

广义非完整力学系统的 Lie 对称性与 Noether 守恒量^{*}

董文山[†] 黄宝歆

(潍坊学院物理与电子科学系, 潍坊 261061)

(2008 年 10 月 26 日收到 2009 年 3 月 24 日收到修改稿)

研究广义非完整力学系统的 Lie 对称性与 Noether 守恒量, 建立 Lie 对称性的确定方程、限制方程和附加限制方程, 给出结构方程和 Noether 守恒量的形式, 研究 Lie 对称性的逆问题, 并举算例说明结果的应用.

关键词: 广义非完整力学, Lie 对称性, 守恒量

PACC: 0320

1. 引言

对称性原理是物理学中更高层次的法则^[1], 利用对称性寻求系统的守恒量是近代分析力学的重要研究方向. 1979 年, Lutzky^[2]将 Sophus Lie 研究微分方程在无限小群变换下不变性的方法应用于 Lagrange 力学系统, 得到了 Noether 型守恒量. 其后, Lie 对称性方法发展迅速, 被推广到了各种力学系统, 取得了一系列重要成果^[1, 3-15].

受有广义非完整约束的广义经典力学系统称为广义非完整力学系统. 罗绍凯研究了系统的运动方程, 给出了系统的 Poincaré-Chetaev 积分变量关系和积分不变量^[16], Li 等研究了广义非完整力学中奇异系统的 Noether 对称性^[17]和 Poincaré-Chetaev 积分不变量^[18], 陈立群给出了系统的 Vaccò 动力学方程^[19]. 本文将对称性方法推广至广义非完整力学系统, 研究系统的 Lie 对称性, 给出系统的确定方程、结构方程和 Noether 守恒量的形式, 最后举例说明结果的应用.

2. 系统的运动微分方程

研究自由度为 n 的广义非完整力学系统. 假设系统的位形由广义坐标 q^i ($i = 1, \dots, n$) 确定, 其运动受有 g 个 l 阶线性非完整约束

$$f_\beta(t, q_{(0)}^i, q_{(1)}^i, \dots, q_{(l)}^i) = 0 \quad (\beta = 1, 2, \dots, g; i = 1, \dots, n), \quad (1)$$

式中

$$q_{(j)}^i = \frac{d^j}{dt^j} q^i(t) \quad (i = 1, \dots, n; j = 0, 1, \dots, l). \quad (2)$$

在广义复合导数空间, 系统的虚位移满足广义非完整力学的 Четаев 定义^[16]

$$\frac{\partial f_\beta}{\partial q_{(s+1)}^i} \delta q_{(s)}^i = 0, \quad \delta t = 0, \quad \delta q_{(s)}^i \neq 0 \quad (i = 1, \dots, n; s = 0, 1, \dots, l-1), \quad (3)$$

按照 Lagrange 乘子法, 系统的 Routh 方程为^[16]

$$\sum_{j=0}^l (-1)^j \frac{d^j}{dt^j} \left(\frac{\partial L}{\partial q_{(j)}^i} \right) = \lambda_\beta^{s+1} \frac{\partial f_\beta}{\partial q_{(s+1)}^i} \quad (i = 1, \dots, n), \quad (4)$$

式中 $L = L(t, q_{(0)}^i, q_{(1)}^i, \dots, q_{(l)}^i)$ 为系统的广义 Lagrange 函数, λ_β^{s+1} 为广义 Lagrange 待定乘子, 设方程 (4) 非奇异, 即设

$$\det \left[\frac{\partial^2 L}{\partial q_{(l)}^i \partial q_{(l)}^j} \right] \neq 0, \quad (5)$$

在方程 (4) 积分之前, 可由方程 (1) (3) (4) 先求出约束乘子 λ_β^{s+1} 作为 $t, q_{(s+1)}^i, q_{(s)}^i$ 的函数, 于是方程 (4) 可表为下列相应完整系统的形式:

$$\sum_{j=0}^l (-1)^j \frac{d^j}{dt^j} \left(\frac{\partial L}{\partial q_{(j)}^i} \right) = \Lambda_i,$$

^{*} 潍坊学院自然科学基金(批准号: 2008Z03)资助的课题.

