

非傍轴部分相干厄米-高斯光束的相干和非相干合成*

黎昌金¹⁾²⁾ 吕百达^{2)†}

1) 内江师范学院物理与电子信息工程学院, 内江 641112)

2) 四川大学激光物理与化学研究所, 成都 610064)

(2009 年 1 月 4 日收到, 2009 年 2 月 19 日收到修改稿)

推导出二维非傍轴部分相干厄米-高斯(H-G)光束相干合成和非相干合成的交叉谱密度和光强的解析公式, 并分析了一些特例. 合成光束的光强不仅决定于 f 参数, f_c 参数, 离轴参数, 合成光束的束数和阶数以及传输距离 z , 而且还决定于合成方式. 对部分相干光的相干合成和非相干合成概念做了物理诠释, 其正确性为数值计算例证实.

关键词: 部分相干光的相干和非相干合成, 非傍轴部分相干厄米-高斯(H-G)光束, 自由空间中的传输方程

PACC: 4225, 4225K

1. 引 言

用光束合成的方法可将低功率激光定标到高功率, 并满足应用所要求的光束质量, 因而引起广泛的理论和实验研究兴趣. 一维和二维激光二极管阵列, 光束合成的高功率光纤激光器是光束合成的重要实际应用例. 对一维、二维、径向和六角形排布等多种光束合成的技术方案已进行了许多研究^[1-5]. 但迄今为止, 主要的工作都是针对完全空间相干、傍轴光束的合成进行的, 并按光场或光强叠加的不同而分为相干和非相干合成. 近年来, 对光束合成的理论模型进行了改进. 一方面, 对大发散角光束(例如激光二极管)的合成考虑了光束的非傍轴性^[6]; 另一方面, 对实际光束考虑了光场的部分空间相干性^[7,8]. 文献[8]以光纤激光器光束的合成作为应用背景, 研究了三束部分空间相干高斯-谢尔模型光束的相干合成问题, 但对所使用的部分相干光的相干合成概念未做进一步说明. 显然, 完全空间相干光的相干合成概念不能简单用于部分空间相干光(以下

简称为部分相干光). 本文以更为一般的部分相干光——部分相干厄米-高斯(H-G)光束^[9], 并考虑了当束宽小至与波长可相比拟或和有大发散角时光束的非傍轴性^[10], 即非傍轴部分相干 H-G 光束的合成为例, 对非傍轴部分相干光的两类合成方式——相干合成和非相干合成进行了研究, 推导出非傍轴部分相干 H-G 光束相干和非相干合成的解析传输公式, 以数值计算例对两类光束合成的特点做了说明, 并对部分相干光的相干和非相干合成概念做了物理诠释.

2. 非傍轴部分相干 H-G 光束的相干合成

如图 1 所示, 设直角坐标系下 $z=0$ 面上有 $P \times Q$ 束离轴部分相干 H-G 光束. 在 x, y 方向每一子光束相同, 且相邻子光束之间的间距(离轴参数)分别为 a 和 b . 为确定起见, 设 $P, Q =$ 偶数, 奇数的情形可做直接推广. 阵列中下标为 p 和 q 的离轴部分相干 H-G 光束在 $z=0$ 面上的交叉谱密度为^[7,9]

$$W_{pq}(x_{01} - pa, y_{01} - qb, x_{02} - pa, y_{02} - qb, 0) \\ = \exp\left[-\frac{(x_{01} - x_{02})^2 + (y_{01} - y_{02})^2}{\sigma_0^2}\right] H_m\left[\frac{\sqrt{\chi}(x_{01} - pa)}{w_0}\right] H_n\left[\frac{\sqrt{\chi}(y_{01} - qb)}{w_0}\right] \\ \times H_m\left[\frac{\sqrt{\chi}(x_{02} - pa)}{w_0}\right] H_n\left[\frac{\sqrt{\chi}(y_{02} - qb)}{w_0}\right] \exp\left[-\frac{(x_{01} - pa)^2 + (y_{01} - qb)^2 + (x_{02} - pa)^2 + (y_{02} - qb)^2}{w_0^2}\right],$$

* 国家自然科学基金(批准号:10874125)资助的课题.

† 通讯联系人. E-mail: baidalu@tom.com

$$p \in \left[-\frac{P-1}{2}, \frac{P-1}{2} \right], q \in \left[-\frac{Q-1}{2}, \frac{Q-1}{2} \right], \quad (1)$$

式中, $H_m(\cdot)$ 和 $H_n(\cdot)$ 分别为 m 阶和 n 阶厄米多项式, w_0 和 σ_0 分别表示对应基模高斯光束的束腰宽度和相干长度.

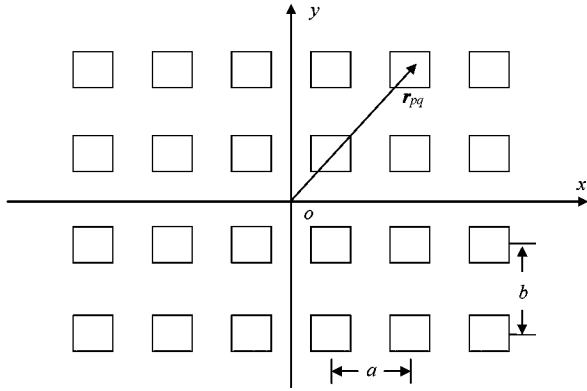


图1 直角坐标系下 2D 离轴部分相干 H-G 光束阵列示意图

在 $z=0$ 面处相干合成光束的交叉谱密度可表示为^[7]

$$\begin{aligned} W_{\text{coh}}(\boldsymbol{\rho}_{01}, \boldsymbol{\rho}_{02}, 0) &= \sum_{p_1=-\frac{P-1}{2}}^{\frac{P-1}{2}} \sum_{p_2=-\frac{P-1}{2}}^{\frac{P-1}{2}} \sum_{q_1=-\frac{Q-1}{2}}^{\frac{Q-1}{2}} \sum_{q_2=-\frac{Q-1}{2}}^{\frac{Q-1}{2}} E^*(\boldsymbol{\rho}_{01} - \mathbf{r}_{p_1 q_1}, \boldsymbol{\rho}_{02} - \mathbf{r}_{p_2 q_2}) \\ &\times E(\boldsymbol{\rho}_{01} - \mathbf{r}_{p_1 q_1}, \boldsymbol{\rho}_{02} - \mathbf{r}_{p_2 q_2}) \\ &= \sum_{p_1=-\frac{P-1}{2}}^{\frac{P-1}{2}} \sum_{p_2=-\frac{P-1}{2}}^{\frac{P-1}{2}} \sum_{q_1=-\frac{Q-1}{2}}^{\frac{Q-1}{2}} \sum_{q_2=-\frac{Q-1}{2}}^{\frac{Q-1}{2}} W_{pq}(\boldsymbol{\rho}_{01} - \mathbf{r}_{p_1 q_1}, \boldsymbol{\rho}_{02} - \mathbf{r}_{p_2 q_2}), \end{aligned} \quad (2)$$

式中 $\boldsymbol{\rho}_{0j} = (x_{0j}, y_{0j})$ 表示在 $z=0$ 面处第 j ($j=1, 2$) 点的坐标, $\mathbf{r}_{p_j q_j} = (p_j a, q_j b)$ 表示子光束的离轴矢量.

