

相对论平均场理论框架下对能的系统研究^{*}

丁斌刚^{1)†} 张大立¹⁾ 鲁定辉²⁾

1) 浙江湖州师范学院理学院, 湖州 313000)

2) 浙江大学近代物理中心, 杭州 310027)

(2008 年 10 月 7 日收到, 2008 年 12 月 2 日收到修改稿)

在相对论平均场模型的框架内, 沿原子核的稳定线, 以每隔 4 个质子或中子提取样本的方法, 计算了核谱图上数十个原子核的对能. 特别是研究了氧同位素偶-偶核的对能随核子数的变化规律, 发现在固定能隙 Δ 的条件下, 对能的大小和核的壳结构有关, 由此提出了一种检验闭壳效应的简便方法, 进而发现中子数 $N=6$ 不仅在轻核的丰中子区是一个新幻数, 而且在丰质子区也是一个可能的新幻数.

关键词: 相对论平均场模型, 对能, 能隙, 幻数

PACC: 2160C, 2160E

1. 引言

对关联是核子间最重要的剩余相互作用, 它对原子核的基本性质, 如结合能、形变以及能级分布等均会产生明显的影响. 所以, 对关联的研究, 一直是原子核理论的重要分支. 数十年来, 已有许多文献对此问题进行了阐述^[1-5]. 但是, 这些讨论主要集中在对相互作用的实验基础、能隙 Δ 和对力强度 G 的确定、对关联对原子核基态和激发态的影响以及质子和中子间的对相互作用等方面, 而对对关联现象中很重要的对能概念, 除了在原子核结合能的半经验公式中根据核的奇-偶质量差唯象地引进外, 较少有人进行系统的研究. 特别是在整个核谱图上对能随核子数的变化规律、对能的大小和原子核壳结构的关系以及这种关系在确定新幻数的应用等方面. 本文的目的, 就是以考虑了 BCS 理论的相对论平均场模型(RMF + BCS)作为理论框架, 对上述问题进行讨论, 以期得出一些有价值的结论.

2. 理论框架

RMF + BCS 模型以介子场的交换势代替了核子间的有效相互作用, 自动给出了自旋-轨道耦合项, 比经典的核模型有更加坚实的理论基础, 它不仅很

好地处理了稳定核的性质, 而且在远离稳定谷的原子核区域, 都取得了很大的成功, 已成为目前研究原子核基态性质的最有力的微观模型^[6,7]. 有关 BCS 理论和相对论平均场模型已有多种文献论述^[8-11]. 这里仅给出简明的理论框架.

BCS 理论下的波函数被定义为

$$|BCS\rangle = \prod_i (u_i + v_i a_i^+ \bar{a}_i^+) |0\rangle, \quad (1)$$

其中 u_i 及 v_i 是实数, 满足归一化条件 $u_i^2 + v_i^2 = 1$. 这个波函数代表了一个粒子数不守恒的体系. 要把这个波函数用于原子核体系, 必须加上限制条件

$$\bar{n} = \langle BCS | \hat{N} | BCS \rangle = n_0, \quad (2)$$

其中 $\bar{n}$ 是 $|BCS\rangle$ 态下粒子数的平均值, n_0 是体系的粒子数.

利用变分原理 $\delta \bar{H} - \lambda \delta \bar{n} = 0$ 可得到单粒子能级空着和被占据的概率幅

$$u_i^2 = \frac{1}{2} \left[1 + \frac{\epsilon_i - \lambda}{\sqrt{(\epsilon_i - \lambda)^2 - \Delta^2}} \right], \quad (3)$$

$$v_i^2 = \frac{1}{2} \left[1 - \frac{\epsilon_i - \lambda}{\sqrt{(\epsilon_i - \lambda)^2 - \Delta^2}} \right], \quad (4)$$

其中

$$\Delta = G \sum_i u_i v_i \quad (5)$$

是能隙参数, 反映了原子核的奇偶质量差, G 是对力强度.

^{*} 国家自然科学基金(批准号: 10675046)资助的课题.

