第 58 卷 第 11 期 2009 年 11 月
1000-3290/2009/58(11)/7507-07

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.58,No.11,November,2009
©2009 Chin. Phys. Soc.

互联网流量控制的朗之万模型及相变分析*

樊 华† 李 理 袁 坚 山秀明

(清华大学电子工程系,北京 100084)

(2009 年 2 月 23 日收到;2009 年 4 月 1 日收到修改稿)

为互联网中的流量控制协议构建恰当模型,从而阐明具体协议算法与网络宏观性能间的关系,一直是互联网研究者面临的重大挑战.本文通过逻辑演绎,建立了互联网传输控制协议下流量的朗之万方程.在此基础上,细致分析了主动队列管理算法的有效性,在理论上证明了此类算法存在从畅通态到拥塞态到瘫痪态的相变过程,并给出了相变临界点与系统参数的显式关系.本建模与分析方法虽以具体的主动队列管理算法为例,但其方法可以应用于一般的网络流量控制问题.

关键词:互联网,流量控制,朗之万方程,相变

PACC:0540,0570F

1. 引 言

互联网的出现与高速发展无疑是上个世纪最重要的技术成就之一.但与其技术上的日趋完善相比,人们对互联网运行机理的认识仍相对粗浅.如何构建适当的模型来说明具体技术参数对用户宏观感受的影响,从而对互联网设计、组建进行有效地指引和评估,就成为研究者面临的重大挑战.

互联网设计的核心问题之一是流量控制.其中,主动队列管理(active queue management,AQM)算法中的参数配置问题,是近 10 年来互联网研究领域一个备受关注的问题[1—4].

由于受到网络器件物理性能的限制,互联网需要对用户的流量,尤其是超出网络传输能力的流量需求进行必要控制,以达到公平、高效利用网络资源的目的.目前通用的传输控制协议(transmission control protocol, TCP)就实现了在有限带宽下公平地动态分配用户需求的目标.TCP 协议使用的是简单丢弃方法,即当网络路由器节点处待传输数据包充满存储队列时,简单丢弃此后到达的所有数据包,从而降低此路由器负载,并通过在发送端的丢包检测隐性通知发送端降低发送速率.但相伴而生的问题是,这种通/断突变在网络繁忙时常常引发网络流量的大范围震荡.此类震荡带给使用者的感觉就是网络宏观性能的急剧恶化.因此,人们一直希望找到一种相对柔和的算法,能够避免网络宏观性能的恶化.工程师们从直觉出发,提出了 AQM 算法,即路由器根据自身队列的长度,主动参与对用户需求的控制,从而避免通/断突变的出现.但在随后的测试和仿真验证中,人们发现 AQM 虽然可以在一定程度上改善网络性能,但其缺乏大范围的稳定性.当对应于某些网络参数,调整算法参数使得系统稳定后,如果网络参数发生变化,系统仍会发生大规模震荡,并导致宏观参数的急剧恶化.此即 AQM 算法中的参数配置问题[1—4].网络设计者们一直希望能够理解这种震荡产生的原因,并给出震荡发生的条件,进而找到有效避免震荡的方法.

另一方面,理论研究者一直在尝试将网络宏观性能的突变与相变问题相联系.现有工作已经发现网络中存在大量的相变现象[5—8].但针对某一组特定协议,如何确认相变,进而如何解析地给出相变点与协议参数的关系,仍处在摸索阶段.

本文旨在通过演绎方法推导出 AQM 算法的网络流量方程,再在方程分析的基础上,给出网络宏观性能相变的产生机理及相变点参数的解析形式.

* 国家自然科学基金(批准号:60674048,60603068,60772053,60672142),国家重点基础研究发展计划(973)项目(批准号:2007CB307100-2007CB307105)资助的课题.