令 $\boldsymbol{\rho}_{01} = \boldsymbol{\rho}_{02} = \boldsymbol{\rho}_0$, 由 (2) 式得到 $z=0$ 面处合成光束的光强为

$$\begin{aligned} I_{\text{coh}}(\boldsymbol{\rho}_0, 0) &= W_{\text{coh}}(\boldsymbol{\rho}_0, \boldsymbol{\rho}_0, 0) \\ &= \sum_{p_1=-\frac{P-1}{2}}^{\frac{P-1}{2}} \sum_{p_2=-\frac{P-1}{2}}^{\frac{P-1}{2}} \sum_{q_1=-\frac{Q-1}{2}}^{\frac{Q-1}{2}} \sum_{q_2=-\frac{Q-1}{2}}^{\frac{Q-1}{2}} W_{pq}(\boldsymbol{\rho}_0 - \mathbf{r}_{p_1 q_1}, \boldsymbol{\rho}_0 - \mathbf{r}_{p_2 q_2}). \end{aligned} \quad (3)$$

在相干极限 $\sigma_0 \rightarrow \infty$ 下 (3) 式可写为

$$I_{\text{coh}}(\boldsymbol{\rho}_0, 0) = \sum_{p=-\frac{P-1}{2}}^{\frac{P-1}{2}} \sum_{q=-\frac{Q-1}{2}}^{\frac{Q-1}{2}} E^*(\boldsymbol{\rho}_0 - \mathbf{r}_{pq})$$

$$\times \sum_{p=-\frac{P-1}{2}}^{\frac{P-1}{2}} \sum_{q=-\frac{Q-1}{2}}^{\frac{Q-1}{2}} E(\boldsymbol{\rho}_0 - \mathbf{r}_{pq}). \quad (4)$$

因此, 在相干极限下 (4) 式成为完全相干光的相干合成公式. 由 (2) (3) 式知, 部分相干光的相干合成, 又可称为交叉谱密度函数的叠加^[11].

考虑到光场的非傍轴性, 交叉谱密度在自由空间中的传输遵从广义瑞利-索末菲衍射积分公式^[12]

$$\begin{aligned} W(\boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}_2, z) &= \frac{k^2}{4\pi^2} \iint_{z=0} W(\boldsymbol{\rho}_{01}, \boldsymbol{\rho}_{02}, 0) \frac{\cos\theta_1 \cos\theta_2}{R_1 R_2} \\ &\times \exp[ik(R_2 - R_1)] d^2 \boldsymbol{\rho}_{01} d^2 \boldsymbol{\rho}_{02}, \end{aligned} \quad (5)$$

式中 $\boldsymbol{\rho}_j = (x_j, y_j)$ 表示在 z 面上第 j 点的坐标, $R_j = [(x_j - x_{0j})^2 + (y_j - y_{0j})^2 + z^2]^{1/2}$, $\cos\theta_j = \frac{z}{R_j}$. 将 R_j 展开为级数

$$R_j \approx r_j + \frac{x_{0j}^2 + y_{0j}^2 - 2x_j x_{0j} - 2y_j y_{0j}}{2r_j}, \quad (6)$$

式中 $r_j = (x_j^2 + y_j^2 + z^2)^{1/2}$, 并将 (1) 和 (2) 式代入 (5) 式, 经过复杂但直接的积分运算得到 z 面上非傍轴部分相干 H-G 光束相干合成光束的交叉谱密度函数为

$$\begin{aligned} W_{\text{coh}}(x_1, y_1, x_2, y_2, z) &= \frac{1}{4T_1 T_2 k^2 f^4} \frac{z^2}{r_1^2 r_2^2} \frac{(m! n!)}{(T_1 T_2)^{m+n}} \exp[ik(r_2 - r_1)] \\ &\times \sum_{p_1=-\frac{P-1}{2}}^{\frac{P-1}{2}} \sum_{p_2=-\frac{P-1}{2}}^{\frac{P-1}{2}} \sum_{q_1=-\frac{Q-1}{2}}^{\frac{Q-1}{2}} \sum_{q_2=-\frac{Q-1}{2}}^{\frac{Q-1}{2}} \sum_{k_1=0}^{[m/2]} \sum_{k_2=0}^{[n/2]} \\ &\times \sum_{l_1=0}^{[(m-2k_1+l_2)/2]} \sum_{l_2=0}^{[m-2k_2]} A_{k_1 k_2 l_1 l_2} T_1^{2k_1+l_1-l_2} T_2^{2k_2} \\ &\times (1 - 2/T_2)^{k_2} s_1^{m-2k_2-2l_1+l_2} \left(\frac{x_2 - p_2 a}{r_2} \right)^{m-2k_2-l_2} \\ &\times \exp\left[-\frac{ik}{2r_1} p_1 a (p_1 a - 2x_1) \right] \\ &\times \exp\left[\frac{ik}{2r_2} p_2 a (p_2 a - 2x_2) \right] \\ &\times \exp\left(\frac{s_1^2}{4T_1} \right) \exp\left[-\frac{(x_2 - p_2 a)^2}{4T_2 r_2^2 f^2} \right] \\ &\times \sum_{k'_1=0}^{[n/2]} \sum_{k'_2=0}^{[n/2]} \sum_{l'_1=0}^{[n-2k'_1+l'_2]} \sum_{l'_2=0}^{[n-2k'_2]} A_{k'_1 k'_2 l'_1 l'_2} \\ &\times T_1^{2k'_1+l'_1-l'_2} T_2^{2k'_2} (1 - 2/T_2)^{k'_2} \\ &\times s_2^{n-2k'_2-2l'_1+l'_2} \left(\frac{y_2 - q_2 b}{r_2} \right)^{n-2k'_2-l'_2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\times \exp\left[-\frac{ik}{2r_1}q_1 b (q_1 b - 2y_1)\right] \\ &\times \exp\left[\frac{ik}{2r_2}q_2 b (q_2 b - 2y_2)\right] \\ &\times \exp\left(\frac{s_2^2}{4T_1}\right) \exp\left[-\frac{(y_2 - q_2 b)^2}{4T_2 r_2^2 f^2}\right], \quad (7) \end{aligned}$$

式中

$$f = \frac{1}{kw_0}, (f \text{ 参数}), \quad (8a)$$

$$f_\sigma = \frac{1}{k\sigma_0}, (f_\sigma \text{ 参数}), \quad (8b)$$

$$T_1 = 1 + \frac{f_\sigma^2}{f^2} + \frac{i}{2r_1 k f^2} - \frac{f_\sigma^4}{T_2 f^4}, \quad (8c)$$

$$T_2 = 1 + \frac{f_\sigma^2}{f^2} - \frac{i}{2r_2 k f^2}, \quad (8d)$$

$$s_1 = \frac{i}{r_1 f}(x_1 - p_1 a) - \frac{i}{r_2 f} \frac{f_\sigma^2}{T_2 f^2}(x_2 - p_2 a), \quad (8e)$$

$$\begin{aligned} s_2 = &\frac{i}{r_1 f}(y_1 - q_1 b) \\ &- \frac{i}{r_2 f} \frac{f_\sigma^2}{T_2 f^2}(y_2 - q_2 b), \quad (8f) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_{k_1 k_2 l_1 l_2} = &(-1)^{m+k_1-k_2-l_2} 2^{m-k_1-k_2} i^{m-2k_2-l_2} \\ &\times \frac{(m-2k_1+l_2)!}{k_1! k_2! l_1! l_2! (m-2k_1)(m-2k_1-2l_1+l_2)(m-2k_2-l_2)!} \times \frac{f_\sigma^{2l_2}}{f^{m-2k_2+l_2}}, \quad (8g) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_{k'_1 k'_2 l'_1 l'_2} = &(-1)^{n+k'_1-k'_2-l'_2} 2^{n-k'_1-k'_2} i^{n-2k'_2-l'_2} \\ &\times \frac{(n-2k'_1+l'_2)!}{k'_1! k'_2! l'_1! l'_2! (n-2k'_1)(n-2k'_1-2l'_1+l'_2)(n-2k'_2-l'_2)!} \\ &\times \frac{f_\sigma^{2l'_2}}{f^{n-2k'_2+l'_2}}, \quad (8h) \end{aligned}$$