[†] E-mail: dlingbingang@163.com

而原子核系统的对能,可表示为

$$E = \Delta \sum_i u_i v_i. \quad (6)$$

由于壳模型理论是将中子和质子各自分为不同的壳层和单粒子能级,所以,上式可以理解分别为对应中子和质子的对能.

这就是我们计算对能的最终公式.而上式中的能隙 Δ 作为程序计算的输入参数, u_i 和 v_i 由考虑了 BCS 理论的相对论平均场模型求解.

相对论平均场的出发点是一个包含核子和介子场的拉氏密度:

$$\begin{aligned} L = & \bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - M)\psi + \frac{1}{2}\partial_\mu \sigma \partial^\mu \sigma - \frac{1}{2}m_\sigma^2 \sigma^2 \\ & - \frac{1}{3}g_2 \sigma^3 - \frac{1}{4}g_3 \sigma^4 - \frac{1}{4}\Omega_{\mu\nu}\Omega^{\mu\nu} \\ & + \frac{1}{2}m_\omega^2 \omega_\mu^2 - \frac{1}{4}R_{\mu\nu} \cdot R^{\mu\nu} + \frac{1}{2}m_\rho^2 \rho_\mu^2 \cdot \rho^\mu \\ & - \frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + g_\sigma \bar{\psi}\sigma\psi - g_\omega \bar{\psi}\gamma^\mu \omega_\mu \psi - g_\rho \bar{\psi}\gamma^\mu \tau \\ & \times \rho_\mu \psi - e\bar{\psi}\gamma^\mu A_\mu \frac{1+\tau_3}{2}\psi, \end{aligned} \quad (7)$$

其中 ψ 和 M 代表核子场和核子质量,介子场分别为 σ , ω 和 ρ , 相应的质量和耦合常数分别是 m_σ , m_ω , m_ρ 和 g_σ , g_ω , g_ρ . 而 g_2 , g_3 是 σ 介子的自相互作用非线性耦合常数. A^μ 代表光子场, τ 是同位旋泡利算符, τ_3 是其第三分量.

矢量介子场张量 $\Omega^{\mu\nu}$, $R^{\mu\nu}$ 和电磁场张量 $A^{\mu\nu}$ 取如下形式:

$$\begin{aligned} \Omega^{\mu\nu} &= \partial^\mu \omega^\nu - \partial^\nu \omega^\mu, \\ R^{\mu\nu} &= \partial^\mu \rho^\nu - \partial^\nu \rho^\mu, \\ F^{\mu\nu} &= \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu. \end{aligned} \quad (8)$$

运用变分原理可得出拉格朗日方程,在相对论平均场近似下有核子场满足的 Dirac 方程

$$\{-i\boldsymbol{\alpha} \cdot \nabla + V(\mathbf{r}) + \beta[M + S(\mathbf{r})]\}\psi_i = \epsilon_i \psi_i, \quad (9)$$

其中 $V(\mathbf{r})$ 表示矢量势

$$V(\mathbf{r}) = g_\omega \omega_0 + g_\rho \tau_3 \rho_0(\mathbf{r}) + e \frac{1+\tau_3}{2} A_0(\mathbf{r}), \quad (10)$$

$S(\mathbf{r})$ 表示标量势

$$S(\mathbf{r}) = g_\sigma \sigma(\mathbf{r}). \quad (11)$$

介子场的 Klein-Gordon 方程和电磁场方程分别为

$$(-\Delta + m_\sigma^2)\sigma(\mathbf{r}) = -g_\sigma \rho_s(\mathbf{r}) - g_2 \sigma^2(\mathbf{r}) - g_3 \sigma^3(\mathbf{r}), \quad (12)$$

$$(-\Delta + m_\omega^2)\omega_0(\mathbf{r}) = g_\omega \rho_v(\mathbf{r}), \quad (13)$$

$$(-\Delta + m_\rho^2)\rho_0(\mathbf{r}) = g_\rho \rho_3(\mathbf{r}), \quad (14)$$