† E-mail:fanhua00@gmail.com

在此方面已有的一个重要工作属于 Firoiu 和 Borden[1]. 他们首先将此问题阐述为反馈控制问题，并以路由器上队列的‘平均队长’为受控变量，以丢包概率为控制变量，列出了受控系统的方程，并对可能导致震荡的原因给出了一个定性解释. 他们的工作成为此后一系列工作的范例. 但略有不足的是 在他们的文章里，“平均队长’是个会导致偏差的选择. 在实际系统中，等待调节的量应该是此轨道下(此次实现中)的瞬时队长，如果将队长对系综作平均，将失去控制的实际意义. 因此在实现时，他们将此值取为对时间的平均. 但这样一来，模型就失去了精度，因为只有在系统处于稳态时，两种平均才具有相等的数值，但现在要研究的问题恰恰是系统是否存在稳态. 与此同时，他们给出的系统方程是通过排队论方法给出的一个半经验方程. 此方程与排队论的大多数结果一样，都是关于平均值的. 因此，他们及后继研究者皆无法给出 AQM 算法的实时精确解释，更无法得出此算法参数失配的定量条件[1—3].

在本文中，我们避开对队列的过度关注，转而关注具体流量. 我们首先给出每个发送端在 TCP 协议控制下的流量方程，这相当于系统的微观方程. 然后通过概率近似的方法，直接得到路由器入口处总流量的朗之万方程. 如此，就避免了平均队长的概念，而使节点队列成为一个实时变量. 再结合具体算法定义，得到受控系统的闭环朗之万方程. 对此方程稍加分析，立刻可以看出当前算法缺乏全局稳定性的原因，并且可以解析得到其稳定域的参数范围.

这样一种建模方法不仅适用于互联网主动队列管理，更对一般网络中节点流量的建模具有普遍价值. 由于是从每条链路的微观方程出发构建总流量方程，因此，这种方法相对于把总流量简化为简单马尔科夫过程的排队论方法具有描述精度和适用范围上的明显优势. 而且，将系统用随机微分方程/朗之万方程表述，使模型在具有微观模型精度的同时，还具有宏观模型的简洁性. 这将为实际系统分析带来广泛收益.

本文首先在第 2 节中详细讨论了模型建构的具体过程. 从单链路 TCP 窗口方程，到路由器总流量方程，再到受具体算法(RED 算法)控制的路由器队列方程. 然后在第 3 节中，通过对模型的分析，我们得出了 TCP-RED 协议缺乏大范围稳定性的物理解释，并进一步算出了系统发生相变时的参数条件. 最后在第 4 节中，对文中所用模型的结论和进一步扩展进行了讨论.

2. 模型建立

本文讨论如图 1 所示的一个单瓶颈通信结构.

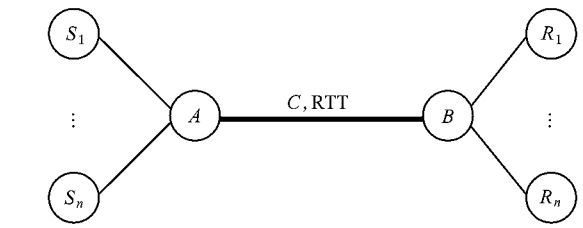


图 1 基本通信链路模型

在此系统中 S_1-S_n 是 n 台发送端主机. 它们通过路由器 A 向连接在路由器 B 上的 n 台接收端主机 R_1-R_n 不间断地发送大量数据(比如 FTP 业务). 假设每台主机到路由器的链路带宽足够高，延时足够小(这完全符合局域网中的情况). 因此整个系统的瓶颈就在于路由器 A，B 之间的主干链路. 设其带宽为 C，数据包一个往返的延时(round-trip time)为 RTT. 在本文中，我们忽略不同链接之间 RTT 的差异，且忽略由于排队等其他因素造成的 RTT 抖动. 事实上，加入这些考虑之后并不影响本文提出的建模方法，仅仅使处理更加繁琐而已.

2.1. 单链路 TCP 窗口方程

在 TCP 协议中，是靠调整每个链接的发送窗口大小，来调整发送速率的. 简单来说，TCP 协议要求每台主机在每个 RTT 时间中发送一个窗口的数据包. 如若此窗口的数据包都在规定时间内被顺利接收，则在下一个 RTT 时间，窗口所含的数据包数目加一. 否则，在下一个 RTT 时间，窗口大小减半. 这就是加性增加乘性减少(additive increase/multiplicative decrease，AIMD)策略.

