

# 分数阶统一混沌系统的自适应同步<sup>\*</sup>

张若洵<sup>1)</sup> 杨 洋<sup>2)</sup> 杨世平<sup>3)</sup>†

1) 邢台学院初等教育学院, 邢台 054001)

2) 河北北方学院理学院, 张家口 075000)

3) 河北师范大学物理科学与信息工程学院, 石家庄 050016)

(2009 年 1 月 11 日收到, 2009 年 2 月 8 日收到修改稿)

提出了分数阶统一混沌系统的自适应同步方法, 给出了自适应同步控制器和参数自适应率. 设计的单一控制器简单且只含有一个驱动变量. 所用同步方法适用于一类分数阶混沌系统的同步, 且具有较强的抗噪声能力, 具有较高的实用价值. 数值模拟结果表明了该方法的有效性.

关键词: 分数阶, 统一混沌系统, 自适应同步

PACC: 0545

## 1. 引言

分数阶微积分(fractional calculus)已有 300 多年的历史, 其发展几乎与整数阶微积分同步, 但将其应用到物理学和工程学的研究热潮还是最近几十年兴起的. 许多物理系统能展现出分数阶动力学行为, 例如, 黏滞系统、介质极化、电极-电解液极化、(电缆的)管道边界层效应、有色噪声和电磁波等. 最近, 分数阶混沌系统又引起人们广泛的兴趣和深入的研究. Chua 电路<sup>[1]</sup>、Lorenz 系统<sup>[2]</sup>、Chen 系统<sup>[3-5]</sup>、Lü 系统<sup>[6,7]</sup>、Liu 系统<sup>[8-10]</sup>、Duffing 系统<sup>[11]</sup>、Sprott 系统<sup>[12,13]</sup>以及 Rossler 混沌和超混沌系统<sup>[14]</sup>、新超混沌系统<sup>[15]</sup>中, 通过计算机数值仿真发现, 当系统的阶数为分数时, 系统仍呈现混沌状态, 且更能反映系统所呈现的物理现象.

另一方面, 自从 1990 年 Pecora 和 Carroll<sup>[16]</sup>发现了两个混沌系统可以实现同步以来, 就掀起了混沌同步问题研究的热潮. 在通信领域, Arman Kiani-B 等<sup>[17]</sup>用简单的混沌掩盖方法证明了分数阶混沌信号能加强通信的安全性. 因此, 分数阶混沌系统的同步在保密通信、信号处理和系统控制及其他领域中拥有潜在的、诱人的应用前景, 研究分数阶混沌系统具有重要的理论意义和实用价值.

对于分数阶混沌同步方法, 目前采用较多的是

通过控制系统的系数矩阵的特征值使其在一定范围内实现控制, 但是非线性系统的系数矩阵通常是含有变量的非定常矩阵, 很难求出其特征值. 鉴于此, 一些文献提出通过设计控制器消去系统的非线性项使系统的系数矩阵成为定常矩阵的方法<sup>[18-20]</sup>, 这种方法虽然能达到一定的效果, 但控制代价较大.

本文针对上述分数阶混沌系统同步方法中存在的不足, 根据整数阶混沌系统的自适应同步方法, 提出分数阶混沌系统的自适应同步方法, 用单一控制器一个驱动变量实现了分数阶统一混沌系统的自适应同步. 该同步方法可以很容易地推广到其他相似分数阶混沌系统, 如分数阶 Liu 混沌系统<sup>[21]</sup>等.

## 2. 分数阶统一混沌系统的自适应同步理论分析与数值模拟

在分数阶微积分的研究过程中, 对分数阶导数的概念有多种定义, 本文采用 Caputo 微分定义<sup>[7]</sup>来研究分数阶混沌动力学行为, Caputo 微分定义为

$$D_*^\alpha y(x) = J^{m-\alpha} y^{(m)}(x), \alpha > 0, \quad (1)$$

这里  $m = [\alpha]$ , 为第一个不小于  $\alpha$  的整数,  $y^{(m)}$  为  $y$  的  $m$  阶导数,  $J^\beta$  是  $\beta$  阶 Riemann-Liouville 积分算子

$$J^\beta \mathcal{L}(x) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^x (x-t)^{\beta-1} \mathcal{L}(t) dt, \beta > 0 \quad (2)$$

其中  $\Gamma(\cdot)$  是 Gamma 函数.  $D_*^\alpha$  通常称为  $\alpha$  阶

<sup>\*</sup> 河北省自然科学基金(批准号: A2008000136)资助的课题.

