

相对运动动力学系统的 Lagrange 对称性^{*}

梅凤翔 吴惠彬[†]

(北京理工大学理学院, 北京 100081)

(2008 年 10 月 18 日收到, 2008 年 12 月 12 日收到修改稿)

研究相对运动动力学系统的 Lagrange 对称性, 给出系统 Lagrange 对称性的定义和判据, 找到这类对称性导致的守恒量的条件和形式, 举例说明结果的应用.

关键词: 相对运动动力学, Lagrange 对称性, 守恒量

PACC: 0320

1. 引言

力学系统的运动可在绝对坐标系, 也可在动坐标系中研究. 在动坐标系中的动力学称为相对运动动力学. 1961 年 Lur'e 给出完整力学系统的相对运动动力学方程^[1].

力学系统的对称性与守恒量研究具有重要理论意义和实际价值. 对称性主要有 Noether 对称性^[2-4], Lie 对称性^[5-11], 形式不变性^[12-15], 以及三种对称性的统一^[16, 17]等. 1966 年 Currie 和 Saletan 研究了单自由度等价 Lagrange 函数问题, 并指出在此情形存在守恒量^[18]. 1981 年 Hojman 和 Harleston 将此结果推广到多自由度系统^[19]. 文献 [3] 称这种对称性为 Lagrange 对称性, 并将文献 [19] 的结果推广到完整非保守系统. 本文将文献 [3] 的结果进一步推广到相对运动动力学系统.

2. 相对运动动力学方程

设力学系统在相对运动中的位形由 n 个广义坐标 q_s ($s = 1, \dots, n$) 来确定, 相对运动动力学方程有形式^[1, 4]

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L_r}{\partial \dot{q}_s} - \frac{\partial L_r}{\partial q_s} = Q_s + Q_s^\omega + \Gamma_s \quad (s = 1, \dots, n), \quad (1)$$

其中

$$L_r = T_r - V - V^0 - V^\omega \quad (2)$$

为 Lagrange 函数, T_r 为相对运动动能, V 为势能, V^0 为均匀力场势能, V^ω 为离心力势能. 方程 (1) 右端的 Q_s 为非势广义力, Γ_s 为广义陀螺力, Q_s^ω 为广义回转惯性力^[1, 4].

3. 系统的 Lagrange 对称性

研究两组动力学函数 $L_r, Q_s, Q_s^\omega, \Gamma_s$ 和 $\bar{L}_r, \bar{Q}_s, \bar{Q}_s^\omega, \bar{\Gamma}_s$, 令

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_s &= \frac{d}{dt} \frac{\partial L_r}{\partial \dot{q}_s} - \frac{\partial L_r}{\partial q_s} - Q_s - Q_s^\omega - \Gamma_s \\ &= W_{sk} \ddot{q}_k + \frac{\partial^2 L_r}{\partial \dot{q}_s \partial \dot{q}_k} \dot{q}_k + \frac{\partial^2 L_r}{\partial \dot{q}_s \partial t} \\ &\quad - \frac{\partial L_r}{\partial q_s} - Q_s - Q_s^\omega - \Gamma_s, \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{L}}_s &= \frac{d}{dt} \frac{\partial \bar{L}_r}{\partial \dot{q}_s} - \frac{\partial \bar{L}_r}{\partial q_s} - \bar{Q}_s - \bar{Q}_s^\omega - \bar{\Gamma}_s \\ &= \bar{W}_{sk} \ddot{q}_k + \frac{\partial^2 \bar{L}_r}{\partial \dot{q}_s \partial \dot{q}_k} \dot{q}_k + \frac{\partial^2 \bar{L}_r}{\partial \dot{q}_s \partial t} \\ &\quad - \frac{\partial \bar{L}_r}{\partial q_s} - \bar{Q}_s - \bar{Q}_s^\omega - \bar{\Gamma}_s, \end{aligned} \quad (4)$$

其中

$$W_{sk} = \frac{\partial^2 L_r}{\partial \dot{q}_s \partial \dot{q}_k}, \quad \bar{W}_{sk} = \frac{\partial^2 \bar{L}_r}{\partial \dot{q}_s \partial \dot{q}_k}. \quad (5)$$

定义 对系统 (1), 如果由 $\mathcal{L}_s = 0$ ($s = 1, \dots, n$) 可

^{*} 国家自然科学基金(批准号: 10572021, 10772025)和北京理工大学基础研究基金资助的课题.