求和号上方的 \bullet 表示取整数。

由 (3) 式得到 z 面处相干合成光束的光强分布为

$$\begin{aligned} &I_{\text{coh}}(x, y, z) \\ = &\frac{(m!n!)^2}{1+4k^2 f^2(f^2+2f_\sigma^2)r^2} \frac{z^2}{r^2} \\ &\times \left[\frac{4k^2 f^4 r^2}{1+4k^2 f^2(f^2+2f_\sigma^2)r^2} \right]^{m+n} \\ &\times \exp\left[-\frac{2k^2 f^2(x^2+y^2)}{1+4k^2 f^2(f^2+2f_\sigma^2)r^2}\right] \\ &\times \sum_{p_1=-\frac{P-1}{2}}^{\frac{P-1}{2}} \sum_{p_2=-\frac{P-1}{2}}^{\frac{P-1}{2}} \sum_{q_1=-\frac{Q-1}{2}}^{\frac{Q-1}{2}} \sum_{q_2=-\frac{Q-1}{2}}^{\frac{Q-1}{2}} \sum_{k_1=0}^{[m/2]} \sum_{k_2=0}^{[n/2]} \\ &\times \sum_{l_1=0}^{[(m-2k_1+l_2)/2]} \sum_{l_2=0}^{[m-2k_2]} A_{k_1 k_2 l_1 l_2} t_1^{2k_1+l_1-l_2} t_2^{2k_2} \\ &\times (1-2/t_2)^{k_2} s_x^{m-2k_2-2l_1+l_2} \left(\frac{x-p_2 a}{r}\right)^{m-2k_2-l_2} \\ &\times \exp\left\{-\frac{1}{1+4k^2 f^2(f^2+2f_\sigma^2)r^2}\right. \\ &\times [k^2 a^2(p_1^2+p_2^2)(f^2+2f_\sigma^2) - 2k^2 a^2 f_\sigma^2 p_1 p_2 \\ &+ 2ik^3 f^2(f^2+2f_\sigma^2)(p_1^2-p_2^2)a^2 r \\ &- 4ik^3 f^2(f^2+2f_\sigma^2)(p_1-p_2) \\ &\left. \times rax - 2k^2 f^2(p_1+p_2)ax\right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\times \sum_{k'_1=0}^{[n/2]} \sum_{k'_2=0}^{[n/2]} \sum_{l'_1=0}^{[(n-2k'_1+l'_2)/2]} \sum_{l'_2=0}^{[n-2k'_2]} A_{k'_1 k'_2 l'_1 l'_2} t_1^{2k'_1+l'_1-l'_2} t_2^{2k'_2} \\ &\times (1-2/t_2)^{k'_2} s_y^{n-2k'_2-2l'_1+l'_2} \left(\frac{y-q_2 b}{r}\right)^{n-2k'_2-l'_2} \\ &\times \exp\left\{-\frac{1}{1+4k^2 f^2(f^2+2f_\sigma^2)r^2}\right. \\ &\times [k^2 b^2(q_1^2+q_2^2)(f^2+2f_\sigma^2) - 2k^2 b^2 f_\sigma^2 q_1 q_2 \\ &+ 2ik^3 f^2(f^2+2f_\sigma^2)(q_1^2-q_2^2)b^2 r \\ &- 4ik^3 f^2(f^2+2f_\sigma^2)(q_1-q_2) \\ &\left. \times rby - 2k^2 f^2(q_1+q_2)by\right\}, \quad (9) \end{aligned}$$

其中

$$t_1 = 1 + \frac{f_\sigma^2}{f^2} + \frac{i}{2rkf^2} - \frac{f_\sigma^4}{t_2 f^4}, \quad (10a)$$

$$t_2 = 1 + \frac{f_\sigma^2}{f^2} - \frac{i}{2rkf^2}, \quad (10b)$$

$$s_x = \frac{i}{rf}[(x-p_1 a) - \frac{f_\sigma^2}{t_2 f^2}(x-p_2 a)], \quad (10c)$$

$$s_y = \frac{i}{rf}[(y-q_1 b) - \frac{f_\sigma^2}{t_2 f^2}(y-q_2 b)]. \quad (10d)$$

由 (9) 式知 $I_{\text{coh}}(x, y, z)$ 与 f 参数、 f_σ 参数、离轴参数 a 和 b 、光束束数 P 和 Q 、阶数 m 和 n ，以及传输距离 z 等有关。(9) 式对于菲涅耳区和夫琅和费

区都是适用的,并且,由于光束的非傍轴性,变量 x , y 已不再可分离. 如果令 $Q = 1, b = 0$, 则(9)式退化为一维线阵非傍轴部分相干 H-G 光束相干合成光束的传输公式.

将(5)式做远场近似

$$R_j \approx r_j - \frac{x_j x_{0j} + y_j y_{0j}}{r_j}, \quad (11)$$

得到远场相干合成光束的交叉谱密度为

$$\begin{aligned} & W_{\text{coh},f}(x_1, y_1, z; x_2, y_2, z) \\ &= W_{f1}(x_1, y_1, z; x_2, y_2, z) \sum_{p_1 = -\frac{p-1}{2}}^{\frac{p-1}{2}} \sum_{p_2 = -\frac{p-1}{2}}^{\frac{p-1}{2}} \sum_{q_1 = -\frac{q-1}{2}}^{\frac{q-1}{2}} \\ &\quad \times \sum_{q_2 = -\frac{q-1}{2}}^{\frac{q-1}{2}} \exp\left(\frac{ikx_1 p_1 a}{r_1} - \frac{ikx_2 p_2 a}{r_2}\right) \\ &\quad \times \exp\left(\frac{iky_1 q_1 b}{r_1} - \frac{iky_2 q_2 b}{r_2}\right), \quad (12a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & W_{f1}(x_1, y_1, z; x_2, y_2, z) \\ &= \frac{1}{4T_{f1} T_{f2} k^2 f^4} \frac{z^2}{r_1^2 r_2^2} \frac{(m!n!)^2}{(T_{f1} T_{f2})^{m+n}} \exp[ik(r_2 - r_1)] \\ &\quad \times \sum_{k_1=0}^{[m/2]} \sum_{k_2=0}^{[m/2]} \sum_{l_1=0}^{(m-2k_1+l_2)} \sum_{l_2=0}^{[m-2k_2]} A_{k_1 k_2 l_1 l_2} T_{f1}^{2k_1+l_1-l_2} T_{f2}^{2k_2} \\ &\quad \times \left(1 - \frac{2}{T_{f2}}\right)^{k_2} s_{f1}^{m-2k_2-2l_1+l_2} \left(\frac{x_2}{r_2}\right)^{m-2k_2-l_2} \\ &\quad \times \exp\left(\frac{s_{f1}^2}{4T_{f1}}\right) \exp\left(-\frac{x_2^2}{4T_{f2} r_2^2 f^2}\right) \\ &\quad \times \sum_{k'_1=0}^{[n/2]} \sum_{k'_2=0}^{[n/2]} \sum_{l'_1=0}^{(n-2k'_1+l'_2)} \sum_{l'_2=0}^{[n-2k'_2]} A_{k'_1 k'_2 l'_1 l'_2} T_{f1}^{2k'_1+l'_1-l'_2} T_{f2}^{2k'_2} \\ &\quad \times \left(1 - 2/T_{f2}\right)^{k'_2} s_{f2}^{n-2k'_2-2l'_1+l'_2} \left(\frac{y_2}{r_2}\right)^{n-2k'_2-l'_2} \\ &\quad \times \exp\left(\frac{s_{f2}^2}{4T_{f1}}\right) \exp\left(-\frac{y_2^2}{4T_{f2} r_2^2 f^2}\right), \quad (12b) \end{aligned}$$