对于路由器，只需简单将待传输数据包放入队列等待发送即可. 如果路由器队列已满，则将收到的数据包简单丢弃. 发送端主机发现数据包丢失，就会将发送窗口减半，从而完成发送速率调整.

基于以上策略，如果设第 i 台主机($i=1,2,\cdots,n$)的窗口大小为 $W_t^{(i)}$，则应满足如下 Ito 随机微分方程：

$$\mathrm{d}W_t^{(i)} = \frac{1}{\mathrm{RTT}}\mathrm{d}t - \frac{W_{t-}^{(i)}}{2}\mathrm{d}N_t^{(i)}, \tag{1}$$

其中，$N_t^{(i)}$ 是 n 个彼此独立，特征参数同为 λ_t/n 的泊松过程，它们生成自然 σ 域流 $\{F_t\}_{t=0}^{+\infty}$. 下标 $t-$ 意味着时间点 t 的左极限. 由于泊松过程有跳跃且定义为右连续过程，在跳跃时刻 t，$N_{t-}^{(i)} \neq N_t^{(i)}$，故而区分之. σ 域流 $\{F_t\}_{t=0}^{+\infty}$ 中 F_{t-} 同理表示域流在 t 时刻的左极限. 此方程意味着，从发送主机 S_i 来看，路由器的丢包行为近似于一个泊松随机过程. 且丢包对各台主机无差别，丢包本身也不在各主机之间产生关联. 方程(1)的合理性已由 Misra 等论证过[9]. 与他们立刻求均值的处理方法不同的是，本文将直接推导 TCP 汇聚流量方程.

2.2. TCP 汇聚流量方程

有了各链路的窗口方程(1)，路由器 A 在一个 RTT 时间内收到的总数据包数 W_t 应为

$$W_t = \sum_{i=1}^{n} W_t^{(i)}, \tag{2}$$

其中 n 为图 1 所示的汇聚链路数. 注意到微分是线性算子，有

$$\mathrm{d}W_t = \frac{n}{\mathrm{RTT}}\mathrm{d}t - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(W_{t-}^{(i)}\mathrm{d}N_t^{(i)}). \tag{3}$$

由 $N_t^{(i)}$ 的增量独立性，有

$$\begin{aligned}&\mathbf{E}\Big[\sum_{i=1}^{n}(W_{t-}^{(i)}\mathrm{d}N_t^{(i)}) \mid F_{t-}\Big]\\ &= \sum_{i=1}^{n}(W_{t-}^{(i)}\mathbf{E}[\mathrm{d}N_t^{(i)}F_{t-}])\\ &= \frac{\lambda_t}{n}W_{t-}\mathrm{d}t,\end{aligned} \tag{4}$$

$$\begin{aligned}&\mathrm{Var}\Big[\sum_{i=1}^{n}(W_{t-}^{(i)}\mathrm{d}N_t^{(i)}) \mid F_{t-}\Big]\\ &= \sum_{i=1}^{n}\mathrm{Var}[(W_{t-}^{(i)}\mathrm{d}N_t^{(i)}) \mid F_{t-}]\\ &= \frac{\lambda_t}{n}\sum_{i=1}^{n}(W_{t-}^{(i)})^2\mathrm{d}t.\end{aligned} \tag{5}$$

AIMD 控制策略旨在保证公平性的同时使效率最大，因此在 AIMD 控制策略下各链路的窗口大小一般相差不大，尤其当链路数 n 较大时，彼此非常接近. 故有如下近似：

$$\sum_{i=1}^{n}(W_{t-}^{(i)})^2 \approx a\frac{(W_{t-})^2}{n}, \tag{6}$$

其中 $a \geqslant 1$ 且接近 1.