[†] E-mail: dlongwenshan@126.com.

$$\Lambda_i = \sum_{s=0}^{l-1} \Lambda_i^s = \lambda_\beta^{s+1} \frac{\partial f_\beta}{\partial q_{(s+1)}^i} \quad (i = 1 \dots n). \quad (6)$$

Λ_i 为广义非完整约束反力, 引入广义动量和 Hamilton 函数

$$p_i^{(s)} = \sum_{j=0}^{l-s-1} (-1)^j \frac{d^j}{dt^j} \frac{\partial L}{\partial q_{(j+s+1)}^i},$$

$$H = p_i^{(s)} \dot{q}_{(s)}^i - L \quad (i = 1 \dots n; s = 0, 1 \dots, l-1), \quad (7)$$

系统运动方程可表为正则形式^[16]

$$\dot{q}_{(s)}^i = \frac{\partial H}{\partial p_i^{(s)}},$$

$$\dot{p}_i^{(s)} = -\frac{\partial H}{\partial q_{(s)}^i} + \tilde{\Lambda}_i \quad (i = 1 \dots n). \quad (8)$$

其中, $\tilde{\Lambda}_i$ 为 Λ_i 中 $\dot{q}_{(s)}^i$ 用 $(t, q_{(s)}, p^{(s)})$ 替代所得表达式.

令^[20,21]

$$a^\mu = \begin{cases} q_{(s)}^i & (\mu = 2ns + i; s = 0, 1 \dots, l-1; i = 1 \dots, n), \\ p_i^{(s)} & (\mu = (2s+1)n + i; s = 0, 1 \dots, l-1; i = 1 \dots, n), \end{cases} \quad (9)$$

$$R_\mu = \begin{cases} p_i^{(s)} & (\mu = 2ns + i; s = 0, 1 \dots, l-1; i = 1 \dots, n), \\ 0 & (\mu = (2s+1)n + i; s = 0, 1 \dots, l-1; i = 1 \dots, n), \end{cases} \quad (10)$$

则(1)(3)式中的 f_β 和(8)式中 $\tilde{\Lambda}_i$ 可表为

$$\tilde{f}_\beta^*(t, a^\mu) = 0$$

$$(\mu = 2ns + i; s = 0, 1 \dots, l-1; i = 1 \dots, n), \quad (11)$$

$$\frac{\partial \tilde{f}_\beta^*}{\partial a^{\mu+2n}} \delta a^\mu = 0, \quad \delta t = 0, \quad \delta a^\mu \neq 0$$

$$(\mu = 2ns + i; s = 0, 1 \dots, l-1; i = 1 \dots, n), \quad (12)$$

$$\tilde{\Lambda}_i^* = \lambda_\beta^{s+1} \frac{\partial \tilde{f}_\beta^*}{\partial a^{\mu+2n}}$$

$$(\mu = 2ns + i; s = 0, 1 \dots, l-1; i = 1 \dots, n). \quad (13)$$

取

$$\tilde{\Lambda}_i = -\Omega_i^{(s)} \frac{\partial H}{\partial p_i^{(s)}}, \quad (14)$$

$$P_\mu = \begin{cases} \Omega_i^{(s)} \frac{\partial H}{\partial p_i^{(s)}} & (\mu = 2ns + i; s = 0, 1 \dots, l-1; i = 1 \dots, n), \\ 0 & (\mu = (2s+1)n + i; s = 0, 1 \dots, l-1; i = 1 \dots, n). \end{cases} \quad (15)$$

正则方程(8)可进一步表为

$$\left(\frac{\partial R_\nu}{\partial a^\mu} - \frac{\partial R_\mu}{\partial a^\nu} \right) \dot{a}^\nu - \frac{\partial H}{\partial a^\mu} = -P_\mu \quad (\mu, \nu = 1 \dots, 2nl), \quad (16)$$

与(16)式相对应的逆变代数方程为

$$\dot{a}^\mu - u^{\mu\nu} \frac{\partial H}{\partial a^\nu} = 0 \quad (\mu, \nu = 1 \dots, 2nl), \quad (17)$$

