

二维可压缩流体 Kelvin-Helmholtz 不稳定性^{*}

王立锋¹⁾²⁾ 叶文华²⁾³⁾⁴⁾ 范征锋²⁾ 孙彦乾¹⁾ 郑炳松¹⁾ 李英骏^{1)†}

1) 中国矿业大学(北京), 北京 100083)

2) 北京应用物理与计算数学研究所计算物理实验室, 北京 100088)

3) 浙江大学物理系 杭州 310028)

4) 北京大学应用物理与技术研究中心 北京 100871)

(2008 年 11 月 26 日收到, 2008 年 12 月 11 日收到修改稿)

利用高精度数值格式, 研究了二维可压缩流体中的 Kelvin-Helmholtz 不稳定性, 主要研究了可压缩性对 Kelvin-Helmholtz 稳定性增长率的影响. 模拟定量的给出低 Mach 和高 Mach 数两种情况下, 初始静压和对流 Mach 数以及 Kelvin-Helmholtz 不稳定性线性增长率的关系. 模拟结果和自由剪切层以及混合层的实验结果以及理论分析一致. 模拟表明, 对流 Mach 数是描述流体可压缩性的合适参数, 对流 Mach 数越小流体越不可压, Kelvin-Helmholtz 不稳定性的线性增长率随对流 Mach 数的增加而减小.

关键词: Kelvin-Helmholtz 不稳定性, 可压缩流体, Mach 数, 超音速流体

PACC: 5235, 4720, 4735

1. 引言

发生在两种相互运动流体边界层的 Kelvin-Helmholtz (KH) 不稳定性广泛存在于自然界中, 如太阳风和地球磁场相互作用^[1], 超新星爆炸^[2]以及天体中的射流^[3,4]等. 天体射流中, 射流本身的 Mach 数很大(一般大于 10)^[5,6]. 这种高能量密度射流已经在实验室利用高功率激光实现^[7,8]. 这种射流能传播 10 倍射流半径甚至更长的距离仍然保持很好的准直性, 是个没有解决的根本性问题^[9].

大量实验、数值模拟和理论分析表明, 超声速剪切层比与之对应的亚声速要稳定^[10-15], 这对超声速混合层控制带来极大的挑战. 不可压缩混合层对小扰动的失稳属于 KH 不稳定性. 不可压缩 KH 不稳定性的线性和弱非线性已有不少研究^[16-19], 流体界面上的一个小扰动会经线性和弱非线性的增长, 并由强非线性作用发展成为湍流混合.

传统的 Mach 数已经不能够确切的描述可压缩性对混合层稳定性的影响, 需要引入另外的参数.

Papamoschou 和 Roshko 进行可压缩湍流混合的稳定性实验^[20,21], 证明对流 Mach 数是确定可压缩性影响的合适参数, 其定义为

$$Mc_1 = \frac{U_1 - U_c}{a_1}, \quad (1)$$

$$Mc_2 = \frac{U_c - U_2}{a_2}, \quad (2)$$

$$Mc = \frac{U_1 - U_2}{a_1 + a_2}, \quad (3)$$

其中, a_1 和 a_2 是混合层两边无穷远处的声速, U_1 和 U_2 是两流体的平均流速度, $U_c = \frac{a_1 U_1 + a_2 U_2}{a_1 + a_2}$ 代表大尺度结构的运动速度. 这里已经假定两流体具有相同的绝热指数.

本文使用数值模拟的方法研究 Mach 数对 KH 不稳定性增长率的影响. 在第二部分给出我们研究的物理模型, 本文研究无黏可压缩流体中的 KH 不稳定性. 在第三部分中给出数值模拟所用的数值方法. 数值模拟使用高精度五阶 WENO 有限差分格式求解守恒形式的欧拉方程. 在第四部分中给出数值模拟的结果及讨论. 模拟表明对流 Mach 数是描述流

^{*} 国家重点基础研究发展计划(973)项目(批准号: 2007CB815100), 国家自然科学基金(批准号: 10775020 和 10874242)和高等学校博士学科点专项科研基金(批准号: 20070290008)资助的课题.