由(4)，(5)，(6)三式，及泊松过程的独立增量性，(3)式中的第二项有如下二阶矩近似：

$$\begin{aligned}&-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(W_{t-}^{(i)}\mathrm{d}N_t^{(i)})\\ &\approx -\frac{\lambda_t}{2n}W_t\mathrm{d}t + \frac{\sqrt{\lambda_t a}}{2n}W_{t-}\mathrm{d}B_t,\end{aligned} \tag{7}$$

其中 B_t 为域流 $\{F_t\}_{t=0}^{+\infty}$ 下的标准布朗运动. 它的独立增量性与泊松过程的独立增量性正好对应. (7)式作为扩散过程，一阶、二阶矩分别与上述计算符合.

将(7)式代入(3)式得到朗之万方程：

$$\mathrm{d}W_t = \left(\frac{n}{\mathrm{RTT}} - \frac{\lambda_t}{2n}W_t\right)\mathrm{d}t + \frac{\sqrt{\lambda_t a}}{2n}W_t\mathrm{d}B_t. \tag{8}$$

此即 TCP 协议下路由器节点单位 RTT 时间内流入的总流量方程. 微分仍为 Ito 意义下.

2.3. RED 算法控制方程

AQM 中具有代表性的一类算法就是随机早期检测(random early detection，RED)算法[10]. 此算法通过监测路由器节点队列的长度，主动调整此节点丢包概率，从而间接控制发送端 TCP 流量. 具体来说，设路由器节点瞬时队列长度为 Q_t，RED 算法根据队列的最大存储极限 buff 预设了三个值 $q_{\min}$，$q_{\max}$，$p_{\max}$，规定每一时刻的瞬时丢包概率 p_t 为

$$p_t = \begin{cases}0, & Q_t < q_{\min},\\ \dfrac{Q_t - q_{\min}}{q_{\max} - q_{\min}}p_{\max}, & q_{\min} \leqslant Q_t \leqslant q_{\max},\\ 1, & Q_t > q_{\max}.\end{cases} \tag{9}$$

注意到，(9)式丢包概率是对此 RTT 时间内到达的全部 W_t 个数据包而言的，故实际丢包数为 $p_t W_t$. 因此，如果近似将丢包过程看成变参数泊松过程，过程参数 λ_t 应满足

$$\lambda_t \approx p_t \cdot \frac{W_t}{\mathrm{RTT}}. \tag{10}$$

将(9)，(10)式代入(8)式，就形成了通过队长 Q_t 对总到达流量 W_t(单位：包)的闭环控制. 根据路由器节点处的流入流出速率，我们还有流量方程

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}Q_t}{\mathrm{d}t} &= \left(\frac{W_t}{\mathrm{RTT}} - C\right)\cdot 1_{\{Q_t>0\}}\\ &\quad + \max\left\{\left(\frac{W_t}{\mathrm{RTT}} - C\right), 0\right\}\cdot 1_{\{Q_t=0\}},\end{aligned} \tag{11}$$

其中 C 为链路带宽，为方便，调整其单位为包/秒. 之所以分为两项，是因为队长不能为负. 当队列长度为零时，队列只能增长而不会再减小了.

联立微分方程(8)，(11)，并结合辅助方程(9)，

(10),我们便得到了 TCP-RED 协议下路由器节点处队长与到达流量的朗之万方程.本质上,这是一个二维非线性朗之万方程.如果将某一变量(如队长)看成受控变量,则此系统就成为闭环控制系统.它是 Firoiu 和 Borden 模型[1]的一个严格瞬时表达形式.

3. 系统性能分析

虽然(8)式含有随机项,但如果系统的非随机部分存在吸引的稳定状态,则在近似分析中,可以将随机项视为叠加在稳态上的一个扰动.在稳定点简单且扰动不大时,此叠加并不会影响系统的整体性态.因此,我们忽略随机项,考察确定性系统,

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}W_t}{\mathrm{d}t} &= \frac{n}{\mathrm{RTT}} - \frac{\lambda_t}{2n}W_t,\\ \frac{\mathrm{d}Q_t}{\mathrm{d}t} &= \left(\frac{W_t}{\mathrm{RTT}} - C\right)\cdot 1_{\{Q_t>0\}}\\ &\quad + \max\left\{\left(\frac{W_t}{\mathrm{RTT}} - C\right),0\right\}\cdot 1_{\{Q_t=0\}},\end{aligned} \tag{12}$$

其辅助方程仍为(9),(10)式.