此处

$$u^{\mu\nu} = \omega^{\mu\nu} + T^{\mu\nu}, \quad (18)$$

其中

$$\omega^{\mu\nu} = \frac{\partial R_\nu}{\partial a^\mu} - \frac{\partial R_\mu}{\partial a^\nu}, \quad (\omega_{\mu\nu}) = (\omega^{\mu\nu})^{-1}, \quad (19)$$

且

$$(\omega^{\mu\nu}) = \begin{bmatrix} M_1 & & \\ & \ddots & \\ & & M_{l-1} \end{bmatrix}_{2nl \times 2nl},$$

$$M_1 = \dots = M_{l-1} = \begin{bmatrix} 0_{n \times n} & I_{n \times n} \\ -I_{n \times n} & 0_{n \times n} \end{bmatrix}; \quad (20)$$

$$(T^{\mu\nu}) = \begin{bmatrix} 0_{n \times n} & & & & \\ & H_1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 0_{n \times n} & \\ & & & & H_k & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 0_{n \times n} \\ & & & & & & & H_l \end{bmatrix}_{2nl \times 2nl},$$

$$H_1 = \begin{bmatrix} \Omega_1^{(0)} & & & \\ & \Omega_2^{(0)} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \Omega_n^{(0)} \end{bmatrix},$$

$$H_k = \begin{bmatrix} \Omega_1^{(k-1)} & & & \\ & \Omega_2^{(k-1)} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \Omega_n^{(k-1)} \end{bmatrix},$$

$$H_l = \begin{bmatrix} \Omega_1^{(l-1)} & & & \\ & \Omega_2^{(l-1)} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \Omega_n^{(l-1)} \end{bmatrix}. \quad (21)$$

这里 $O_{n \times n}$ 是 n 阶零矩阵, $I_{n \times n}$ 是 n 阶单位矩阵. 因系统是非奇异的, 由方程 (17) 可解出 $\dot{a}^\mu$, 记作

$$\dot{a}^\mu = h_\mu(t, a^\mu) \quad (\mu = 1, \dots, 2nl). \quad (22)$$

3. Lie 对称性的判据

引进无限小单参数变换

$$\begin{aligned} t^* &= t + \Delta t, \\ a^{\mu*} &= a^\mu + \Delta a^\mu. \end{aligned} \quad (23)$$

在一级近似下, 其展开式为

$$\begin{aligned} t^* &= t + \varepsilon \xi_0(t, a), \\ a^{\mu*} &= a^\mu + \varepsilon \xi_\mu(t, a), \end{aligned} \quad (\mu = 1, \dots, 2nl) \quad (24)$$

式中 ε 是无穷小参数, 具有一阶小量, ξ_0 和 ξ_μ 为无限小单参数变换的生成元. 取无限小变换的生成元向量

$$X^{(0)} = \xi_0 \frac{\partial}{\partial t} + \xi_\mu \frac{\partial}{\partial a^\mu}. \quad (25)$$

它的一次扩展

$$X^{(1)} = X^{(0)} + (\dot{\xi}_\mu - \dot{a}^\mu \xi_0) \frac{\partial}{\partial \dot{a}^\mu}. \quad (26)$$

根据微分方程不变性的判据, 在无穷小变换 (24) 式下, 运动微分方程 (22) 的不变性归结为如下确定方程:

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_\mu - u^{\nu\mu} \frac{\partial H}{\partial a^\nu} \xi_0 &= X^{(0)} \left(u^{\nu\mu} \frac{\partial H}{\partial a^\nu} \right) \\ (\mu, \nu &= 1, \dots, 2nl). \end{aligned} \quad (27)$$

定义 1 如果无限小生成元 ξ_0, ξ_μ 满足确定方程 (27), 则称相应的对称性为与广义非完整力学系统 (1) (4) 相应的广义完整力学系统 (6) 的 Lie 对称性.