† 通讯联系人. E-mail: lyj@aphy.iphy.ac.cn

体可压缩性的合适参数, KH 不稳定性的线性增长率随对流 Mach 数的增加而减小, 模拟结果和自由剪切层以及混合层的实验结果一致. 最后一部分是结论.

2. 物理模型

本文研究无黏可压缩流体中的 KH 不稳定性. 无黏可压缩流体 KH 不稳定性的控制方程是欧拉方程. 二维守恒形式的欧拉方程为

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial E}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} = 0, \quad (4)$$

守恒量 U 和通量 E, F 分别为

$$U = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho e \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ (\rho e + p)u \end{pmatrix}, F = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho vw \\ \rho v^2 + p \\ (\rho e + p)v \end{pmatrix}, \quad (5)$$

其中 ρ 为流体的密度, u 为流体沿 x 方向速度, v 为流体沿 y 方向速度, p 为流体的压力, $e = C_V T + 1/2 (u^2 + v^2)$ 表示单位质量的能量, ρe 表示能量强度, T 为流体的温度. 状态方程采用理想气体状态方程 $p = \Gamma \rho T$, $C_V = \Gamma(\gamma_h - 1)$ 表示定容比热, γ_h 表示气体绝热指数.

由于我们将采用有限差分格式求解欧拉方程组, 因此两种流体的界面不能非常的间断. 在模拟中, 必须在两流体的界面插入平滑的速度剪切层. 如果不这样, 将会引起波长为网格量级随机扰动的增长. 这种短波长扰动会严重地降低计算精度, 因为它们的演化是数值不能分辨的. 更重要的是这种随机扰动对我们所关心的长波长的演化毫无益处. 本文采用双曲函数来对界面附近的密度和速度进行光滑过渡, 其形式为

$$u(x) = \frac{v_A^{(0)} + v_B^{(0)}}{2} - \frac{v_A^{(0)} - v_B^{(0)}}{2} \tanh\left(\frac{x}{D_u}\right), \quad (6)$$

$$\rho(x) = \frac{\rho_A^{(0)} + \rho_B^{(0)}}{2} - \frac{\rho_A^{(0)} - \rho_B^{(0)}}{2} \tanh\left(\frac{x}{D_\rho}\right). \quad (7)$$

如图 1 所示, 左侧流体无穷远处密度和 y 方向的速度为分别 $\rho_A^{(0)}$ 和 $v_A^{(0)}$, 右侧流体无穷远处密度和 y 方向的速度分别为 $\rho_B^{(0)}$ 和 $v_B^{(0)}$, 在无扰动流场中两种流体在 x 方向的速度分量为 $u_A^{(0)} = u_B^{(0)} = 0$. 初始时刻两种流体静压相等, 即 $p_A^{(0)} = p_B^{(0)} = p_0$.