解此系统的零点集(平衡态)方程,可得

$$\begin{aligned}\{\mathrm{d}W_t/\mathrm{d}t = 0\} &= \{(w,q) \mid q_{\min} \leqslant q \leqslant q_{\max},\\ &\quad q = q_{\min} + 2n^2(q_{\max} - q_{\min})/p_{\max}w^2\}\\ &\quad \cup \{(w,q) \mid q > q_{\max},\ w = \sqrt{2}n\},\end{aligned} \tag{13}$$

$$\begin{aligned}\{\mathrm{d}Q_t/\mathrm{d}t = 0\} &= \{(w,q) \mid q > 0, w = C\cdot\mathrm{RTT}\}\\ &\quad \cup \{(w,q) \mid q = 0,\ 0 \leqslant w \leqslant C\cdot\mathrm{RTT}\},\end{aligned} \tag{14}$$

其中等式右端表示由符合相应条件的点(w,q)构成的点集,它们分别对应(12)式中两方程的平衡解.

由此,可以根据系统两个零点集的相对位置,将系统分为三类.下面是其详细讨论:

1) $n < C\cdot\mathrm{RTT}/\sqrt{2/p_{\max}}$时

此时方程组有唯一平衡点(W^*,Q^*):

$$\begin{aligned}W^* &= C\cdot RTT,\\ Q^* &= q_{\min} + (q_{\max}\\ &\quad - q_{\min})\frac{2}{p_{\max}}\left(\frac{n}{C\cdot\mathrm{RTT}}\right)^2.\end{aligned} \tag{15}$$

在此平衡点附近方程的线性化系数矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} -\dfrac{2n}{C\cdot\mathrm{RTT}^2} & -\dfrac{p_{\max}C^2\mathrm{RTT}}{2n(q_{\max}-q_{\min})}\\ \dfrac{1}{\mathrm{RTT}} & 0\end{pmatrix}. \tag{16}$$

由于

$$-\mathrm{tr}A = \frac{2n}{C\cdot\mathrm{RTT}^2} > 0,$$

所以此平衡点为局部吸引的稳定平衡点[11].

考察相图上被零点集划分的不同区域中轨线的流向,可知此稳定点也是全局吸引的.其典型相图如图 2.根据网络中的实际情况及通常做法,各参数取为:数据包长 500byte = 4000bit, RTT = 100ms, C = 6Mbps = 1500 包/秒, p_{max} = 0.1, q_{min} = 50 包, q_{max} = 150 包, buff = 300 包, n = 20.图中虚线即为(13),(14)所示的零点集,实线为从不同初始点出发的轨迹线.

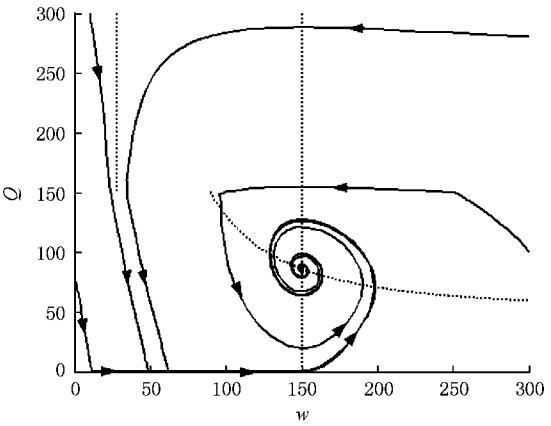


图 2 n = 20 相图

对应于实际网络,这意味着在 TCP 链接数较小、用户较少时,路由器上队列长度会迅速靠近 $q_{\min}$ 与 $q_{\max}$之间的某一点,并在此点附近震荡(因为还有随机项的影响).此时队列以一个很小的概率丢包,从而维持队列和总流量的稳定.即使出现瞬间扰动使系统远离平衡点,系统也会以指数速度恢复平衡.这恰恰是工程师希望看到的"畅通态"——网络在 RED 算法控制下,自动保持低丢包率、满负荷(因为队列不空,所以路由器出口保持满负荷运转)状态,网络畅通且利用率高.