† E-mail: yangship@mail.hebnu.edu.cn

Caputo 微分算子.

## 2.1. 系统数学模型与问题描述

2002 年, Lü 等人提出了一个新的混沌系统, 该系统将 Lorenz 吸引子和 Chen 吸引子连接起来, 而文献 [22] 提出的 Lü 系统只是它的一个特例, 故文献 [23] 称其为统一混沌系统. 统一混沌系统的数学模型可写为

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= (25\alpha + 10)(x_2 - x_1), \\ \dot{x}_2 &= (28 - 35\alpha)x_1 - x_1x_3 + (29\alpha - 1)x_2, \\ \dot{x}_3 &= x_1x_2 - (8 + \alpha)x_3/3,\end{aligned}\quad (3)$$

其中系统参数  $\alpha \in [0, 1]$ . 统一混沌系统是一个由单参数控制的连续混沌系统, 具有统一性和全域性混沌特性. 系统只用一个参数  $\alpha$  就可以控制整个系

统, 当  $\alpha \in [0, 0.8)$  时, 统一系统属于广义 Lorenz 系统; 当  $\alpha \in (0.8, 1]$  时, 统一系统属于广义 Chen 系统; 而当  $\alpha = 0.8$  时, 统一系统属于 Lü 系统. 统一系统具有连接 Lorenz 系统和 Chen 系统的重要作用, 当  $\alpha$  由零逐渐增加到 1 时, 系统也由广义的 Lorenz 系统逐渐过渡到广义的 Chen 系统, 具有统一性.

分数阶统一混沌系统<sup>[24]</sup>有如下形式:

$$\begin{aligned}\frac{d^q x_1}{dt^q} &= (25\alpha + 10)(x_2 - x_1), \\ \frac{d^q x_2}{dt^q} &= (28 - 35\alpha)x_1 - x_1x_3 + (29\alpha - 1)x_2, \\ \frac{d^q x_3}{dt^q} &= x_1x_2 - \frac{8 + \alpha}{3}x_3,\end{aligned}\quad (4)$$

其中,  $0 < q < 1$ , 当  $q = 0.9$  时, 对于不同的  $\alpha$  值的 2.7 阶统一混沌系统的吸引子如图 1 所示.

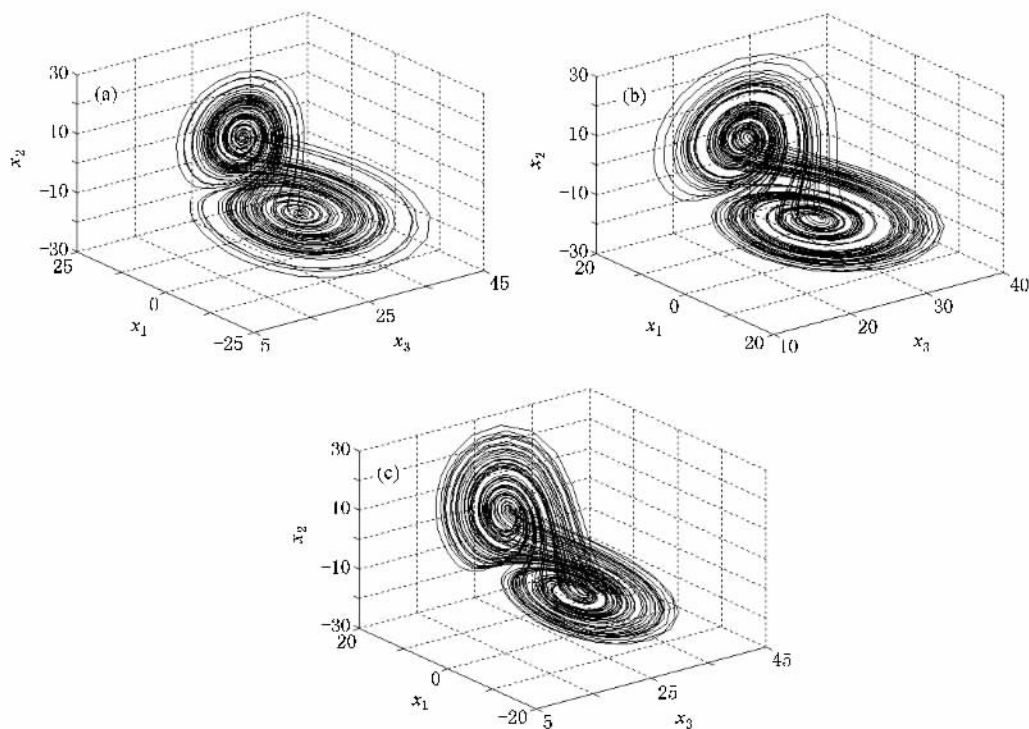


图 1 2.7 阶统一混沌系统的吸引子 (a)  $\alpha = 0.6$ ; (b)  $\alpha = 0.8$ ; (c)  $\alpha = 1$