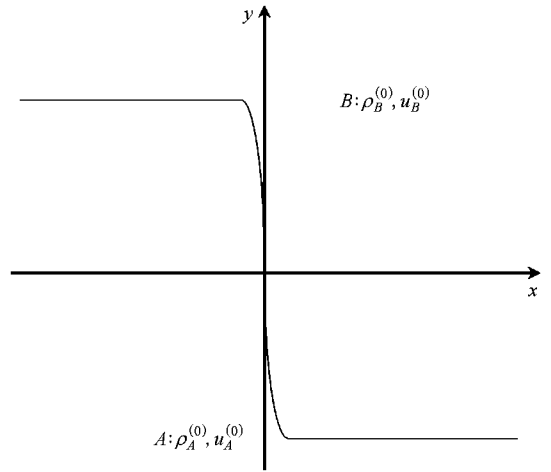


图 1 无扰动流场分布

3. 数值方法

流体方程组 (4) 采用 WENO (Weighted Essentially Non-Oscillatory) 有限差分格式进行求解^[22-24]. WENO 是对 ENO (Essentially Non-Oscillatory schemes) 格式的改进, 它将 ENO 中用逻辑判断选择光滑模板的方法改进为所有模板的加权平均, 从而提高了计算格式对流场的适应性. WENO 格式通过引入变化的加权因子, 使格式在光滑区解的截断误差阶数又有了进一步提高, 而在间断附近仍然保持了 ENO 格式良好的分辨能力, 并且格式的稳定性又有了进一步增强.

初始时刻在两流体界面附近引入如下形式的速度扰动:

$$u = u_0 \cos(ky) \exp(-k|x|), \quad (8)$$

这里 k 是扰动波数, u 是 x 方向扰动速度, u_0 是 x 方向初始扰动速度幅度. 不稳定波在 y 方向上具有周期性, 可采用周期边界条件; 而在 x 方向上边界条件要复杂一些, 因为 KH 不稳定性主要发生在界面密度梯度大的地方, 而在离界面较远的位置扰动可以忽略, 所以在边界上可以采用零扰动边界条件, 但是采用零扰动边界条件进行数值模拟时, 程序的计算稳定性较差, 本文采用嵌边出流边界条件^[25], 即在 x 方向的有效计算域两端分别增加一段嵌边区, 使得从边界传出的扰动在嵌边区内衰减至零, 从而保证在边界上没有反射.

本文的计算中为了提高精度, x 和 y 方向上都采用均匀网格. x 方向网格宽度为 $0.05 \mu\text{m}$, 分布

3600 个网格, y 方向在一个不稳定波长内给 64 个网格, 加密网格计算结果不变表明网格已经足够.

4. 模拟结果及讨论

本文模拟中, 在保持其他物理量不变的情况下, 通过改变静压 p_0 来改变两种流体的当地声速, 从而改变对流 Mach 数, 以达到研究可压缩性对 KH 不稳定性的影响的目的. 对不可压缩流体, 线性稳定性分析给出扰动的线性增长率^[16]为

$$\gamma_{\max} = k \left| u_A^{(0)} - u_B^{(0)} \right| \frac{\sqrt{\rho_A^{(0)} \rho_B^{(0)}}}{\rho_A^{(0)} + \rho_B^{(0)}}, \quad (9)$$

其中 k 是扰动波长, $|u_A^{(0)} - u_B^{(0)}|$ 是两流体的速度差, $\rho_A^{(0)}$ 和 $\rho_B^{(0)}$ 是两流体的密度. 数值模拟中, 我们研究了不同流体参数(流体的密度、速度和扰动波长)下 KH 不稳定性的线性增长率及非线性演化. 这里仅给出低 Mach 数和高 Mach 数这两组较有代表性的结果.

图 2 是低 Mach 数情况, 不同静压下的对流 Mach 数和线性增长率. 模拟条件为左侧流体的密度和速度为 $\rho_A^{(0)} = 0.25 \text{ g/cm}^3, v_A^{(0)} = 8 \text{ cm}/\mu\text{s}$; 右侧流体的密度和速度为 $\rho_B^{(0)} = 1.0 \text{ g/cm}^3, v_B^{(0)} = -9 \text{ cm}/\mu\text{s}$; 扰动波长为 $\lambda = 60 \text{ }\mu\text{m}$. 本文压强单位为兆巴 (Mbar) ($1 \text{ bar} = 10^5 \text{ Pa}$), 增长率单位为 ns^{-1} .