式中

$$T_{f1} = 1 + \frac{f_\sigma^2}{f^2} - \frac{f_\sigma^4}{T_{f2} f^4}, \quad (13a)$$

$$T_{f2} = 1 + \frac{f_\sigma^2}{f^2}, \quad (13b)$$

$$s_{f1} = \frac{ix_1}{r_1 f} - \frac{ix_2}{r_2 f} \frac{f_\sigma^2}{T_{f2} f^2}, \quad (13c)$$

$$s_{f2} = \frac{iy_1}{r_1 f} - \frac{iy_2}{r_2 f} \frac{f_\sigma^2}{T_{f2} f^2}. \quad (13d)$$

光强为

$$I_{\text{coh},f}(x, y, z)$$

$$\begin{aligned} &= I_{f1}(x, y, z) \sum_{p_1 = -\frac{p-1}{2}}^{\frac{p-1}{2}} \sum_{p_2 = -\frac{p-1}{2}}^{\frac{p-1}{2}} \sum_{q_1 = -\frac{q-1}{2}}^{\frac{q-1}{2}} \\ &\quad \times \sum_{q_2 = -\frac{q-1}{2}}^{\frac{q-1}{2}} \exp\left[\frac{ikax}{r}(p_1 - p_2)\right] \\ &\quad \times \exp\left[\frac{ikby}{r}(q_1 - q_2)\right], \quad (14a) \end{aligned}$$

式中

$$\begin{aligned} & I_{f1}(x, y, z) \\ &= \frac{(m!n!)^2}{4k^2 f^2 (f^2 + 2f_\sigma^2) r^2} \frac{z^2}{r^2} \left(\frac{f^2}{f^2 + 2f_\sigma^2}\right)^{m+n} \\ &\quad \times \exp\left[-\frac{x^2 + y^2}{2(f^2 + 2f_\sigma^2) r^2}\right] \\ &\quad \times \sum_{k_1=0}^{[m/2]} \sum_{k_2=0}^{[m/2]} \sum_{l_1=0}^{(m-2k_1+l_2)} \sum_{l_2=0}^{[m-2k_2]} A_{k_1 k_2 l_1 l_2} t_{f1}^{2k_1+l_1-l_2} \\ &\quad \times t_{f2}^{2k_2} (1 - 2/t_{f2})^{k_2} s_{fx}^{m-2k_2-2l_1+l_2} \left(\frac{x}{r}\right)^{m-2k_2-l_2} \\ &\quad \times \sum_{k'_1=0}^{[n/2]} \sum_{k'_2=0}^{[n/2]} \sum_{l'_1=0}^{(n-2k'_1+l'_2)} \sum_{l'_2=0}^{[n-2k'_2]} A_{k'_1 k'_2 l'_1 l'_2} t_{f1}^{2k'_1+l'_1-l'_2} \\ &\quad \times t_{f2}^{2k'_2} (1 - 2/t_{f2})^{k'_2} s_{fy}^{n-2k'_2-2l'_1+l'_2} \left(\frac{y}{r}\right)^{n-2k'_2-l'_2}, \quad (14b) \end{aligned}$$

$$t_{f1} = T_{f1}, \quad (15a)$$

$$t_{f2} = T_{f2}, \quad (15b)$$

$$s_{fx} = \frac{ix}{rf} \left(1 - \frac{f_\sigma^2}{t_{f2} f^2}\right), \quad (15c)$$

$$s_{fy} = \frac{iy}{rf} \left(1 - \frac{f_\sigma^2}{t_{f2} f^2}\right). \quad (15d)$$

(12) 和 (14) 式仅适用于夫琅和费区(远场).

与(7)和(9)式对应的傍轴公式可在傍轴近似

$$r_j \approx z + \frac{x_j^2 + y_j^2}{2z} \quad (16)$$

下得出,为节省篇幅从略.

3. 非傍轴部分相干 H-G 光束的非相干合成

在 $z = 0$ 处非相干合成光束的交叉谱密度可表示为

$$\begin{aligned} & W_{\text{incoh}}(\rho_{01}, \rho_{02}, 0) \\ &= \sum_{p = -\frac{p-1}{2}}^{\frac{p-1}{2}} \sum_{q = -\frac{q-1}{2}}^{\frac{q-1}{2}} E^*(\rho_{01} - \mathbf{r}_{pq}, \rho_{02} - \mathbf{r}_{pq}) \\ &\quad \times E(\rho_{01} - \mathbf{r}_{pq}, \rho_{02} - \mathbf{r}_{pq}) \end{aligned}$$

$$= \sum_{p=-\frac{P-1}{2}}^{\frac{P-1}{2}} \sum_{q=-\frac{Q-1}{2}}^{\frac{Q-1}{2}} W_{pq}(\rho_{01} - r_{pq}, \rho_{02} - r_{pq}). \quad (17)$$

令 $\rho_{01} = \rho_{02} = \rho_0$, 得合成光束的光强为

$$I_{\text{incoh}}(\rho_0, 0) = \sum_{p=-\frac{P-1}{2}}^{\frac{P-1}{2}} \sum_{q=-\frac{Q-1}{2}}^{\frac{Q-1}{2}} E^*(\rho_0 - r_{pq}) E(\rho_0 - r_{pq}) \\ = \sum_{p=-\frac{P-1}{2}}^{\frac{P-1}{2}} \sum_{q=-\frac{Q-1}{2}}^{\frac{Q-1}{2}} I_{pq}(\rho_0 - r_{pq}). \quad (18)$$

显然, 在相干极限 $\sigma_0 \rightarrow \infty$ 下 (18) 式也成立, 并与完全相干光的非相干合成公式一致. 因此, 部分相干光的非相干合成也可称为光强叠加^[11].

将 (1) (17) 式代入 (5) 式, 并利用 (6) 式得到在 z 面上非傍轴部分相干 H-G 光束非相干合成光束的交叉谱密度

$$W_{\text{incoh}}(x_1, y_1, x_2, y_2, z) \\ = \frac{1}{4T_1 T_2 k^2 f^4} \frac{z^2}{r_1^2 r_2^2} \frac{(m!n!)^2}{(T_1 T_2)^{m+n}} \exp[ik(r_2 - r_1)] \\ \times \sum_{p=-\frac{P-1}{2}}^{\frac{P-1}{2}} \sum_{q=-\frac{Q-1}{2}}^{\frac{Q-1}{2}} \sum_{k_1=0}^{[m/2]} \sum_{l_1=0}^{[m/2]} \sum_{k_2=0}^{[n-2k_1+l_2]} \sum_{l_2=0}^{[n-2k_2]} A_{k_1 k_2 l_1 l_2} T_1^{2k_1+l_1-l_2} T_2^{2k_2} (1-2/T_2)^{l_2} \\ \times h_1^{m-2k_2-2l_1+l_2} \left(\frac{x_2 - pa}{r_2} \right)^{m-2k_2-l_2} \\ \times \exp\left[\frac{ik}{2r_1} pa(2x_1 - pa) \right] \\ \times \exp\left[-\frac{ik}{2r_2} pa(2x_2 - pa) \right] \exp\left(\frac{h_1^2}{4T_1} \right) \\ \times \exp\left[-\frac{(x_2 - pa)^2}{4T_2 r_2^2 f^2} \right] \\ \times \sum_{k_1=0}^{[n/2]} \sum_{k_2=0}^{[n/2]} \sum_{l_1=0}^{[n-2k_1+l_2]} \sum_{l_2=0}^{[n-2k_2]} A_{k_1 k_2 l_1 l_2} \\ \times T_1^{2k_1+l_1-l_2} T_2^{2k_2} \times (1-2/T_2)^{l_2} \\ \times h_2^{n-2k_2-2l_1+l_2} \left(\frac{y_2 - qb}{r_2} \right)^{n-2k_2-l_2} \\ \times \exp\left[\frac{ik}{2r_1} qb(2y_1 - qb) \right] \\ \times \exp\left[-\frac{ik}{2r_2} qb(2y_2 - qb) \right] \\ \times \exp\left(\frac{h_2^2}{4T_1} \right) \exp\left[-\frac{(y_2 - qb)^2}{4T_2 r_2^2 f^2} \right], \quad (19)$$