以系统 (4) 为驱动系统, 具有单一控制器的响应系统为

$$\begin{aligned}\frac{d^q y_1}{dt^q} &= (25\alpha + 10)(y_2 - y_1), \\ \frac{d^q y_2}{dt^q} &= (28 - 35\alpha)y_1 - y_1y_3 + (29\alpha - 1)y_2 + u, \\ \frac{d^q y_3}{dt^q} &= y_1y_2 - \frac{8 + \alpha}{3}y_3.\end{aligned}\quad (5)$$

我们的目标就是选取合适的控制器  $u$ , 使响应系统

(驱动系统 (4) 达到同步.

## 2.2. 自适应同步设计

**定理** 设系统误差  $e_1 = y_1 - x_1$ ,  $e_2 = y_2 - x_2$ ,  $e_3 = y_3 - x_3$ . 若选取控制器  $u = -ke_2$ , 参数自适应率  $\frac{d^q k}{dt^q} = \beta e_2^2$  ( $\beta > 0$ ) 则响应系统 (5) 和驱动系统 (4) 同步. 即  $\lim_{t \rightarrow \infty} e_i = 0$  ( $i = 1, 2, 3$ ).

证明 设  $e_k = k - k_0$  ,( $k_0$  为实常数 ),则由

(5)(4)式得误差系统为

$$\frac{d^q e_1}{dt^q} = (25\alpha + 10)(e_2 - e_1),$$
$$\frac{d^q e_2}{dt^q} = (28 - 35\alpha)e_1 - x_1 e_3 - y_3 e_1 + (29\alpha - 1)$$

$$\times e_2 - k_0 e_2 - e_2 e_k,$$

$$\frac{d^q y_3}{dt^q} = x_1 e_2 + y_2 e_1 - \frac{8 + \alpha}{3} e_3. \tag{6}$$

同时有
$$\frac{d^q e_k}{dt^q} = \frac{d^q k}{dt^q} = \beta e_2^2, u = -k e_2 = -k_0 e_2 - k e_2$$
$$+ k_0 e_2 = -k_0 e_2 - e_2 e_k$$
于是可得

$$\begin{pmatrix} \theta \frac{d^q e_1}{dt^q} \\ \frac{d^q e_2}{dt^q} \\ \frac{d^q e_3}{dt^q} \\ \frac{1}{\beta} \frac{d^q e_k}{dt^q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(25\alpha + 10)\theta & (25\alpha + 10)\theta & 0 & 0 \\ 28 - 35\alpha - y_3 & 29\alpha - 1 - k_0 & -x_1 & -e_2 \\ y_2 & x_1 & -\frac{8 + \alpha}{3} & 0 \\ 0 & e_2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_k \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_k \end{pmatrix} \quad (\theta > 0), \tag{7}$$

其中 ,

$$A = \begin{pmatrix} -(25\alpha + 10)\theta & (25\alpha + 10)\theta & 0 & 0 \\ 28 - 35\alpha - y_3 & 29\alpha - 1 - k_0 & -x_1 & -e_2 \\ y_2 & x_1 & -\frac{8 + \alpha}{3} & 0 \\ 0 & e_2 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

令  $A$  的任意特征值为  $\lambda$  ,则存在非零向量  $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)^T$  是其对应特征向量 ,于是可得

$$A\xi = \lambda\xi. \tag{8}$$

对(8)式两边取共轭转置( $A$  为实数矩阵 ) ,得

$$\xi^H A^T = \bar{\lambda} \xi^H, \tag{9}$$

(8)式左乘  $\frac{1}{2} \xi^H$  与(9)式右乘  $\frac{1}{2} \xi$  相加 ,得

$$\xi^H \left( \frac{1}{2} A + \frac{1}{2} A^T \right) \xi = \frac{1}{2} (\lambda + \bar{\lambda}) \xi^H \xi.$$