将图 2 的模拟条件代入不可压流体 KH 不稳定性的线性增长率(6)式得 $\gamma_{\max} = 7.1209$. 由图 1 可以看出, 可压缩流体中 KH 不稳定性的线性增长率远

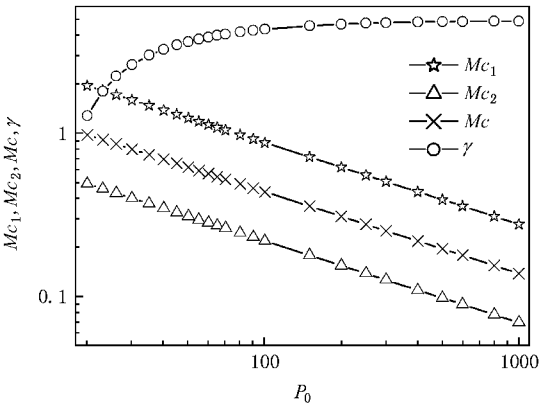


图 2 低 Mach 数情况, 不同静压下的对流 Mach 数和线性增长率

小于不可压的情况. 可压缩流体中 KH 不稳定性的线性增长率随静压的增加(Mach 数的减小)而增加, 在开始阶段(静压小于 100)迅速增加, 后来缓慢增加. 最终(静压为 1000 Mbar, $Mc_A = 0.2776, Mc_B = 0.0694, Mc = 0.1388$)趋于 4. γ 约为 $0.69\gamma_{\max}$).

图 3 给出 2.8 ns 时刻不同静压下的密度轮廓. 模拟条件同图 2. 由图 3 可以明显的看出, 可压缩性影响 KH 不稳定性的增长. 相同时刻, 静压越大两流体混合越剧烈. 如果说图 3(a)(b) KH 不稳定性处于线性或弱非线性阶段, 则图 3(c) 处于非线性阶段, 而(d)(e)和(f)已经处于强非线性阶段. 可压缩性强烈的影响 KH 不稳定性的发展, 影响两流体的混合.

进一步提高 Mach 数, 图 4 给出高 Mach 数情况不同静压下的线性增长率和对流 Mach 数. 模拟条件为左侧流体的密度和速度为 $\rho_A^{(0)} = 4.25 \text{ g/cm}^3, v_A^{(0)}$

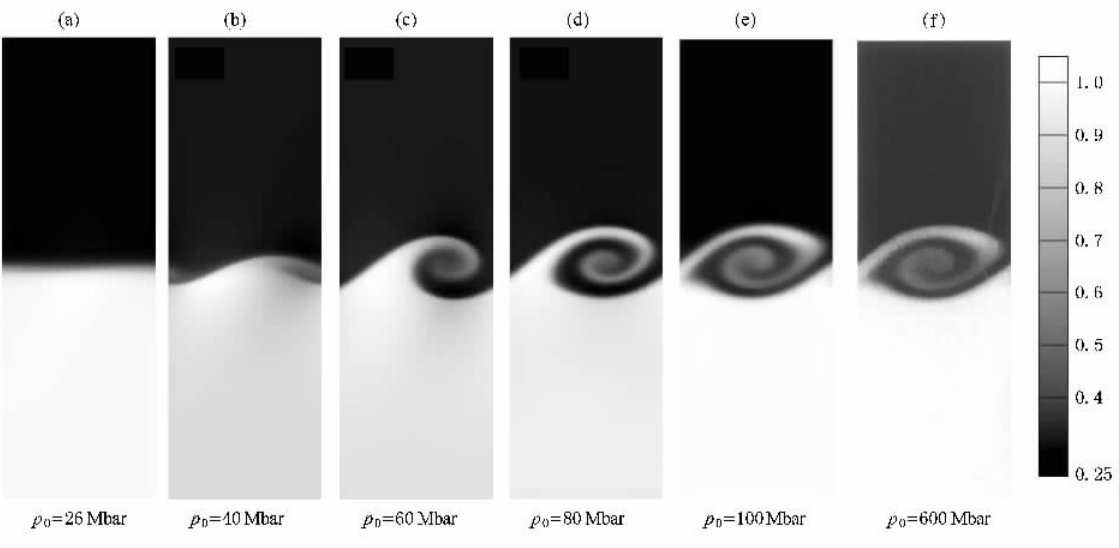


图 3 低 Mach 数情况, 相同时刻不同静压下的密度轮廓, $t = 2.8 \text{ ns}$

$= 10 \text{ cm}/\mu\text{s}$,右侧流体的密度和速度为 $\rho_B^{(0)} = 0.25 \text{ g}/\text{cm}^3$, $v_B^{(0)} = -10 \text{ cm}/\mu\text{s}$,扰动波长为 $\lambda = 40 \mu\text{m}$.