式中

$$h_1 = \frac{i}{r_1 f} (x_1 - pa) - \frac{i}{r_2 f} \frac{f_\sigma^2}{T_2 f^2} (x_2 - pa) \quad (20a)$$

$$h_2 = \frac{i}{r_1 f} (y_1 - qb) - \frac{i}{r_2 f} \frac{f_\sigma^2}{T_2 f^2} (y_2 - qb) \quad (20b)$$

和光强

$$I_{\text{incoh}}(x, y, z) \\ = \frac{(m!n!)^2}{1 + 4k^2 f^2 (f^2 + 2f_\sigma^2) r^2} \frac{z^2}{r^2} \\ \times \left[\frac{4k^2 f^4 r^2}{1 + 4k^2 f^2 (f^2 + 2f_\sigma^2) r^2} \right]^{m+n} \\ \times \exp\left[-\frac{2k^2 f^2 (x^2 + y^2)}{1 + 4k^2 f^2 (f^2 + 2f_\sigma^2) r^2} \right] \\ \times \sum_{p=-\frac{P-1}{2}}^{\frac{P-1}{2}} \sum_{q=-\frac{Q-1}{2}}^{\frac{Q-1}{2}} \sum_{k_1=0}^{[m/2]} \sum_{l_1=0}^{[m/2]} \sum_{k_2=0}^{[m-2k_1+l_2]} \sum_{l_2=0}^{[m-2k_2]} A_{k_1 k_2 l_1 l_2} \\ \times t_1^{2k_1+l_1-l_2} t_2^{2k_2} (1-2/t_2)^{l_2} h_x^{m-2k_2-2l_1+l_2} \\ \times \left(\frac{x - pa}{r} \right)^{m-2k_2-l_2} \exp\left[\frac{2k^2 f^2 pa(2x - pa)}{1 + 4k^2 f^2 (f^2 + 2f_\sigma^2) r^2} \right] \\ \times \sum_{k_1=0}^{[n/2]} \sum_{k_2=0}^{[n/2]} \sum_{l_1=0}^{[n-2k_1+l_2]} \sum_{l_2=0}^{[n-2k_2]} A_{k_1 k_2 l_1 l_2} \\ \times t_1^{2k_1+l_1-l_2} t_2^{2k_2} \\ \times (1-2/t_2)^{l_2} h_y^{n-2k_2-2l_1+l_2} \left(\frac{y - qb}{r} \right)^{n-2k_2-l_2} \\ \times \exp\left[\frac{2k^2 f^2 qb(2y - qb)}{1 + 4k^2 f^2 (f^2 + 2f_\sigma^2) r^2} \right], \quad (21)$$

式中

$$h_x = \frac{i}{rf} \left(1 - \frac{f_\sigma^2}{t_2 f^2} \right) (x - pa), \quad (22a)$$

$$h_y = \frac{i}{rf} \left(1 - \frac{f_\sigma^2}{t_2 f^2} \right) (y - qb). \quad (22b)$$

由 (21) 式知 $I_{\text{incoh}}(x, y, z)$ 与 f 参数, f_σ 参数, 离轴参数 a 和 b , 光束束数 P 和 Q , 阶数 m 和 n 以及传输距离 z 等有关. 如果令 $Q = 1, b = 0$, 则 (21) 式退化为一维线阵非傍轴部分相干 H-G 高斯光束非相干合成光束的传输公式. 但是由于合成方式的不同 (19) 和 (21) 式与 (7) 和 (9) 式物理意义和数学表示式都不同, 所得结果也不同.

使用远场条件 (11) 式得到非相干合成光束在远场的交叉谱密度

$$W_{\text{coh},f}(x_1, y_1, x_2, y_2, z) \\ = W_f(x_1, y_1, x_2, y_2, z) \sum_{p=-\frac{P-1}{2}}^{\frac{P-1}{2}} \sum_{q=-\frac{Q-1}{2}}^{\frac{Q-1}{2}} \exp\left[ikpa \left(\frac{x_1}{r_1} - \frac{x_2}{r_2} \right) \right] \exp\left[ikqb \left(\frac{y_1}{r_1} - \frac{y_2}{r_2} \right) \right], \quad (23)$$

和光强

$$I_{\text{incoh.}}(x, y, z) = PQI_{J_1}(x, y, z), \quad (24)$$

式中 $W_{J_1}(x_1, y_1, x_2, y_2, z)$ 与 (12b) 相同, $J_1(x, y, z)$ 与 (14b) 相同. 从 (24) 式可见, 部分相干光非相干合成的远场光强是单束光束光强的 PQ 倍. 对一维线阵, 非相干合成光束在远场的光强为单束光束在远场光强的 P 倍.

(19) 式和 (21) 式对应的傍轴公式也可利用 (16) 式得出.

4. 数值计算与分析

利用本文所得解析公式做了大量数值计算, 典型例见图 2—8. 图 2 描述了 2D 阵列非傍轴部分相

干 TEM_{10} 模 H-G 光束相干合成 x 方向的归一化光强 $I_{\text{coh.}}(x, \rho, z)/I_{\text{coh. max.}}(x, \rho, z)$ 分布, 式中 $I_{\text{coh. max.}}(x, \rho, z)$ 为最大光强 (y 方向的归一化光强略去, 下同). 为了比较, 将傍轴结果也示于图中. 由图 2 可知, 当离轴参数, 光束束数, f 参数和传输距离 z 一定时, 光强分布由 f_σ 参数决定; 当 f_σ 参数较大如 $f_\sigma = 0.2$ 时, 傍轴近似失效, 当 f_σ 参数较小如 $f_\sigma \leq 0.07$ 时, 傍轴近似成立.

图 3 描述了 2D 阵列非傍轴部分相干 TEM_{10} 模 H-G 光束相干合成光束 x 方向的归一化光强 $I_{\text{coh.}}(x, 0, z)/I_{\text{coh. max.}}(x, 0, z)$ 分布. 由图 3 可知, 当 f 参数较大如 $f = 0.15$ 时, 傍轴近似失效, 当 f 参数较小如 $f \leq 0.09$ 时, 傍轴近似成立.