广义非完整约束 (1) 在变换 (24) 下的不变性归结为如下限制方程:

$$X^{(0)}[\bar{f}_\beta^*(t, a^\mu)] = 0. \quad (28)$$

定义 2 如果无限小生成元 ξ_0, ξ_μ 满足确定方

程 (27) 以及限制方程 (28), 则称相应的对称性为广义非完整力学系统 (1) (4) 的弱 Lie 对称性.

若考虑到广义非完整力学的 Четаев 定义 (3) 对无限小生成元 ξ_0, ξ_μ 的限制, 则有

$$\frac{\partial \bar{f}_\beta^*}{\partial a^{\mu+2n}} (\xi_\mu - \dot{a}^\mu \xi_0) = 0, \quad (29)$$

方程 (29) 称为附加限制方程.

定义 3 如果无限小生成元 ξ_0, ξ_μ 满足确定方程 (27), 限制方程 (28) 和附加限制方程 (29), 则称相应的对称性为广义非完整力学系统 (1) (4) 的强 Lie 对称性.

4. 系统的结构方程和 Noether 守恒量

对于广义非完整力学系统, Lie 对称性通过 Noether 对称性可导致 Noether 守恒量.

定理 1 对于广义非完整力学系统 (1) (4) 相应的广义完整力学系统 (6), 如果 Lie 对称性的无限小生成元 ξ_0, ξ_μ 和规范函数 $G(t, a)$ 满足如下结构方程:

$$\begin{aligned} (R_\mu \dot{a}^\mu - H) \xi_0 + X^{(1)}(R_\mu \dot{a}^\mu - H) \\ - P_\mu (\xi_\mu - \dot{a}^\mu \xi_0) + \dot{G} = 0, \end{aligned} \quad (30)$$

则相应的广义完整力学系统 (6) 的 Lie 对称性导致相应广义完整力学系统的 Noether 守恒量.

$$I = R_\mu \xi_\mu - H \xi_0 + G = \text{const}. \quad (31)$$

定理 2 如果生成元 ξ_0, ξ_μ 是广义非完整力学系统 (1) (4) 的弱 Lie 对称性生成元, 且存在规范函数 $G(t, a)$ 满足结构方程 (30), 则广义非完整力学系统的弱 Lie 对称性导致相应完整系统的 Noether 守恒量 (31).

定理 3 如果生成元 ξ_0, ξ_μ 是广义非完整力学系统 (1) (4) 的强 Lie 对称性生成元, 且存在规范函数 $G(t, a)$ 满足结构方程 (30), 则广义非完整力学系统的强 Lie 对称性导致相应完整系统的 Noether 守恒量 (31).

证明

$$\begin{aligned} \frac{dI}{dt} &= \frac{\partial R_\mu}{\partial a^\nu} \dot{a}^\nu \xi_\mu + R_\mu \dot{\xi}_\mu - \left(\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial a^\nu} \dot{a}^\nu \right) \xi_0 \\ &\quad - H \dot{\xi}_0 - (R_\mu \dot{a}^\mu - H) \dot{\xi}_0 - (\dot{\xi}_\mu - \dot{a}^\mu \xi_0) R_\mu \\ &\quad - \frac{\partial R_\mu}{\partial a^\nu} \xi_\mu \dot{a}^\nu + \frac{\partial H}{\partial t} \xi_0 + \frac{\partial H}{\partial a^\mu} \xi_\mu + P_\mu (\xi_\mu - \dot{a}^\mu \xi_0) \\ &= (\xi_\mu - \dot{a}^\mu \xi_0) \left[\frac{\partial H}{\partial a^\mu} + P_\mu - \left(\frac{\partial R_\nu}{\partial a^\mu} - \frac{\partial R_\mu}{\partial a^\nu} \right) \dot{a}^\nu \right] \end{aligned}$$

$$- \left(\frac{\partial R_\nu}{\partial a^\mu} - \frac{\partial R_\mu}{\partial a^\nu} \right) \dot{a}^\mu \dot{a}^\nu \xi_0 = 0.$$

显然,系统存在守恒量(31)式.