将图 4 的模拟条件代入不可压流体 KH 不稳定性的线性增长率 (6) 式得 $\gamma_{\text{max}} = 9.6413$.由图 4 可以看出 ,可压缩流体中 KH 不稳定性的线性增长率远小于不可压的情况 .可压缩流体中 KH 不稳定性的线性增长率随 Mach 数的减小而增加 ,在开始阶段 (静压小于 200) 迅速增加 ,后来缓慢增加最终 (静压 2000 , $Mc_A = 0.5317$, $Mc_B = 0.0625$, $Mc = 0.1823$) 趋于 7.3 (约为 $0.76\gamma_{\text{max}}$) .

图 5 为不同静压下 2.0 ns 时刻的密度轮廓 ,模拟条件同图 4 .由图 5 可以明显的看出 ,可压缩性强烈的影响 KH 不稳定性的发展 ,影响两流体的混合 .相同时刻 ,两流体的混合程度随静压的增加而提高 ,也就是说流体越容易压缩 ,KH 不稳定性越不容易

发展 ,则流体越不容易混合 .如果说图 5 (a) (b) 和 (c) KH 不稳定性处于线性或弱非线性阶段 ,则 (d) , (e) 和 (f) 已经处于强非线性阶段 .

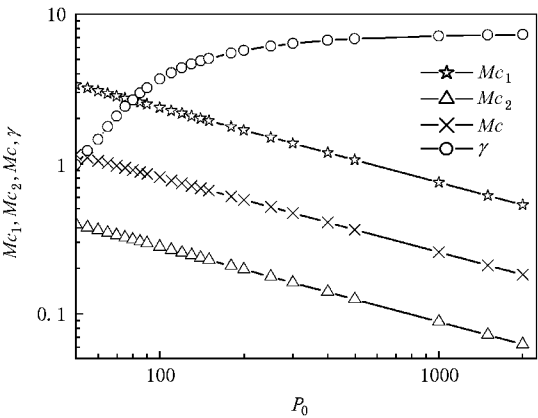


图 4 高 Mach 数情况 ,相同时刻不同静压下的密度轮廓

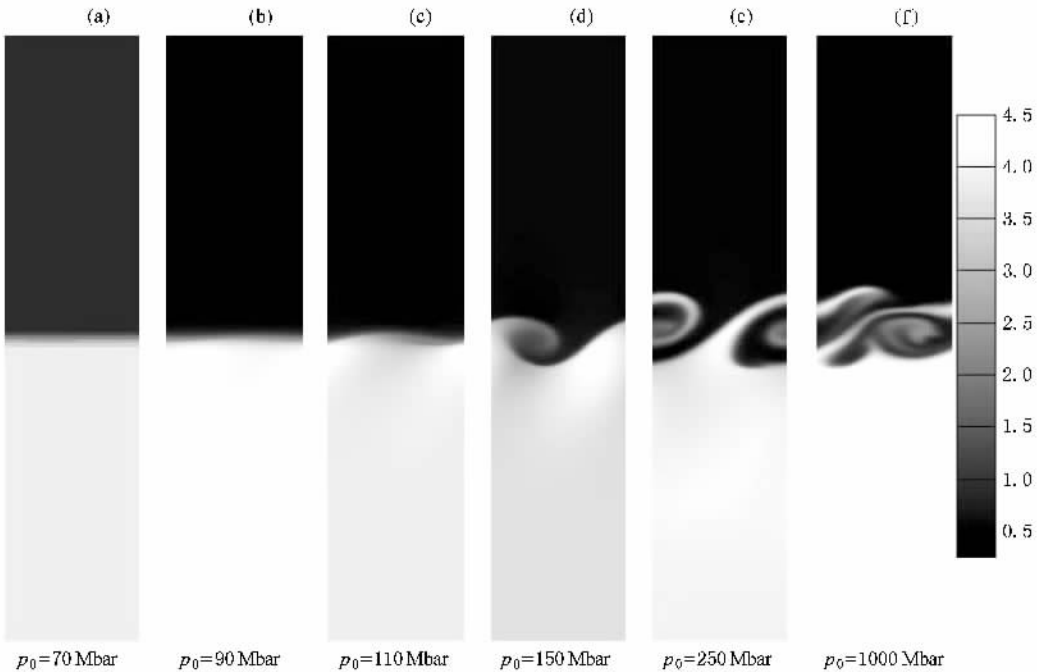


图 5 高 Mach 数情况 ,相同时刻不同静压下的密度轮廓 , $t = 2.0 \text{ ns}$

综合低 Mach 数和高 Mach 数两种情况 ,可以得到以下结论 :1) 在固定流场其他参数的情况下 ,通过改变静压可以改变对流 Mach 数 ,从而改变流体的可压缩性 .2) 随静压的增加 ,对流 Mach 数的减小 ,流体变的越来越不可压 .3) 随对流 Mach 数的增加 ,KH 不稳定性的线性增长率减小 .4) 相同时刻 ,对流 Mach 数越小两流体的混合越剧烈 .5) 对流 Mach 数是描述流体可压缩性的合适参数 .这些结论和以及公布的

剪切层和混合层的实验结果已经理论分析相一致^[10—15, 20, 21] .

5. 结 论

本文利用高精度五阶 WENO 有限差分数值格式 ,研究了二维可压缩流体中的 KH 不稳定性 .模拟结果和自由剪切层以及混合层的实验结果、理论分