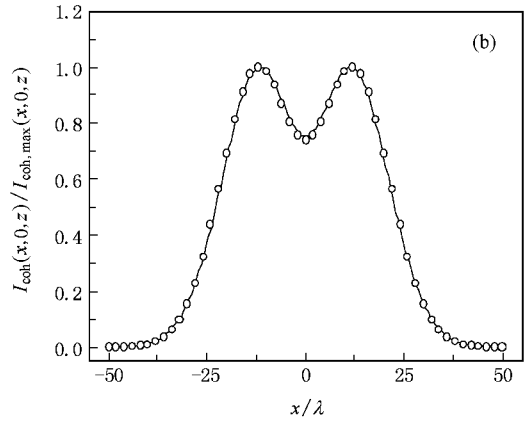
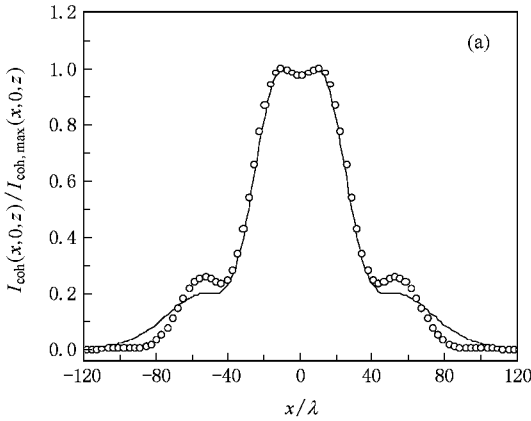


图 2 部分相干 TEM_{10} 模 H-G 光束相干合成光束 x 方向的归一化光强分布 (计算参数 $z = 100\lambda$, $a = b = 2\lambda$, $P = Q = 4$, $f = 0.01$; “—”为用 (9) 式的计算结果; “...”为用对应傍轴公式的计算结果) (a) $f_\sigma = 0.2$ (b) $f_\sigma = 0.07$

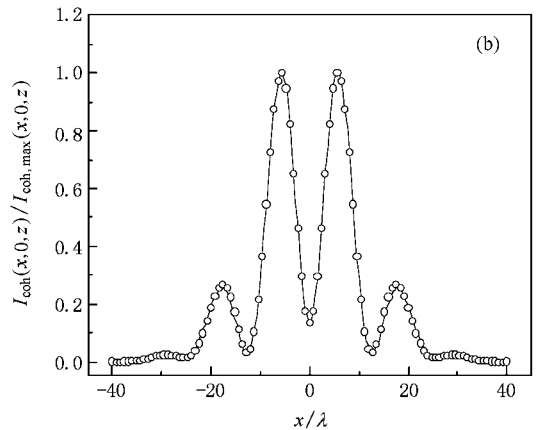
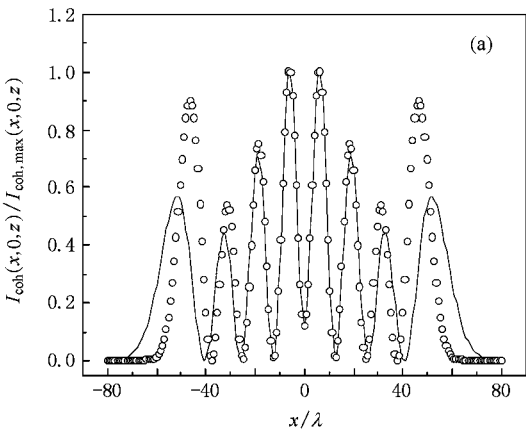


图 3 部分相干 TEM_{10} 模 H-G 光束相干合成光束 x 方向的归一化光强分布 (计算参数 $z = 100\lambda$, $a = b = 2\lambda$, $P = Q = 4$, $f_\sigma = 0.01$; “—”为用 (9) 式的计算结果; “...”为用对应傍轴公式的计算结果) (a) $f = 0.15$ (b) $f = 0.09$

图 4 描述了 2D 阵列非傍轴部分相干 TEM_{10} 模 H-G 光束非相干合成光束 x 方向的归一化光强 $I_{\text{incoh.}}$

$(x, \rho, z)/I_{\text{incoh. max.}}(x, \rho, z)$ 分布, 式中 $I_{\text{incoh. max.}}(x, \rho, z)$ 为光强最大值. 由图 4 可知, 当 f_σ 参数较大如 $f_\sigma =$

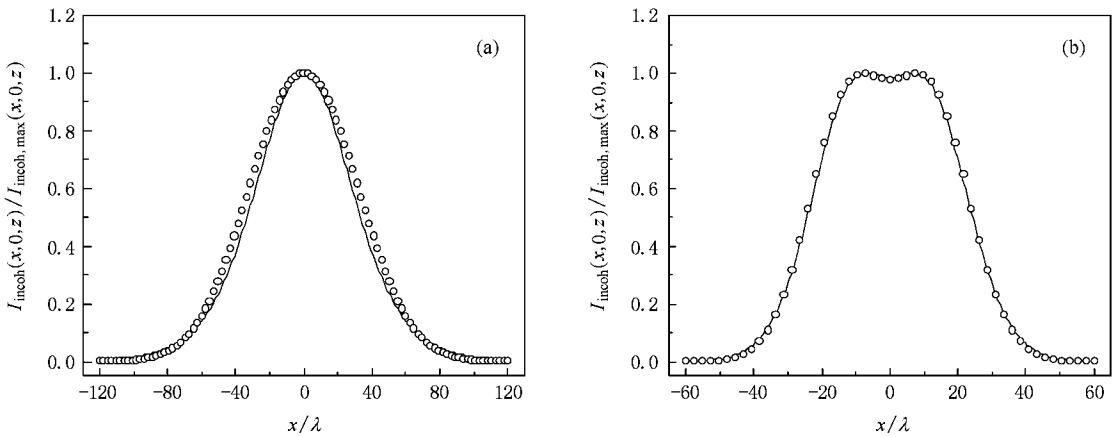


图4 部分相干 TEM_{10} 模 H-G 光束非相干合成光束 x 方向的归一化光强分布(计算参数 $z = 100\lambda$, $a = b = 2\lambda$, $P = Q = 4$, $f = 0.01$; ——为用(21)式的计算结果,“ $\circ\circ\circ$ ”为用对应傍轴公式的计算结果) (a) $f_s = 0.2$; (b) $f_s = 0.07$

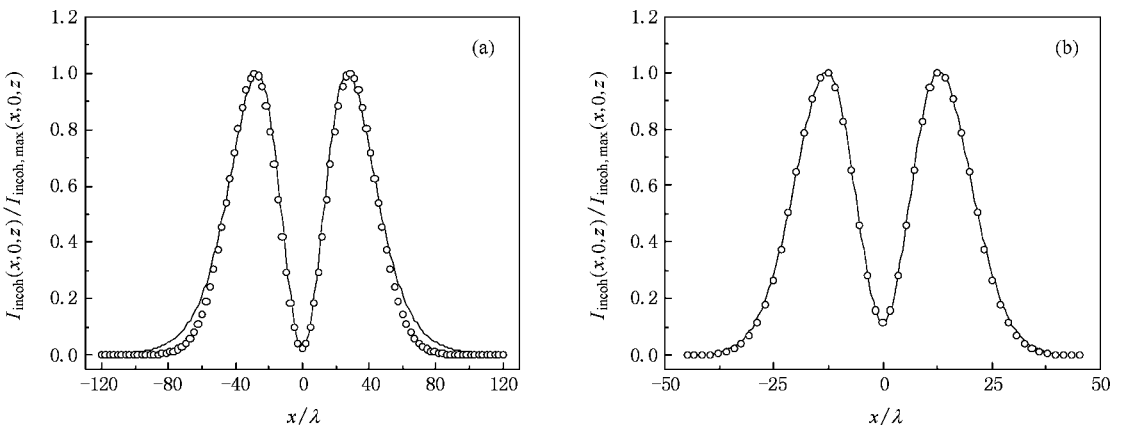


图5 部分相干 TEM_{10} 模 H-G 光束 x 方向的非相干合成光束归一化光强分布(计算参数 $z = 100\lambda$, $a = b = 2\lambda$, $P = Q = 4$, $f_s = 0.01$; ——为用(21)式的计算结果,“ $\circ\circ\circ$ ”为用对应傍轴公式的计算结果) (a) $f = 0.2$ (b) $f = 0.09$

0.2时,傍轴近似失效,当 f_s 参数较小如 $f_s \leq 0.07$ 时,傍轴近似成立.图4(a)与图2(a)比较说明合成方式也影响合成光强剖面的形状.