2) $C\cdot\mathrm{RTT}/\sqrt{2/p_{\max}} \leqslant n \leqslant C\cdot\mathrm{RTT}/\sqrt{2}$时

此时方程组(12)不再有平衡点.由(13)式知 $\{\mathrm{d}W_t/\mathrm{d}t = 0\}$由两段分离的曲线组成.若将这两段曲线通过 $\{(w,q) \mid \sqrt{2}n < w < \sqrt{2/p_{\max}}n, q = q_{\max}\}$连接,结合(14)式,会发现系统本该以$(C\cdot\mathrm{RTT}, q_{\max})$为平衡点.但事实上由于丢包概率 p_t 取值的间断性,(13)式的两段曲线是分离的,因此$(C\cdot\mathrm{RTT}, q_{\max})$并非真正的平衡点,进而也就不具备局部吸引性.但另一方面,当系统处于远离此点位置时,近似认为待填补线段存在,进而将此点看作一正常平衡点并不带

来太大偏差.进一步结合相图流向分析可知,此点附近区域对大范围来说具有吸引性,就像此点是一个真实吸引平衡点一样.因此,最终结果各轨迹应快速收敛到此点附近区域,然后在此区域内围绕此赝平衡点做不规则环绕运动.其典型相图如图 3.图中参数沿用上例,只增大 n,使得 $n=90$.

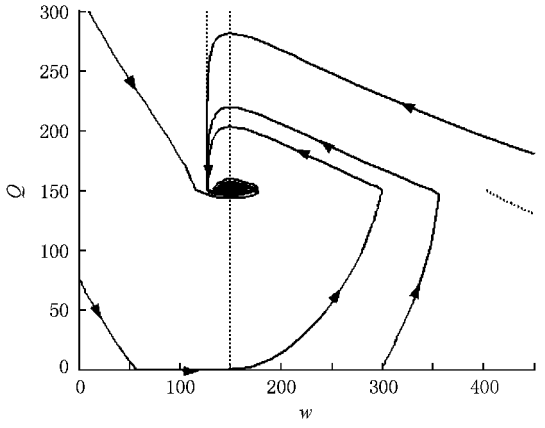


图 3　$n=90$ 相图

对实际网络,这意味着当接入数逐渐增大,用户越来越多时,路由器队长将在 $q_{\max}$ 附近震荡.这种震荡的原因不仅是由于系统的随机性,更是因为系统的非线性(不连续性)导致.注意到当队长超过 $q_{\max}$ 时,路由器将以概率 1 丢弃所有此后新到的数据包,直到队列长度小于 $q_{\max}$.因此这种震荡会导致一个比较大的丢包率.这就是工程师观察到的“拥塞态”——网络虽然还在运行,且参数还算稳定,但丢包率已经大幅上升,网络的有效传输性能严重恶化.对 RED 算法来说,研究者称此状态为参数失配.这时必须重新调整各参数.

3) $C\cdot \mathrm{RTT}/\sqrt{2} < n$ 时

此种情况在真实网络中极少出现.因为当 n 增加到出现拥塞状态时,系统已经不能正常使用,需要用其他方法进行调整.此处对此情况仅做一理论探讨.

此参数下,两条零点集曲线完全不交.因此系统不存在平衡点.进一步分析可知,系统各轨迹将沿直线 $\{w=\sqrt{2}n\}$ 趋向于 $(\sqrt{2}n,+\infty)$,典型相图如图 4.图中参数仍沿袭上例,只增大 n 至 200.

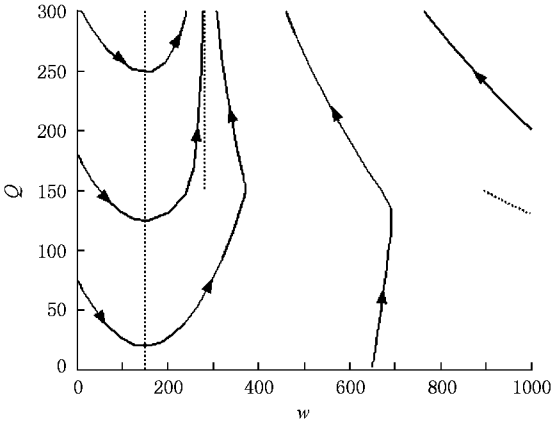


图 4　$n=200$ 相图

若对应实际网络,此情况意味着无论初始条件如何,队列都将迅速增长直至超过存储极限.路由器将以概率 1 丢弃所有到达的数据包.此时网络已经处于“瘫痪态”,根本无法使用.