5. 系统 Lie 对称性的逆定理

首先由已知守恒量求出与其相应的 Noether 对称性. 假设已知广义非完整力学系统(1)(4)有初积分

$$I = I(t, a) = \text{const}, \quad (32)$$

则有

$$\frac{dI}{dt} = \frac{\partial I}{\partial t} + \frac{\partial I}{\partial a^\mu} \dot{a}^\mu = 0. \quad (33)$$

将系统运动方程(16)的两端同乘以 $\bar{\xi}_\mu = \xi_\mu - \dot{a}^\mu \xi_0$ 并对 μ 求和,得

$$\bar{\xi}_\mu \left(\left(\frac{\partial R_\nu}{\partial a^\mu} - \frac{\partial R_\mu}{\partial a^\nu} \right) \dot{a}^\nu - \frac{\partial H}{\partial a^\mu} + P_\mu \right) = 0, \quad (34)$$

将(33)与(34)式相加后,分离出含 $\dot{a}^\nu$ 的项,并令其系数为零,得到

$$\frac{\partial I}{\partial a^\nu} + \left(\frac{\partial R_\nu}{\partial a^\mu} - \frac{\partial R_\mu}{\partial a^\nu} \right) \xi_\mu + \left(\frac{\partial H}{\partial a^\nu} + P_\nu \right) \xi_0 = 0 \quad (\nu = 1 \dots 2nl), \quad (35)$$

由此解得

$$\xi_\mu = \omega^{\nu\mu} \left[\frac{\partial I}{\partial a^\nu} + \left(\frac{\partial H}{\partial a^\nu} + P_\nu \right) \xi_0 \right] \quad (\mu = 1 \dots 2nl), \quad (36)$$

其中

$$\omega^{\nu\mu} \omega_{\mu\rho} = \delta_{\nu\rho} \quad (\mu, \rho = 1 \dots 2nl). \quad (37)$$

令初积分(32)式等于 Lie 对称性的守恒量(31)式,得

$$R_\mu \xi_\mu - H \xi_0 + G = I. \quad (38)$$

于是,在给定规范函数 G 的情况下,由方程(36)和(38)可求出生成元 ξ_0 和 ξ_μ ,它们对应系统(6)的

Noether 对称性.

其次,将所得对称性生成元 ξ_0, ξ_μ 代入对称性确定方程(27)和限制方程(28)和附加限制方程(29),检验此对称性是否是 Lie 的.

定理 4 如果由方程(36)和(38)确定的无限小生成元 ξ_0, ξ_μ 满足确定方程(27)和限制方程(28)和附加限制方程(29),则对称性为广义非完整力学系统的强 Lie 对称性;如果 ξ_0, ξ_μ 满足确定方程(27)和限制方程(28),则对称性为系统的弱 Lie 对称性;如果 ξ_0, ξ_μ 仅满足确定方程(27),则对称性是相应广义完整力学系统的 Lie 对称性.

6. 算 例

设力学系统的广义 Lagrange 函数为

$$L = \frac{1}{2} (q_{(2)}^1)^2 - \frac{1}{b} q_{(1)}^1 \arctg bt, \quad (39)$$

受广义非完整约束

$$f = q_{(1)}^1 - tq_{(2)}^1 = 0, \quad (40)$$

试研究系统的 Lie 对称性和 Noether 守恒量.

首先,研究正问题.

令

$$a^1 = q_{(0)}^1, \quad a^2 = P_1^{(1)}, \quad a^3 = q_{(1)}^1, \quad a^4 = P_1^{(2)},$$

系统的广义动量和 Hamilton 函数为

$$P_1^{(1)} = -\frac{1}{b} \arctg bt - q_{(3)}^1, \quad P_1^{(2)} = q_{(2)}^1,$$

$$H = a^2 a^3 + \frac{1}{2} (a^4)^2 + \frac{1}{b} a^3 \arctg bt. \quad (41)$$

由(8)(40)和(41)式,得

$$\lambda^1 = -\frac{1}{1 + b^2 t^2},$$

$$\lambda^2 = -\frac{1}{t} \left(\frac{1}{b} \arctg bt - \frac{1}{1 + b^2 t^2} + a^2 \right). \quad (42)$$