图5描述了2D阵列非傍轴部分相干 TEM_{10} 模 H-G 光束非相干合成光束 x 方向的归一化光强 $I_{incoh}(x, 0, z)/I_{incoh,max}(x, 0, z)$ 分布.由图5可知,当 f 参数较大如 $f = 0.2$ 时,傍轴近似失效,当 f 参数较小如 $f \leq 0.09$ 时,傍轴近似成立.

图6给出了 4×4 阵列和 4×1 阵列非傍轴部分相干 TEM_{11} 模 H-G 光束相干合成光束在 x 方向归一化光强 $I_{coh}(x, 0, z)/I_{coh,max}(x, 0, z)$ 和 y 方向归一化光强 $I_{coh}(0, y, z)/I_{coh,max}(0, y, z)$ 分布.从图6(a), (b)可以看出 4×4 阵列合成光束在 x 方向和 y 方向光强分布相同; 4×1 线阵合成光束 x 和 y 方向光强分布不同,在 y 方向光强呈类高斯分布.

图7给出了二维阵列和一维线阵非傍轴部分相

干 TEM_{10} 模 H-G 光束相干合成光束在远场 x 方向归一化光强 $I_{coh}(x, 0, z)/I_{f1,max}$ 分布,其中 $I_{f1,max}$ 为一束部分相干 TEM_{10} 模 H-G 光束光强最大值.由图7可知,当阵列分别为 2×2 , 4×2 和 4×4 时,其归一化光强 $I_{coh}(x, 0, z)/I_{f1,max}$ 分别为 16, 64 和 256.当阵列分别为 2×1 , 4×1 和 6×1 时,其归一化光强 $I_{coh}(x, 0, z)/I_{f1,max}$ 分别为 4, 16 和 36,对于二维阵列的相干合成光束远场光强最大值为 一束远场光强最大值的 $P^2 Q^2$ 倍.对于一维线阵远场光强最大值为 一束远场光强最大值的 P^2 倍.计算所得结果可用(14)式进行物理诠释.对非傍轴部分相干 TEM_{10} 模 H-G 光束的合成(14)式简化为

$$I_{coh,f}(x, y, z) = \frac{z^2}{4k^2(f^2 + 2f_s^2)^2 r^4} \left[\frac{4f_s^2}{f^2} + \frac{2x^2}{(f^2 + 2f_s^2)r^2} \right]$$

$$\begin{aligned} & \times \exp\left[-\frac{x^2 + y^2}{2(f^2 + 2f_\sigma^2)r^2}\right] \\ & \times \sum_{p_1 = -\frac{P-1}{2}}^{\frac{P-1}{2}} \sum_{p_2 = -\frac{P-1}{2}}^{\frac{P-1}{2}} \sum_{q_1 = -\frac{Q-1}{2}}^{\frac{Q-1}{2}} \\ & \times \sum_{q_2 = -\frac{Q-1}{2}}^{\frac{Q-1}{2}} \exp\left[\frac{ikax}{r}(p_1 - p_2)\right] \\ & \times \exp\left[\frac{ikby}{r}(q_1 - q_2)\right]. \end{aligned} \quad (25)$$

当 $x = y = 0$ 时 (25) 式取最大值

$$I_{\text{coh},f,\text{max}}(0, 0, z) = P^2 Q^2 I_{f1,\text{max}}, \quad (26)$$

式中

$$I_{f1,\text{max}} = \frac{f_\sigma^2}{k^2 f^2 (f^2 + 2f_\sigma^2) z^2}. \quad (27)$$

而对于一维线阵, $Q = 1$, (26) 式为

$$I_{\text{coh},f,\text{max}}(0, 0, z) = P^2 I_{f1,\text{max}}. \quad (28)$$

图 8 给出了二维阵列和一维线阵部分相干 TEM₁₁ 模 H-G 光束非相干合成光束在远场 x 方向归

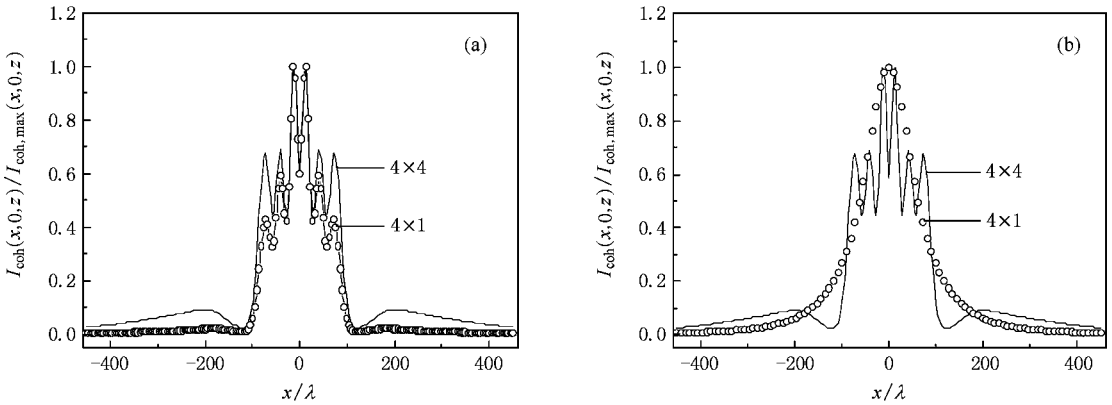


图 6 非傍轴部分相干 TEM₁₁ 模 H-G 光束相干合成光束 (a) x 方向, (b) y 方向归一化光强分布 (计算参数 $z = 100\lambda$, $f_\sigma = 0.4$, $f = 0.01$, $a = b = 2\lambda$)

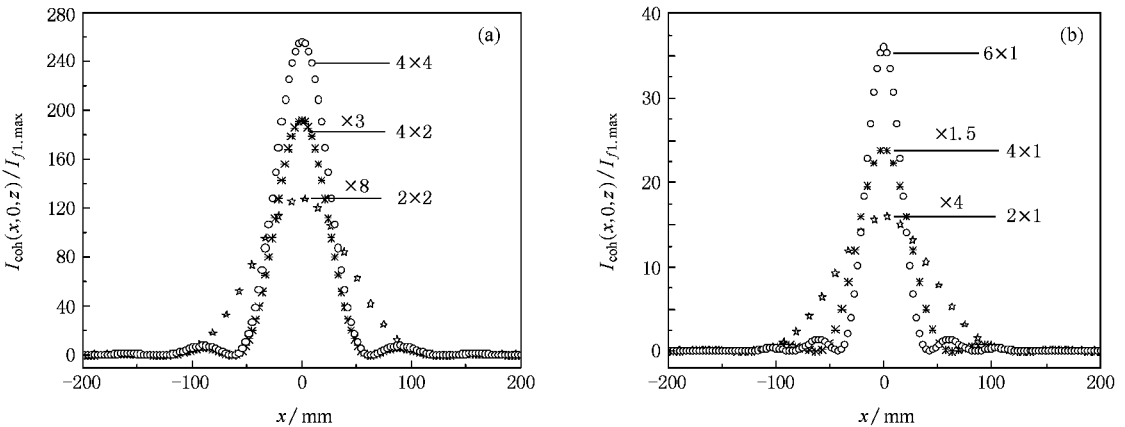


图 7 非傍轴部分相干 TEM₁₀ 模 H-G 光束相干合成光束 (a) 二维阵列 x 方向, (b) 一维线阵 x 方向归一化光强分布 (计算参数 $z = 500 \text{ mm}$, $f_\sigma = 0.1$, $f = 0.01$, $a = b = 2\lambda$)