为进一步说明以上模型分析与实际情况的契合性,我们在 NS2 仿真平台上搭建了仿真网络.网络拓扑及各参数取值皆如前述.实际测量在不同接入数 n 下,路由器队长随时间变化曲线,如图 5.

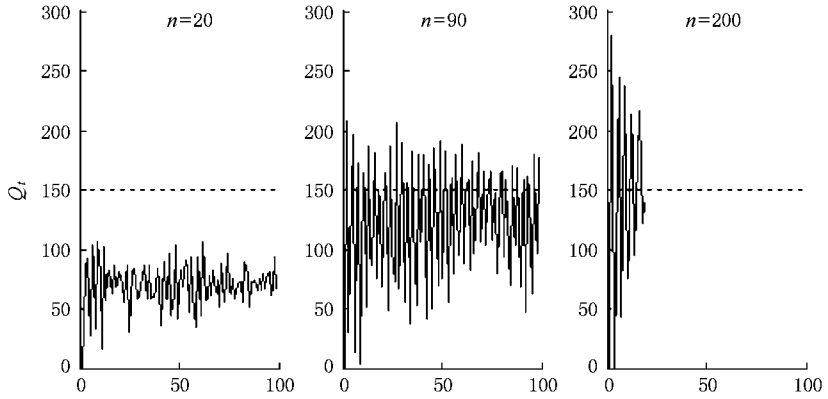


图 5　不同 n 下队长变化曲线

图 5 中横轴是仿真时间,范围 0 到 100 s.虚线为 $q_{\max}$ 位置,也即队列开始以概率 1 丢包的门限.仿真数据完全印证了模型分析的结论:当 $n = 20$ 时,队列在一较短队长处小幅震荡,路由器以很小概率丢包,系统处于畅通态;当 $n = 90$ 时,队列在 $q_{\max}$ 附近震荡,因此路由器经常会以概率 1 丢包,从而导致传输效率严重下降,形成拥塞态;当 $n = 200$ 时,队列出现远超过 $q_{\max}$ 的大幅震荡,此时网络已经无法使用,处于瘫痪态.图中给出的是震荡出现时的情形.此后由于其他保护机理的作用,路由器将维持在瘫痪状态.

4. 结 论

本文通过演绎推导,建立了互联网上 TCP 流量的朗之万方程,从而首次给出了网络流量的一种‘中观’定量刻画,并借此阐明了流量特征与各参数间的定量关系.以此为基础,本文进一步描述了 RED 算法的控制机理,从而建立了基于理论推导的流量控制系统方程.此后,基于对控制系统的平衡点分析,我们得到了 RED 算法适用范围的理论解释,并给出了系统状态相变的全过程描述,从而解决了工程技术人员多年来困惑的难题.具体结论如下.

首先,RED 算法的稳定性对接入数 n 有严格要求.因此不存在在各种条件下都可以保持稳定的参数配置.以此看来,即便在 TCP 流量下,若想保持网络畅通,必要的接入控制也是不可或缺的.

其次,RED 算法下网络拥塞的原因在于算法控制方程(9)的非线性,也即零点集(13)所含两条曲线间的‘缺口’.因此,增强算法稳定域范围的方法之一就是设法减小或者填补这一缺口.而这正是 Adaptive RED[12] 与 Gentle RED[13] 算法所做的事情.前者通过动态调整 $p_{\max}$ 而减小了缺口宽度,增大了平衡点存在的范围;后者通过在 $q_{\max}$ 与 buff 之间建立线性控制函数从而消除了这一缺口.但另一方面,由于在直线 $\{v = \sqrt{2}n\}$ 左侧系统总要进入无平衡点的瘫痪状态.因此,两种改进算法并不能消除系统的非稳定状态.这样,通过本文建立的模型及分析方法,我们证明了 RED 算法族一定存在从畅通态到瘫痪态的相变过程.此相变不可避免.