由于混沌系统的状态轨线当  $t \geq 0$  时全局有界并且关于时间  $t$  可微 ,故存在一个正数  $m$  ,使  $\max(|y_1|, |y_2|, |y_3|) \leq m < \infty$  . 又有  $\xi_i^* \xi_j + \xi_j^* \xi_i \leq 2|\xi_i^*||\xi_j| = |\xi_i^*||\xi_j| + |\xi_j^*||\xi_i|$  ,所以可得

$$\frac{1}{2} (\lambda + \bar{\lambda}) \xi^H \xi = \xi^H \left( \frac{1}{2} A + \frac{1}{2} A^T \right) \xi$$
$$= (\xi_1^* \quad \xi_2^* \quad \xi_3^* \quad \xi_4^*) \begin{pmatrix} -(25\alpha + 10)\theta & \frac{(25\alpha + 10)\theta + 28 - 35\alpha - y_3}{2} & \frac{y_2}{2} & 0 \\ \frac{(25\alpha + 10)\theta + 28 - 35\alpha - y_3}{2} & 29\alpha - 1 - k_0 & 0 & 0 \\ \frac{y_2}{2} & 0 & -\frac{8 + \alpha}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \xi_4 \end{pmatrix}$$
$$= (\xi_1^* \quad \xi_2^* \quad \xi_3^*) \begin{pmatrix} -(25\alpha + 10)\theta & \frac{(25\alpha + 10)\theta + 28 - 35\alpha - y_3}{2} & \frac{y_2}{2} \\ \frac{(25\alpha + 10)\theta + 28 - 35\alpha - y_3}{2} & 29\alpha - 1 - k_0 & 0 \\ \frac{y_2}{2} & 0 & -\frac{8 + \alpha}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} &\leqslant \left( \begin{array}{ccc} | \xi_1^* | & | \xi_2^* | & | \xi_3^* | \end{array} \right) \begin{pmatrix} -(25\alpha + 10)\theta & \frac{(25\alpha + 10)\theta + 28 + m}{2} & \frac{m}{2} \\ \frac{(25\alpha + 10)\theta + 28 + m}{2} & 29\alpha - 1 - k_0 & 0 \\ \frac{m}{2} & 0 & -\frac{8 + \alpha}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} | \xi_1 | \\ | \xi_2 | \\ | \xi_3 | \end{pmatrix} \\ &= - \left( \begin{array}{ccc} | \xi_1^* | & | \xi_2^* | & | \xi_3^* | \end{array} \right) \begin{pmatrix} (25\alpha + 10)\theta & -\frac{(25\alpha + 10)\theta + 28 + m}{2} & -\frac{m}{2} \\ -\frac{(25\alpha + 10)\theta + 28 + m}{2} & -29\alpha + 1 + k_0 & 0 \\ -\frac{m}{2} & 0 & \frac{8 + \alpha}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} | \xi_1 | \\ | \xi_2 | \\ | \xi_3 | \end{pmatrix} \\ &= - \left( \begin{array}{ccc} | \xi_1^* | & | \xi_2^* | & | \xi_3^* | \end{array} \right) P \begin{pmatrix} | \xi_1 | \\ | \xi_2 | \\ | \xi_3 | \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

取

$$\begin{aligned} \theta &> \frac{3m^2}{4(8 + \alpha)(25\alpha + 10)}, \\ k_0 &> 29\alpha - 1 + \frac{(8 + \alpha)[(25\alpha + 10)\theta + 28 + m]}{4(8 + \alpha)(25\alpha + 10)\theta - 3m^2}, \end{aligned}$$

则  $P$  是正定的.所以

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(\lambda + \bar{\lambda})\xi^H \xi &\leqslant - \left( \begin{array}{ccc} | \xi_1^* | & | \xi_2^* | & | \xi_3^* | \end{array} \right) \\ &\times P \begin{pmatrix} | \xi_1 | \\ | \xi_2 | \\ | \xi_3 | \end{pmatrix} \leqslant 0. \end{aligned}$$