方程(17)和(18)给出

$$\dot{a}^1 = a^3, \quad \dot{a}^2 = \frac{1}{1 + b^2 t^2}, \quad \dot{a}^3 = a^4, \quad \dot{a}^4 = - \left(a^2 + \frac{1}{b} \arctg bt \right) + \frac{1}{t} \left(a^2 + \frac{1}{b} \arctg bt + \frac{1}{1 + b^2 t^2} \right), \quad (43)$$

$$u^{\nu\mu} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & \frac{1}{a^3(1 + b^2 t^2)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & \frac{1}{a^4 t} \left(a^2 + \frac{1}{b} \arctg bt + \frac{1}{1 + b^2 t^2} \right) \end{pmatrix}. \quad (44)$$

Lie 对称性的确定方程 (27) 给出

$$\begin{aligned}\dot{\xi}_1 - a^3 \dot{\xi}_0 &= \xi_3, \\ \dot{\xi}_2 - \frac{1}{1+b^2 t^2} \dot{\xi}_0 &= -\frac{2b^2 t}{(1+b^2 t^2)^2} \xi_0, \\ \dot{\xi}_3 - a^4 \dot{\xi}_0 &= \xi_4, \\ \dot{\xi}_4 + \left[\left(a^2 + \frac{1}{b} \operatorname{arctg} bt \right) \left(1 - \frac{1}{t} \right) - \frac{1}{(1+b^2 t^2)t} \right] \dot{\xi}_0 \\ &= \left[\frac{1}{1+b^2 t^2} \left(1 - \frac{1}{t} \right) - \left(a^2 + \frac{1}{b} \operatorname{arctg} bt \right) \frac{1}{t^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1+3b^2 t^2}{(1+b^2 t^2)^2 t^2} \right] \xi_0 + \left(1 - \frac{1}{t} \right) \xi_2.\end{aligned}\quad (45)$$

Lie 对称性的限制方程 (28) 给出

$$X^{(0)}(a^3 - ta^4) = -a^4 \dot{\xi}_0 + \xi_3 - t\xi_4 = 0. \quad (46)$$

由 (45) (46) 式可求得如下解:

$$\xi_0 = 0, \xi_1 = 1, \xi_2 = \xi_3 = \xi_4 = 0. \quad (47)$$

将 (47) 式代入结构方程 (30), 求得规范函数

$$G = \frac{1}{b} \operatorname{arctg} bt. \quad (48)$$

(38) 式给出系统的守恒量

$$I = a^2 + \frac{1}{b} \operatorname{arctg} bt = \text{const}. \quad (49)$$

其次, 研究逆问题.

假设有积分 (49), 则由 (36) 和 (38) 两式得

$$\begin{aligned}\xi_1 &= 1 + a^3 \xi_0, \\ \xi_2 &= -\frac{1}{1+b^2 t^2} \xi_0,\end{aligned}$$

$$\xi_3 = a^4 \xi_0,$$

$$\begin{aligned}\xi_4 &= -\left[\left(a^2 + \frac{1}{b} \operatorname{arctg} bt \right) \left(1 + \frac{1}{t} \right) + \frac{1}{t(1+b^2 t^2)} \right] \xi_0, \\ a^2 \xi_1 + a^4 \xi_3 - \left[a^2 a^3 + \frac{1}{2} (a^4)^2 + \frac{1}{b} a^3 \operatorname{arctg} bt \right] \xi_0 + G \\ &= a^2 + \frac{1}{b} \operatorname{arctg} bt.\end{aligned}\quad (50)$$

当取

$$G = \frac{1}{b} \operatorname{arctg} bt, \quad (51)$$

则有

$$\xi_0 = 0, \xi_1 = 1, \xi_2 = \xi_3 = \xi_4 = 0. \quad (52)$$

容易验证 (52) 式满足确定方程 (27) 式和限制方程 (28) 式, 因此, 系统的对称性为弱 Lie 对称性.