再次,通过文中推导,我们不仅论证了 RED 算法族相变的存在性,而且给出了其明确的相变边界.虽然在实际网络中,由于其他机理的影响,此边界会有一定偏移.但至少我们首次给出对此边界的近似估计,而且通过仿真验证可以看出此估计具有一定精度.这一结果可以作为工程设计的指导.

最后需要指出的是,本文虽然讨论的是具体的 RED 算法族的控制性能,但本文所使用的建模方法和分析手段具有广泛的适用性.相当一大类流量控制问题可以模仿本文方法建立朗之万方程,进而使用与本文近似的系统分析法考察其相变过程.本文方法适用范围的广泛性值得重视.

[1] Firoiu V, Borden M 2000 *IEEE INFOCOM* 1435

[2] Chung J, Claypool M 2003 *Proc. IEEE NCA*

[3] Bohacek S, Shah K, Arce G, Davis M 2004 *IEEE Signal Processing Mag. Sep.* 69

[4] Le L, Aikat J, Jeffay K, Smith F D 2007 *IEEE/ACM Trans. Netw.* **15** 1217

[5] Wang L, Zhou S, Yuan J, Ren Y, Shan X 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 36 (in Chinese) [王 磊、周淑华、袁 坚、任 勇、山秀明 2007 物理学报 **56** 36]

[6] Yuan J, Ren Y, Liu F, Shan X 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 1221 (in Chinese) [袁 坚、任 勇、刘 峰、山秀明,2001 物理学报 **50** 1221]

[7] Wang X F, Li X, Chen G R 2006 *Complex networks* (Beijing: tup) (in Chinese) [汪小帆、李 翔、陈关荣 2006, 杂网络 (北京:清华大学出版社)]

[8] Li Y, Ma W, Shui H, Wang L, Zhou M 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 3 (in Chinese) [李幼平、马卫东、水鸿寿、王 磊、周明天 2008 物理学报 **57** 3]

[9] Misra V, Gong W B, Towsley D 2000 ACM SIGCOMM 151

[10] Floyd S, Jacobson V 1993 *IEEE/ACM Trans. Netw.* **1** 397

[11] Ding T, Li C 1991 *Ordinary Differential Equations* (Beijing: HEP), p277 (in Chinese) [丁同仁、李承治 1991 常微分方程教程,(北京:高等教育出版社) 第 277 页]

[12] Feng W, Kandlur D, Saha D, Shin K 1999 *IEEE INFOCOM*

[13] Diot C, Iannaccone G, May M 2001 *Sprint ATL Technical Report* TR01-ATL-012501

Langevin model of the flow control in the internet and its phase transition analysis*

Fan Hua†　Li Li　Yuan Jian　Shan Xiu-Ming

(*Department of Electronic Engineering, Tsinghua University, Beijing* 100084, *China*)

(Received 23 February 2009; revised manuscript received 1 April 2009)

Abstract

One of the big challenges in the field of Internet research is to elucidate the relationship between micro-algorithms of the flow control protocols and macro-properties of the Internet with a proper model. In this paper, we build up a Langevin equation under the transmission control protocol using deductive method. Then we analyze the effectiveness of the active queue management based on the Langevin model. We have proved that there is a phase transition sequence from smooth state to congestion state then to paralysis state in all such kind of algorithms. We also provide explicit formulas of the critical points in terms of the system parameters. Although the model used in this paper focuses on a specific algorithm, we believe this method has a great potential in analyzing and understanding various network congestion control algorithms.

Keywords: Internet, flow control, Langevin equation, phase transition

PACC: 0540, 0570F

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 60674048, 60603068, 60772053, 60672142), and the State Key Development Program for Basic Research of China (Grant Nos. 2007CB307100 – 2007CB307105).

† E-mail: fanhua00@gmail.com