析以及数值模拟一致. 模拟给出低 Mach 数和高 Mach 数两种情况下, 静压和对流 Mach 数以及 KH 不稳定性线性增长率关系. 对流 Mach 数是描述流体可压缩性的合适参数, 对流 Mach 数越小流体越不可压. 在除静压外其他初始条件都相同的情况下, 相同时刻对流 Mach 数越小流体混合越剧烈. KH 不稳定性的线性增长率随对流 Mach 数的增加而减小, 也就是可压缩流体较不可压缩的情况更稳定.

[1] Uberoi C 1984 *J. Geophys. Res.* **89** 5652

[2] Gamexo V N , Khokhlo A M , Oran E S , Almadena Y C , Robert O R 2003 *Science* **299** 77

[3] Foster J M , Wilde B H , Rosen P A , Perry T S , Fell M , Edwards M J , Lasinski B F , Turner R E , Gitting M L 2002 *Phys. Plasmas* **9** 2251

[4] Remington B A , Drake R P , Ryutov D D 2006 *Rev. Mod. Phys.* **78** 755

[5] Rieger F M , Duffy P 2004 *Astrophys. J.* **617** 155

[6] Blondin J M , Bruce A F , Ariei K 1990 *Astrophys. J.* **360** 370

[7] Nicola P , Tikhonchuk V T , Kasperczuk A , Pisarczyk T , Borodziuk , Rohlena K , Ullschmied J 2006 *Phys. Plasmas* **13** 062701

[8] Blue B E , Weber S V , Glendinning S G , Lanier N E , Woods D T , Bono M J , Dixit S N , Haynam C A , Holder J P , Kalantar D H , MacGowan B J , Nikitin A J , Rekow V V , Van Wouterghem B M , Moses E I , Stry P E , Wilde B H , Hsing W W , Robey H F 2005 *Phys. Rev. Lett.* **94** 095005