于是  $(\lambda + \bar{\lambda}) \leqslant 0$ . 即矩阵  $A$  的任意特征值都满足

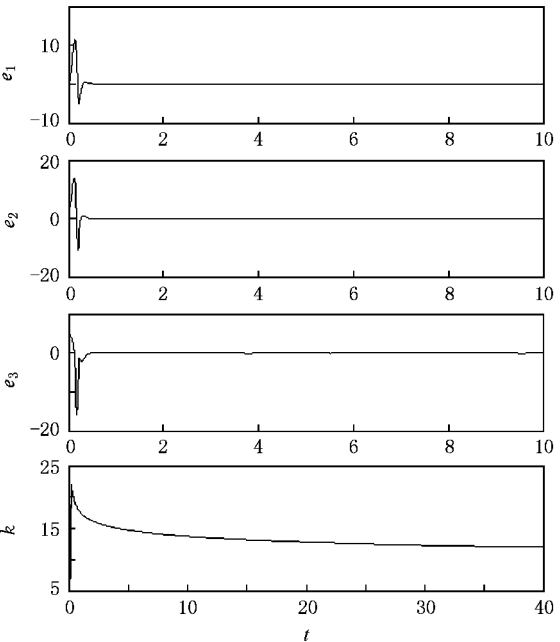


图 2 系统(5)的(4)误差曲线和控制强度  $k$  的收敛曲线

$$| \arg(\lambda) | \geqslant \frac{\pi}{2} > \frac{q\pi}{2} \quad (q < 1).$$

根据分数阶系统稳定性原理<sup>[25]</sup>,误差系统(7)是渐近稳定的,即  $\lim_{t \rightarrow \infty} e_i = 0 \quad (i = 1, 2, 3), \lim_{t \rightarrow \infty} e_k = 0$ . 因此,在自适应控制器  $u = -ke_2$ , 参数自适应率  $\frac{d^q k}{dt^q}$

$= \beta e_2^2$  作用下,分数阶系统(5)与(4)达到同步.

2.3. 数值模拟

通过 Matlab6.5,采用预估-校正法<sup>[26]</sup>进行数值模拟,取  $\alpha = 0.6, q = 0.9$ ,状态初始值  $x(0) = 1,$

$y(0) = -1, z(0) = 10; x_1(0) = -1, y_1(0) = 1,$

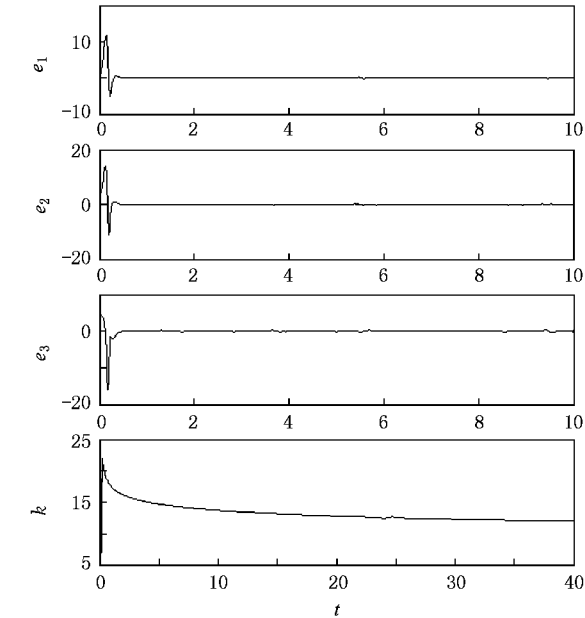


图 3 系统(5)的(4)误差曲线和控制强度  $k$  的收敛曲线(有噪声)

$z_1(0) = 15; \beta = 1, k(0) = 0$ . 仿真结果如图 2 所示,从中可以看出,两分数阶混沌系统渐近同步, $k$  随着时间演化趋向某一个常数.

最后,我们通过在响应系统(5)加上噪声,来说明这种同步方法的鲁棒性.加上噪声的响应系统变为

$$\begin{aligned} \frac{d^q y_1}{dt^q} &= (25\alpha + 10)(y_2 - y_1), \\ \frac{d^q y_2}{dt^q} &= (28 - 35\alpha)y_1 - y_1 y_3 + (29\alpha - 1)y_2 \\ &\quad - ke_2 + \text{rand}, \\ \frac{d^q y_3}{dt^q} &= y_1 y_2 - \frac{8 + \alpha}{3} y_3, \end{aligned} \quad (10)$$

其中 rand 是(0, 1)之间的随机数.我们选取和前面

相同的参数自适应率和初始条件,仿真结果图 3 表明,两分数阶混沌系统渐近同步, $k$  随着时间演化趋向某一个常数.说明该同步方法有较强的鲁棒性.

### 3. 结 论

基于分数阶系统的稳定性理论,提出了分数阶统一混沌系统的自适应同步方法.所设计的控制器只需向响应系统传递一个驱动变量即可实现分数阶混沌系统的自适应同步,且该方法具有较强的抗噪声能力,比起已有的同步方法具有更高的实用价值.同时为整数阶混沌系统的自适应同步方法用于分数阶混沌系统提供了一个范例,具有一定的理论意义.数值模拟结果表明了该方法的有效性.