$$-\Delta A_0 = e\rho_c(\mathbf{r}), \quad (15)$$

其中对应的源密度为

$$\rho_s = \sum_i n_i \bar{\psi}_i \psi_i, \quad (16)$$

$$\rho_v = \sum_i n_i \psi_i^\dagger \psi_i, \quad (17)$$

$$\rho_3 = \sum_p n_i \psi_p^\dagger \psi_p - \sum_n n_i \psi_n^\dagger \psi_n, \quad (18)$$

$$\rho_c = \sum_p n_i \psi_p^\dagger \psi_p. \quad (19)$$

而上面四个式子中的粒子数占有概率

$$n_i = 2V_i^2. \quad (20)$$

按照上述理论模型,经过迭代计算,可以得到各单粒子能级 ϵ_i 对应的 u_i 和 v_i ,进而代入(6)式求出原子核体系的对能.

3. 计算结果和分析

在 BCS + RMF 模型计算中,我们假定原子核有轴对称形变,对方程的求解在柱坐标系中采用谐振子展开方法.计算中对费米子波函数选用 12 个谐振子壳层,对玻色子波函数选用 20 个谐振子壳层.选用常见的 NL-3 相互作用参数组^[12],输入的形变参数 β 的初值选任意合理的值.

3.1. 对能 E 和能隙 Δ 的关系

在 BCS + RMF 模型中,对关联效应大多以引入能隙 Δ 的方式处理.但对不同的原子核, Δ 的确定却至今没有一种理想的方法.最常见的三参数、四参数公式^[3],或类似于 $\Delta = 11.2/\sqrt{A}$ 的经验公式^[13],以及考虑了同位旋相关性的其他表述^[14],均仅是较粗糙的描述,对同一原子核的能隙 Δ 的计算结果往往各不相同,用于精确计算的可信度并不高.而从(6)式可见,对能 E 和采用的能隙 Δ 有关,故我们首先以处于稳定区的质子幻数核⁴²Ca 和远离稳定谷的普通核¹⁷⁶Yb 为例,分别计算⁴²Ca 的中子对能和¹⁷⁶Yb 的质子对能随能隙 Δ_n (Δ_p) 的变化规律.结果如图 1 所示.

图 1 表明,不论是处于稳定谷的幻数核⁴²Ca 还是远离稳定谷的普通形变核¹⁷⁶Yb,也不论是中子对能还是质子对能,对能均随对应的核子数的增加而增大,经过曲线拟合,进一步发现对能 E 较好地

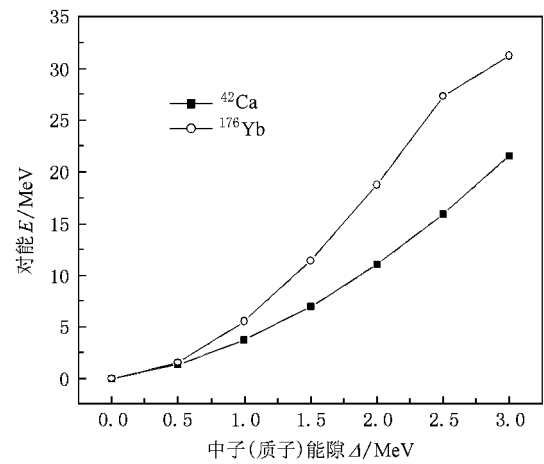


图 1 ^{42}Ca 和 ^{176}Yb 两个核的对能随中子(质子)能隙的变化

能隙 Δ^2 成正比。

3.2. 整个核谱上质子对能和中子对能的计算

根据 3.1 节的计算,能隙 Δ 的微小改变都会引起对能 E 的明显变化,为了突出对能和原子核本身性质的关系,根据偶偶核第一激发态的能级间隔大多为 1 MeV 的实验事实,统一取质子和中子的能隙 Δ 为 1 MeV.在整个核谱上,从质子(中子)数 $P(N) = 8$ 开始,每间隔质子(中子)数 4 抽取样本,并考虑所有的幻数,一直算到 $P = 100$ 和 $N = 128$,计算结果如图 2 所示。

