys. Rev. B* **45** 2883
- [ 35 ] Yin J Q, Zheng B, Trimper S 2004 *Phys. Rev. E* **70** 056134
- [ 36 ] Lin S Z, Zheng B 2008 *Phys. Rev. E* **78** 011127

# The dynamic exponent of two-dimensional fully frustrated $XY$ model<sup>\*</sup>

Lei Xiao-Wei<sup>†</sup> Zhao Xiao-Yu

( *Department of Physics , Chongqing University of Arts and Sciences , Chongqing 402160 , China* )

( Received 23 October 2008 ; revised manuscript received 20 December 2008 )

## Abstract

With a large-scale Monte Carlo simulation , non-equilibrium dynamics of the two-dimensional fully frustrated  $XY$  model is investigated. We tackle the Kosterlitz-Thouless phase transition. Starting from an ordered initial state , we study the dynamic evolution of the magnetization as well as a specifically defined Binder cumulant. From the dynamic scaling ansatz , we extract the correlating time of the dynamics and the spatial correlation length of the equilibrium state. The dynamic exponent  $z$  is determined with relatively high accuracy. Especially , we suggest and demonstrate how one may directly measure the dynamic exponent  $z$  above  $T_{KT}$  from the scaling fit of the Binder cumulant. These results indicate that the dynamic exponent  $z$  fluctuates around  $z = 2$  , and this is consistent with that observed at temperatures below the transition temperature  $T_{KT}$ .

**Keywords** : Monte Carlo method , dynamic exponent , Kosterlitz-Thouless phase transition , fully frustrated  $XY$  model

**PACC** : 7115Q , 0570J , 7540C , 7540D

<sup>\*</sup> Project supported by the Scientific Research Fund of Chongqing Municipal Education Commission , China ( Grant Nos. KJ081207 , KJ091212 ).

<sup>†</sup> E-mail : xwlei5@126.com