- [1] Hartly T T, Lorenzo C F, Qammer H K 1995 *IEEE Trans CAI* **42** 485
- [2] Grigorenko I, Grigorenko E 2003 *Phys. Rev. Lett.* **91** 034101
- [3] Li C P, Peng G J 2004 *Chaos, Solitons & Fractals* **22** 443
- [4] Li C G, Chen G R 2004 *Chaos, Solitons & Fractals* **22** 549
- [5] Lu J G, Chen G R 2006 *Chaos, Solitons & Fractals* **27** 685
- [6] Deng W H, Li C P 2005 *Physica A* **353** 61
- [7] Liu C X, Liu T, Liu L, Liu K 2004 *Chaos, Solitons & Fractals* **22** 1031
- [8] Wang F Q, Liu C X 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 3922 (in Chinese) [王发强、刘崇新 2006 物理学报 **55** 3922]
- [9] Chen X R, Liu C X, Wang F Q, Li Y X 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 1416 (in Chinese) [陈向荣、刘崇新、刘发强、李永勋 2008 物理学报 **57** 1416]
- [10] Liu C X, Liu T, Liu L, Liu K 2004 *Chaos, Solitons and Fractals* **22** 1031
- [11] Gao X, Yu J B 2005 *Chaos, Solitons & Fractals* **24** 1097
- [12] Ahamd W M, Sprott J C 2003 *Chaos, Solitons & Fractals* **16** 339
- [13] Gao X, Yu J B 2005 *Chin. Phys.* **14** 908
- [14] Li C G, Chen G R 2004 *Physica A* **341** 55
- [15] Liu C X 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 6865 (in Chinese) [刘崇新 2007

物理学报 **56** 6865]

- [16] Pecora L M, Carroll T L 1990 *Phys. Rev. Lett.* **64** 821
- [17] Arman Kiani-B, Kia Fallahi, Naser Pariz, Henry Leung 2009 *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, **14** 863
- [18] Tan W, Wang Y N, Huang D, Zhou S W 2004 *Chin. Phys.* **13** 459
- [19] Zhang R X, Yang S P 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 6852 (in Chinese) [张若洵、杨世平 2008 物理学报 **57** 6852]
- [20] Zhang R X, Yang S P 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 6837 (in Chinese) [张若洵、杨世平 2008 物理学报 **57** 6837]
- [21] Lu J J, Liu C X 2007 *Chin. Phys.* **16** 1586
- [22] Lü J H, Chen G R 2002 *Int. J. of Bifurcation and Chaos* **12** 659
- [23] Lü J H, Chen G R, Zhang S C 2002 *Int. J. of Bifurcation and Chaos* **12** 1001
- [24] Wang X J, Li J, Chen G R 2008 *J. of the Franklin Institute* **345** 392
- [25] Matignon D 1996 *IMACS, IEEE-SMC Lille, France* 963
- [26] Diethelm K, Ford N J, Freed A D 2002 *Nonlinear Dynamics* **29** 3
- [27] Caputo M 1967 *The Geophys. J. Roy Astronom. Soc.* **13** 529

# Adaptive synchronization of the fractional-order unified chaotic system<sup>\*</sup>

Zhang Ruo-Xun<sup>1)</sup> Yang Yang<sup>2)</sup> Yang Shi-Ping<sup>3)</sup>†

1) *College of Elementary Education, Xingtai University, Xingtai 054001, China*

2) *College of Science, Hebei North University, Zhangjiakou 075000, China*

3) *College of Physics, Hebei Normal University, Shijiazhuang 050016, China*

( Received 11 January 2009 ; revised manuscript received 8 February 2009 )

## Abstract

This article proposes an adaptive synchronization method with only one controller for the fractional-order unified chaotic system, and adaptive controller and updating law of parameter are obtained. The controller employs a single variable, and the presented control scheme is suitable for a class of fractional-order chaotic systems. In addition, the synchronization is effective in the presence of noise. Numerical simulations are used to validate and demonstrate the effectiveness of the proposed method.

**Keywords** : fractional-order, unified chaotic system, adaptive synchronization

**PACC** : 0545

<sup>\*</sup> Project supported by the Natural Science Foundation of Hebei Province ( Grant No. A2008000136 ).

† E-mail : yangship@mail.hebnu.edu.cn