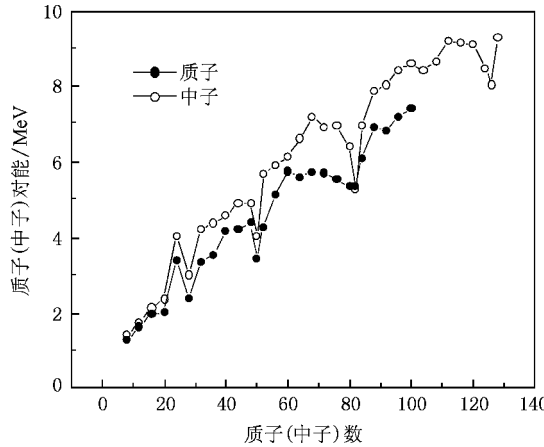


图 2 核谱上质子(中子)对能随质子(中子)数的变化规律

从图 2 可见:1)对能 E 的大小和原子核的壳结构有关,幻数核的对能比相邻核明显减小.这是因为对相互作用是一种表面力,费米面附近能级对此都有贡献,而不是只有最后一对核子才有对相互作用(最后一对核子的对作用是对应着奇偶差).对于幻

核,核子之间也有对相互作用,但由于费米面位于两个满壳之间,费米面附近能级密度很小,对相互作用很难使得费米面下面的核子对散射到费米面上面去,因此对能的总体表现较小.而从(6)式分析,幻数核最稳定,费米面以下的能级基本被占据而费米面以上的能级基本空着,故 $\sum_i u_i v_i$ 最小而导致幻数核的对能比相邻核小.这个规律,可用于检验新幻数的产生和传统幻数的消失.2)随着质子(中子)数的增加,质子(中子)对能也随之增大.这是因为核子数越多,涉及的轨道数也越多,各个轨道被占据或空着的概率之和也越大,即 $\sum_i u_i v_i$ 增大,而图 2 中 $P(N) = 20$ 核的对能相对前一个核没有明显减少或略有增大,我们分析,其原因就在于此,因为在轻核区,相邻二个核的核子数之差的百分率较中、重核大.3)在稳定核中,质子的对能比中子对能要小(图 2 中抽取的样本,都是稳定核),核子数越多,差别越大.其原因在于稳定核中,质子数小于中子数,中子数越多,发生对相互作用的二个质子的波函数重叠的概率越小,作为短程力的对相互作用效果自然就变小.而核子数越多,同位旋越大,质子对能和中子对能的差别也就越大。

3.3. 对能和壳结构关系的应用

近年来,随着实验装置和手段的不断进步,寻找奇异核中可能存在的新幻数,已成为原子核研究领域的热门话题,因为它可以使人们从新的角度了解核结构的稳定性随核子比率的变化规律,进而提取核子间相互作用的重要信息.已有许多文献报道,在轻核的丰中子区发现了一些新幻数^[15-17].但这些报道主要来自实验的结果,从理论上通过研究对能而加以验证的方法还未见报道。

氧同位素的质子形成闭壳,质子和中子相互作用的影响较小,是研究中子壳结构的理想对象.其中的丰中子核 ^{22}O ($N = 14$)和 ^{24}O ($N = 16$)近来已被实验上初步确认是新的双幻核^[18-21].为此,我们计算了氧同位素偶偶核的对能加以检验.计算结果如图 3 所示。

图 3 确实显示了丰中子核 ^{22}O 和 ^{24}O 的对能比相邻的 ^{20}O 和 ^{26}O 核都要小,说明我们的理论计算和实验结果是一致的.但图 3 还显示另一令人感兴趣的数据,即 ^{14}O 的对能比相邻的 ^{12}O 和 ^{16}O 还小(用其他 NL-SH, NL-1 等参数组计算结果也是如此),预示 ^{14}O