一化光强 $I_{\text{incoh}}(x, 0, z)/I_{f1,\text{max}}$ 分布, 其中 $I_{f1,\text{max}}$ 为一束部分相干 TEM₁₁ 模 H-G 光束光强最大值. 由图 8 可知, 当阵列分别为 2×2 、 4×2 和 4×4 时, 其归一化光强 $I_{\text{incoh}}(x, 0, z)/I_{f1,\text{max}}$ 分别为 4、8 和 16. 当阵列分别为 2×1 、 4×1 和 6×1 时, 其归一化光强 $I_{\text{incoh}}(x,$

$0, z)/I_{f1,\text{max}}$ 分别为 2、4 和 6. 因此, 对于二维阵列的非相干合成光束远场光强最大值为一束光强最大值的 PQ 倍. 对于一维线阵远场光强最大值为一束光强最大值的 P 倍. 这与 (24) 式的理论预期一致, 因为对光强最大值 (24) 式仍成立.

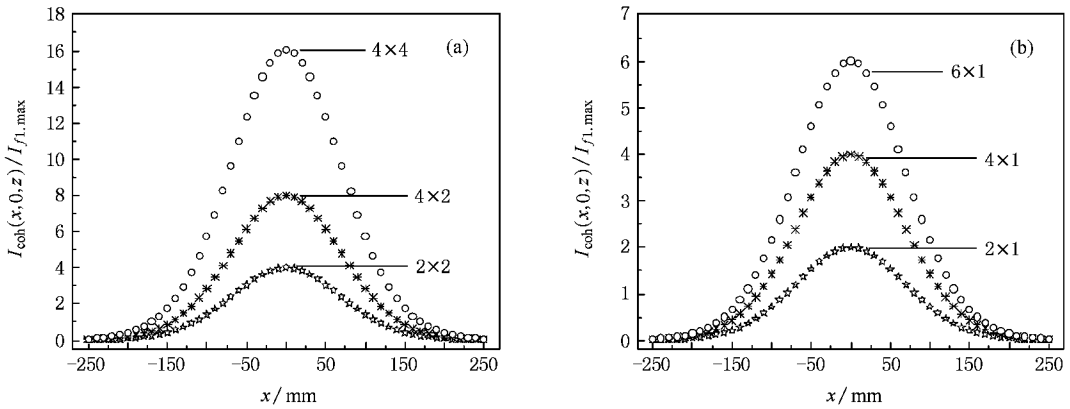


图 8 非傍轴部分相干 TEM_{11} 模 H-G 光束非相干合成光束 (a) 二维阵列 x 方向 (b) 一维线阵 x 方向归一化光强分布 (计算参数 $z = 500 \text{ mm}$, $f_\sigma = 0.1$, $f = 0.01$, $a = b = 2\lambda$)

5. 结 论

本文从广义瑞利-索末菲衍射积分公式出发, 推导出非傍轴部分相干 H-G 光束相干合成和非相干合成光束在自由空间中的解析传输公式. 研究表明, 合成光束的光强分布与 f 参数, f_σ 参数, 离轴参数 a 和 b , 光束束数 P 和 Q , 阶数 m 和 n , 以及传输距离 z 等有关, 并且依赖于不同的合成方式. 当 f 参数和 f_σ 参数很小时, 傍轴近似成立, 约化为傍轴光束的合成. 而在相干极限 $\sigma_0 \rightarrow \infty$, 则简化为完全相干光的合成. 文中以非傍轴部分相干 H-G 光束合成为例, 对部分相干光的两类合成——相干和非相

干合成进行了深入研究. 部分相干光相干合成为交叉谱密度函数的叠加, 在相干极限下成为光场的叠加. 在远场, 对二维阵列 $I_{\text{coh},f,\text{max}} = P^2 Q^2 I_{f1,\text{max}}$ 成立, 对一维线阵有 $I_{\text{coh},f,\text{max}} = P^2 I_{f1,\text{max}}$, 与完全相干光的相干合成结果一致. 部分相干光非相干合成为光强的叠加, 在远场, 对二维阵列满足 $I_{\text{coh},f,\text{max}} = PQI_{f1,\text{max}}$, 对一维线阵有 $I_{\text{coh},f,\text{max}} = PI_{f1,\text{max}}$, 与完全相干光的非相干合成一致. 因此, 按上述物理含义, 部分相干光按 (2) 和 (17) 式的合成可分别称为相干合成和非相干合成. 本文研究结果对二极管激光和光纤激光的光束合成有应用意义. 当然, 实际工作中, 还可能存在着两种合成方式的中间情况, 即光束的部分相干合成, 对此问题尚值得做进一步的研究.

- [1] Lü B D, Ma H 1999 *Optik*. **110** 575
 [2] Lü B D, Ma H 2000 *Appl. Opt.* **39** 1279
 [3] James D S, Herb J J S, Clarence E C 1998 *Appl. Opt.* **37** 1045
 [4] Lü B D, Ma H 2000 *Opt. Commun.* **178** 395
 [5] Li Y Z, Qian L J, Lu D Q et al 2007 *Opt. & Laser Tech.* **39** 957
 [6] Gao Z H, Lü B D 2007 *Chin. Phys. Lett.* **24** 2575
 [7] Li B Z, Lü B D 2003 *J. Opt. A: Pure Appl. Opt.* **5** 303
 [8] Xiao R, Zhou P, Hou J, Jiang Z F, Liu M 2007 *Acta Phys. Sin.*

56 819 (in Chinese) 肖瑞、周朴、侯静、姜宗福、刘明 2007 物理学报 **56** 819]

- [9] Qiu Y L, Guo H, Chen Z X 2005 *Opt. Commun.* **245** 21
 [10] Gao Z H, Lü B D 2007 *Optik*. **118** 307
 [11] Ji X L, Zhang B, Lü B D 2008 *J. Opt. Soc. Am. B* **25** 825
 [12] Mandel L, Wolf E 1995 *Optics Coherence and Quantum Optics* (Cambridge, England: Cambridge U. Press) p185

Coherent and incoherent additions of nonparaxial partially coherent Hermite-Gaussian beams^{*}

Li Chang-Jin^{1 2)} Lü Bai-Da^{2)†}

¹ *School of Physics & Electronic Information Engineering, Neijiang Normal University, Neijiang 641112, China*

² *Institute of Laser Physics & Chemistry, Sichuan University, Chengdu 610064, China*

(Received 4 January 2009; revised manuscript received 19 February 2009)

Abstract

Analytical expressions for the cross-spectral density and intensity of two-dimensional nonparaxial partially coherent Hermite-Gaussian (H-G) beams in coherent and incoherent additions are derived, and some special cases are analyzed. The intensity of the resulting beam depends not only on the f -parameter, f_σ -parameter, off-axis distances, beam numbers and orders of combined beams and propagation distance, but also on the addition scheme. The meaning of the terminology of coherent and incoherent addition of partially coherent beams is interpreted physically and the validity is confirmed by numerical examples.

Keywords : coherent and incoherent addition of partially coherent beams, nonparaxial partially coherent Hermite-Gaussian (H-G) beam, propagation equation in free space

PACC : 4225, 4225K

^{*} Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 10874125).

[†] Corresponding author. E-mail: lbaidalu0@tom.com