[†] 通讯联系人. E-mail: huibinwu@bit.edu.cn

得到 $\bar{\mathcal{L}}_k = 0$ ($k = 1, \dots, n$), 反之亦然, 则这种对称性称为系统的 Lagrange 对称性.

由 $\bar{\mathcal{L}}_k = 0$ 解出所有广义加速度 $\ddot{q}_s$, 有

$$\ddot{q}_s = \bar{U}^{sk} \left(\bar{Q}_k + \bar{Q}_k^{\dot{}} + \bar{\Gamma}_k + \frac{\partial \bar{L}_r}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial^2 \bar{L}_r}{\partial \dot{q}_k \partial q_l} \dot{q}_l - \frac{\partial^2 \bar{L}_r}{\partial \dot{q}_k \partial t} \right), \quad (6)$$

其中

$$\bar{W}_{sk} \bar{U}^{kl} = \delta_s^l. \quad (7)$$

将 (6) 式代入 (3) 式, 得

$$\begin{aligned} & W_{sk} \bar{U}^{kl} \left(\bar{Q}_l + \bar{Q}_l^{\dot{}} + \bar{\Gamma}_l + \frac{\partial \bar{L}_r}{\partial \dot{q}_l} - \frac{\partial^2 \bar{L}_r}{\partial \dot{q}_l \partial q_i} \dot{q}_i - \frac{\partial^2 \bar{L}_r}{\partial \dot{q}_l \partial t} \right) \\ & - \frac{\partial^2 \bar{L}_r}{\partial \dot{q}_l \partial q_i} \dot{q}_i - \frac{\partial^2 \bar{L}_r}{\partial \dot{q}_l \partial t} \\ & = Q_s + Q_s^{\dot{}} + \Gamma_s + \frac{\partial L_r}{\partial q_s} \\ & - \frac{\partial^2 L_r}{\partial \dot{q}_s \partial q_l} \dot{q}_l - \frac{\partial^2 L_r}{\partial \dot{q}_s \partial t} \\ & (s, k, r, l, i = 1, \dots, n), \end{aligned} \quad (8)$$

于是有

判据 如果两组动力学函数 $L_r, Q_s, Q_s^{\dot{}}, \Gamma_s$ 和 $\bar{L}_r, \bar{Q}_s, \bar{Q}_s^{\dot{}}, \bar{\Gamma}_s$ 满足方程 (8), 则相应对称性是相对运动动力学系统的 Lagrange 对称性.

4. 由 Lagrange 对称性导出守恒量

类似于文献 [3] 对完整非保守系统的推导, 可得到如下关系:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 \bar{L}_r}{\partial \dot{q}_s \partial q_k} - \frac{\partial^2 \bar{L}_r}{\partial q_s \partial \dot{q}_k} - \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} (\bar{Q}_s + \bar{Q}_s^{\dot{}} + \bar{\Gamma}_s) \\ & = - \frac{d\Lambda_s^l}{dt} W_{lk} + \Lambda_s^l \\ & \times \left[\frac{\partial^2 L_r}{\partial \dot{q}_l \partial q_k} - \frac{\partial^2 L_r}{\partial q_l \partial \dot{q}_k} - \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} (Q_l + Q_l^{\dot{}} + \Gamma_l) \right], \end{aligned} \quad (9)$$