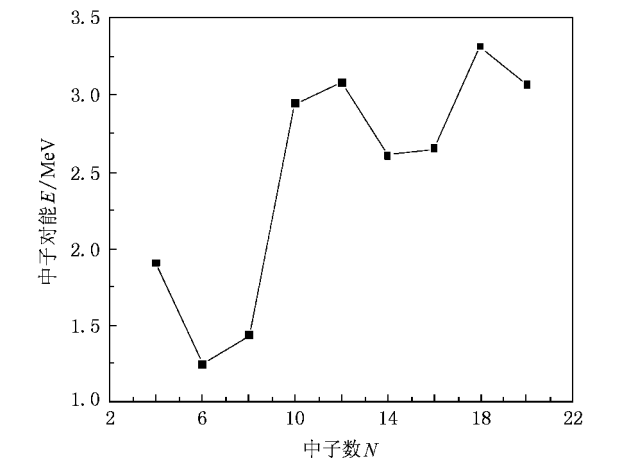


图3 氧同位素偶偶核的中子对能随中子数 N 的变化

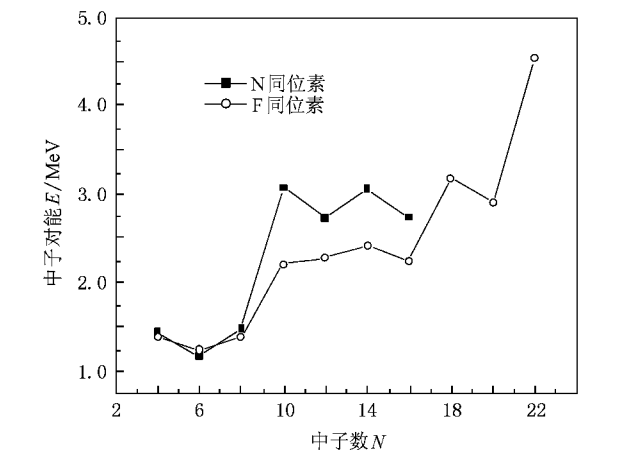


图4 N 和 F 同位素中偶中子核的对能 E 随中子数 N 的变化

也有可能是新的双幻核.关于 $N = 6$ 是新的中子幻数,确实已有多篇文章进行了讨论^[22-23],但大多认为是在轻核的丰中子区,而在丰质子区 $N = 6$ 是否是一个新的中子幻数,或者说是一个子壳,却是一个新的课题.为了进一步探讨在丰质子区 $N = 6$ 的闭壳问题,我们计算了和氧同位素相邻的 N 和 F 同位素偶中子核的中子对能,结果见图 4.

图 4 同样显示 $N = 6$ 的中子对能较相邻的二个核都要小,这说明不仅在丰中子区,而且在丰质子区, $N = 6$ 都可能是一个中子幻数,或者至少有一个较大的单粒子能隙.当然, $N = 6$ 的对能比 $N = 8$ 小,并不能证明前者比后者有更强的闭壳效应,因为前者的中子数比后者少,理由如 3.2 节所述.

4. 结 论

原子核体系对能的大小,在确定了能隙 Δ 的前提下,本质上是各单粒子能级分布和占有概率的反映,或者说是原子核壳结构的间接体现.因此,通过计算对能,可以较准确地检验核的壳效应.至于对特定的原子核,能隙 Δ 究竟应当取多大,那是另一个值得研究的课题.在撰写本文之初,我们试用过其他几种计算能隙 Δ 的公式,结果均不佳.故本文中对所有核均取为 1 MeV,但这仅是为了核之间的相互比较,由此计算的对能 E 并不代表核的真正对能,特此说明.