[9] Hardee P E 2004 *Astrophys. Space Sci.* **293** 117

[10] Lessen M , Fox J A , Zien H M 1966 *J. Fluid Mech.* **25** 737

[11] Tam C K W , Morris P J 1980 *J. Fluid Mech.* **98** 439

[12] Chen J H Cantwell B J , Mansour N N 1990 *Phys. Fluids A* **2** 984

[13] Sandham N D , Reynolds W C 1991 *J. Fluid Mech.* **224** 133

[14] Slessor M D , Zhuang M , Dimotakis P E 2000 *J. Fluid Mech.* **414** 35

[15] Jackson T L , Grosch C E 1989 *J. Fluid Mech.* **208** 609

[16] Chandrasekhar S 1961 *Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability* (Oxford : London) p481

[17] Wang L F , Ye W H , Li Y J 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 3038 (in Chinese)[王立锋、叶文华、李英骏 2008 物理学报 **57** 3038]

[18] Wang L F , Ye W H , Li Y J , Meng L M 2008 *Chin. Phys. B* **17** 3792

[19] Wang L F , Ye W H , Fan Z F , Li Y J 2009 *Chin. Phys. Lett.* **26** 014701

[20] Papamoschou D , Roshko A 1988 *J. Fluid Mech.* **197** 453

[21] Papamoschou D , Roshko A 1986 *AIAA Paper No.* 86-0126

[22] Jiang G S , Shu C W 1996 *J. Comput. Phys.* **126** 202

[23] Fan Z F , Luo J S , Ye W H 2007 *Chin. Phys. Lett.* **24** 2308

[24] Fan Z F , Luo J S 2008 *Chin. Phys. Lett.* **25** 624

[25] Su C H , Zhou H 2006 *Acta Aerodynamica Sinica* **24** 289 (in Chinese) 苏彩虹 ,周恒 2006 空气动力学报 **24** 289]

Kelvin-Helmholtz instability in compressible fluids^{*}

Wang Li-Feng¹⁾²⁾ Ye Wen-Hua²⁾³⁾⁴⁾ Fan Zheng-Feng²⁾ Sun Yan-Qian¹⁾ Zheng Bing-Song¹⁾ Li Ying-Jun^{1)†}

¹⁾ *China University of Mining and Technology(Beijing), Beijing 100083 ,China)*

²⁾ *Laboratory of Computational Physics , Institute of Applied Physics and Computational Mathematics , Beijing 100088 ,China)*

³⁾ *Department of Physics , Zhejiang University , Hangzhou 310028 ,China)*

⁴⁾ *Center for Applied Physics and Technology , Peking University , Beijing 100871 ,China)*

(Received 26 November 2008 ; revised manuscript received 11 December 2008)

Abstract

Kelvin-Helmholtz instability in two-dimensional compressible fluid is analyzed by the high precision numerical scheme. The linear growth rate of the Kelvin-Helmholtz instability is especially explored. The relations among the initial static pressure, conductive Mach number and linear growth rate of the Kelvin-Helmholtz instability are quantitatively achieved at the case of the low and high Mach numbers. The simulation results agree with the experiment results in free shear layers and mixing layers. Simulation results show that the conductive Mach number is the proper parameter in definition the compression effect. The smaller the conductive Mach number is, the less compressible the fluid is. The linear growth rate of the Kelvin-Helmholtz instability decreases with the increasing conductive Mach number.

Keywords : Kelvin-Helmholtz instability, compressible fluid, Mach number, supersonic fluid

PACC : 5235, 4720, 4735

^{*} Project supported by the National Basic Research Program of China(Grant No. 2007CB815100), the National Natural Science Foundation of China(Grant Nos. 10775020 and 10874242) and the Research Fund for the Doctoral Program of Higher Education of China(Grant No. 20070290008).

[†] Corresponding Author. E-mail: lyj@aphy.iphy.ac.cn