其中

$$\begin{aligned} & \bar{W}_{sk} U^{kl} = \Lambda_s^l, \quad W_{sk} U^{kl} = \delta_s^l, \\ & \bar{\mathcal{L}}_s = \Lambda_s^k \bar{\mathcal{L}}_k \quad (s, k, l = 1, \dots, n). \end{aligned} \quad (10)$$

引入两个矩阵 T 和 $\bar{T}$, 其元素分别为

$$T_{sk} = \frac{\partial^2 L_r}{\partial \dot{q}_s \partial q_k} - \frac{\partial^2 L_r}{\partial q_s \partial \dot{q}_k},$$

$$\bar{T}_{sk} = \frac{\partial^2 \bar{L}_r}{\partial \dot{q}_s \partial q_k} - \frac{\partial^2 \bar{L}_r}{\partial q_s \partial \dot{q}_k}. \quad (11)$$

假设满足下列条件:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} (\bar{Q}_s + \bar{Q}_s^{\dot{}} + \bar{\Gamma}_s) \\ & = \Lambda_s^l \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} (Q_l + Q_l^{\dot{}} + \Gamma_l) \\ & (s, k, l = 1, \dots, n), \end{aligned} \quad (12)$$

则 (9) 式可表示为矩阵形式

$$\dot{\Lambda} = -\bar{T}U + \Lambda TU. \quad (13)$$

注意到 $\bar{W}$ 和 U 的对称性, $\Lambda = \bar{W}U$, 以及 T 和 $\bar{T}$ 的反对称性, 由 (13) 式得

$$\frac{d}{dt} [\text{tr}(\Lambda^m)] = 0, \quad (14)$$

其中 m 为任意正整数, 而守恒量为

$$I_L = \text{tr}(\Lambda^m) = \text{const}. \quad (15)$$

于是有

命题 对相对运动动力学系统 (1), 如果系统 (1) 右端的力满足条件 (12), 则系统的 Lagrange 对称性导致守恒量 (15).

如果没有相对运动, 则方程 (1) 成为

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} - \frac{\partial L}{\partial q_s} = Q_s \quad (s = 1, \dots, n), \quad (16)$$

则 (12) 式成为

$$\frac{\partial \bar{Q}_s}{\partial \dot{q}_k} = \Lambda_s^l \frac{\partial Q_l}{\partial \dot{q}_k}. \quad (17)$$

于是有

推论 对完整非保守系统 (16), 如果非势力满足 (17) 式, 则 Lagrange 对称性导致守恒量 (15).

此推论就是文献 [3] 的一个结果.

5. 算 例

为说明上述结果, 下面给出一简单例子.

三自由度系统为

$$L_r = \frac{1}{2} (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2) - \frac{1}{2} \omega^2 (q_1^2 + q_2^2),$$

$$Q_s = Q_s^{\dot{}} = 0 \quad (s = 1, 2, 3),$$

$$\Gamma_1 = -\dot{q}_2, \quad \Gamma_2 = \dot{q}_1, \quad \Gamma_3 = 0.$$

(18)

取另一组动力学函数为

$$\bar{L}_r = \frac{1}{2} (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) + \frac{1}{6} \dot{q}_3^3 - \frac{1}{2} \omega^2 (q_1^2 + q_2^2),$$

$$\bar{Q}_s = Q_s, \quad \bar{Q}_s^{\omega} = Q_s^{\omega}, \quad \bar{\Gamma}_s = \Gamma_s (s = 1, 2, 3). \quad (19)$$

容易验证, 它满足判据方程(8), 因此对应系统的 Lagrange 对称性.

由(18)和(19)式知

$$(\bar{W}_{sk}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dot{q}_3 \end{pmatrix}, \quad (U^{kl}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$(\Lambda_s^l) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dot{q}_3 \end{pmatrix}. \quad (20)$$

由此, 可以验证(12)式成立.

$$\text{tr}(\Lambda^m) = 2 + \dot{q}_3^m.$$

守恒量(15)式给出

$$2 + \dot{q}_3^m = \text{const}, \quad (21)$$

$$\text{即} \quad I_L = \dot{q}_3 = \text{const}. \quad (22)$$

需要指出的是, 由 Lagrange 对称性导致的守恒量也可以用其他方法得到, 例如 Noether 定理.