[1] Sandulescu N ,Geng L S ,Toki H ,Hillhouse G C 2003 *Phys. Rev. C* **68** 054323

[2] Li J Q , Ma Z ,Chen B ,Zhou Y 2002 *Phys. Rev. C* **65** 064305

[3] Wu J M , Yang B J , Zheng C K 1987 *Atomic nucleus theory*. (Beijing :Atomic Energy Publisher)(in Chinese) [胡济民、杨伯君、郑春开 1987 原子核理论 (原子能出版社)]

[4] Ren Z Z , Mittig W , Chen B Q *et al* 1995 *Phys. Rev. C* **52** R20

[5] Ren Z Z , Chen B ,Ma Z Y ,Xu G O 1996 *J. Phys. G* **22** L1

[6] Geng L S ,Hiroshi Tokil , Meng J 2005 *Progress of Theoretical Physics* **113** 785

[7] Nerlo-Pomorska B , Pomorski K , Bartel J , Dietrich K 2002 *Phys. Rev. C* **66** 051302

[8] Ding B G , Zhang D L , Lu D H 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 865 (in Chinese) [丁斌刚、张大立、鲁定辉 2009 物理学报 **58** 865]

[9] Ring P , Gambhir Y K , Lalazissis D A 1997 *Comp. Phys. Commu.* **105** 77

[10] Ding B G , Lu D H ,Zhang D L 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 6905 (in Chinese) [丁斌刚、鲁定辉、张大立 2007 物理学报 **56** 6905]

[11] Chen D H , Tai F , Ren Z Z 2003 *HEP & NP* **27** 8 (in Chinese) [陈鼎汉、邰 非、任中洲 2003 高能物理和核物理 **27** 8]

[12] Lee S J , Fink J , Balantekin A B 1986 *Phys. Rev. Lett.* **57** 2916

[13] Moller P , Nix J R 1990 *Nucl. Phys. A* **536** 20

[14] Madland D G ,Nix J R 1988 *Nucl. Phys. A* **476** 1

[15] Iwasaki H , Motobayashi T , Akiyoshi H 2000 *Phys. Lett. B* **491** 8

[16] Iwasaki H , Motobayashi T , Akiyoshi H 2002 *Eur. Phys. J. A* **13** 55

[17] Kimura M , Horiuchi H 2002 *Prog. Theor. Phys.* **107** 33

[18] Elekse Z , Dombradi Zs , Aoi N *et al* 2006 *Phys. Rev. C* **74** 017306

[19] Stanoiu M , Azaiez F , Dombrádi Zs *et al* 2004 *PhysL Rev. C* **69** 034312

[20] Ozawa A , Kobayashi T , Suzuki T *et al* 2000 *Phys. Rev. Lett.* **84** 5493

- [21] Becheva E , Blumenfeld Y , Khan E *et al* 2006 *Probe Phys. Rev. Lett.* **96** 012501
- [22] Otsuka T , Fujimoto R , Utsuno Y , Brown B A , Honma M , Mizusaki G M , Greiner W 2006 *J. Phys. G : Nucl. Part. Phys.* **32** 565
- [23] Gupta R K , Balasubramaniam M , Kumar S , Patra S K , Unzenberg 2001 *Phys. Rev. Lett.* **87** 082502

A systematic study on nuclear pairing energy under the relativistic mean-field model^{*}

Ding Bin-Gang^{1)†} Zhang Da-Li¹⁾ Lu Ding-Hui²⁾

¹ *College of Science , Huzhou Teacher's College , Huzhou 313000 , China*

² *Institute of Modern Physics , Zhejiang University , Hangzhou 310027 , China*

(Received 7 October 2008 ; revised manuscript received 2 December 2008)

Abstract

Nuclear pairing energy of dozens of atomic nuclei in nuclear period chart are calculated along the stable line by extracting the swatch at a proton or neutron number interval of 4. Especially , we have studied the rule of pairing energy of the even-even nuclei of O isotopes changing with nucleon number under the relativistic mean-field model , and found , when energy gap Δ is fixed , the magnitude of nuclear pairing energy is related to nuclear shell structure. Thereof we propose a simple method to test closed shell , and further , we conclude that the neutron number $N = 6$ is a new magic number not only in neutron-rich region , but also in proton-rich region of light nuclei.

Keywords : relativistic mean-field model , pairing energy , energy gap , magic number

PACC : 2160C , 2160E

^{*} Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 10675046).

[†] E-mail : dlingbingang@163.com