7. 结 论

由于广义非完整力学系统包容了广义经典力学和一阶至高阶非完整力学, 因此, 本文的主要结果 (27) (30) 和 (31) 式具有普遍意义. 对于不受约束的力学系统, 广义非完整约束力为 $\Lambda^i = 0$, 本文的结果蜕化为广义经典力学的结果^[21], 对于不受非完整约束的非保守力学系统, 重新定义 Λ^i 为广义非势力, $\Lambda^i = Q_k(t, q_{(0)}, q_{(1)}^i, \dots, q_{(l)}^i)$, 则本文的主要结果与文献 [22] 的主要结果相同.

- [1] Mei F X 1999 *Applications of Lie Groups and Lie Algebras to Constrained Mechanical Systems* (Beijing: Science Press) p1 (in Chinese) 梅凤翔 1999 李群和李代数对约束力学系统的应用 (北京: 科学出版社) 第 1 页
- [2] Lutzky M 1979 *J. Phys. A: Math. Gen.* **12** 973
- [3] Sen T, Tabor M 1990 *Physica D* **44** 313
- [4] Barbara A S 1990 *Journal of Mathematical Physics* **31** 1627
- [5] Shivamoggi B K, Muilenburg L 1991 *Physics Lett. A* **154** 24
- [6] Zhao Y Y, Mei F X 1993 *Advances in Mechanics* **23** 360 (in Chinese) [赵跃宇、梅凤翔 1993 力学进展 **23** 360]
- [7] Zhao Y Y 1994 *Acta Mech. Sin.* **26** 380 (in Chinese) [赵跃宇 1994 力学学报 **26** 380]
- [8] Mei F X 1998 *Chin. Sci. Bull.* **43** 1937
- [9] Fang J H, Zhao S Q 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 390 (in Chinese) [方建会、赵嵩卿 2001 物理学报 **50** 390]
- [10] Qao Y F, Zhao S H 20001 *Acta Phys. Sin.* **50** 1 (in Chinese) [乔永芬、赵淑红 2001 物理学报 **50** 1]
- [11] Fang J H 2002 *Chin. Phys.* **11** 313

- [12] Zhang H B, Gu S L 2002 *Chin. Phys.* **11** 765
- [13] Zhang Y 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 461 (in Chinese) [张毅 2002 物理学报 **51** 461]
- [14] Fu J L, Chen L Q, Bai J H, Yang X D 2003 *Chin. Phys.* **12** 695
- [15] Fang J H, Yan X H, Li H, Chen P S 2004 *Commun. Theor. Phys.* **42** 19
- [16] Luo S K 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 1416 (in Chinese) [罗绍凯 2002 物理学报 **51** 1416]
- [17] Li A M, Jiang J H, Li Z P 2003 *Chin. Phys.* **12** 467
- [18] Li A M, Zhang Y, Li Z P 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 2816 (in Chinese) [李爱民、张莹、李子平 2004 物理学报 **53** 2816]
- [19] Chen L Q 1994 *Journal of Anshan Institute of I. & S. Technology* **17** 29 (in Chinese) [陈立群 1994 鞍山钢铁学院学报 **17** 29]
- [20] Zhang Y 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 2059 (in Chinese) [张毅 2001 物理学报 **50** 2059]
- [21] Zhang Y, Shang M, Mei F X 2000 *Chin. Phys.* **9** 401
- [22] Dong W S 2007 *Journal of shandong university (Natural Science)* **42** 30 (in Chinese) [董文山 2007 山东大学学报 **42** 30]

Lie symmetries and Noether conserved quantities of generalized nonholonomic mechanical systems^{*}

Dong Wen-Shan[†] Huang Bao-Xin

(College of Physics and Electronic Science , Weifang University , Weifang 261061 , China)

(Received 26 October 2008 ; revised manuscript received 24 March 2009)

Abstract

In this paper we study the Lie symmetries and Noether conserved quantities of generalized nonholonomic mechanical systems , and establish the determining equations , the restriction equations and the additional restriction equations . The structure equation and the form of Noether conserved quantities are obtained . The inverse problems of Lie symmetries are discussed and an example to illustrate the application of the result is given .

Keywords : generalized nonholonomic mechanics , Lie symmetries , conserved quantity

PACC : 0320

^{*} Project supported by the Natural Science Foundation of Weifang University , China (Grant No. 2008Z03).

[†] E-mail : dongwenshan@126.com .