6. 结 论

Lagrange 对称性是指两组动力学函数 L_r, Q_s , Q_s^{ω}, Γ_s 和 $\bar{L}_r, \bar{Q}_s, \bar{Q}_s^{\omega}, \bar{\Gamma}_s$ 满足同样方程的一种对称性. 它既不是 Noether 对称性, 也不是 Lie 对称性. 由系统(1)的 Lagrange 对称性在条件(12)下可找到守恒量(15).

- [1] Lur'e A I 1961 *Analytical mechanics* (Moscow: GIFML) (in Russian)
- [2] Li Z P 1993 *Classical and quantal dynamics of constrained systems and their symmetrical properties* (Beijing: Beijing Polytechnic University Press) (in Chinese) [李子平 1993 经典和量子约束系统及其对称性质 (北京: 北京工业大学出版社)]
- [3] Zhao Y Y, Mei F X 1999 *Symmetries and invariants of mechanical systems* (Beijing: Science Press) (in Chinese) [赵跃宇、梅凤翔 1999 力学系统的对称性与不变量 (北京: 科学出版社)]
- [4] Mei F X 1999 *Applications of Lie groups and Lie algebras to constrained mechanical systems* (Beijing: Science Press) (in Chinese) [梅凤翔 1999 李群和李代数对约束力学系统的应用 (北京: 科学出版社)]
- [5] Lutzky M 1979 *J. Phys. A* **12** 973
- [6] Mei F X 2000 *Acta Mechanica* **141** 135

- [7] Zhang H B 2002 *Chin. Phys.* **11** 1
- [8] Fu J L, Chen L Q 2003 *Phys. Lett. A* **317** 255
- [9] Luo S K, Mei F X 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 666 (in Chinese) [罗绍凯、梅凤翔 2004 物理学报 **53** 666]
- [10] Zhang Y 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 461 (in Chinese) [张毅 2002 物理学报 **51** 461]
- [11] Fang J H, Liao Y P, Peng Y 2004 *Chin. Phys.* **13** 1620
- [12] Mei F X 2000 *J. of Beijing Institute of Technology* **9** 120
- [13] Wang S Y, Mei F X 2002 *Chin. Phys.* **11** 5
- [14] Qiao Y F, Zhao S H, Li R J 2004 *Chin. Phys.* **13** 292
- [15] Wu H B 2005 *Chin. Phys.* **14** 452
- [16] Mei F X, Xu X J, Zhang Y F 2004 *Acta Mech. Sin.* **20** 668
- [17] Xu X J, Qin M C, Mei F X 2005 *Chin. Phys.* **14** 1287
- [18] Currie D G, Saletan E J 1966 *J. Math. Phys.* **7** 967
- [19] Hojman S, Harleston H 1981 *J. Math. Phys.* **22** 1414

Lagrange symmetry for a dynamical system of relative motion^{*}

Mei Feng-Xiang Wu Hui-Bin[†]

(*Faculty of Science , Beijing Institute of Technology , Beijing 100081 , China*)

(Received 18 October 2008 ; revised manuscript received 12 December 2008)

Abstract

This paper studies the Lagrange symmetry of a dynamical system of relative motion. The definition and the criterion of the symmetry of the system are established. The condition under which there exists a conserved quantity and the form of the conserved quantity are obtained.

Keywords : dynamics of relative motion , Lagrange symmetry , conserved quantity

PACC : 0320

^{*} Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 10572021 ,10772025) and the Found for Fundamental Research of BIT.

[†] Corresponding author. E-mail : huibinwu@bit.edu.cn