

光谱重置法在非局域空间光孤子研究中的应用*

郑睿¹⁾ 高星辉¹⁾²⁾ 曹伟文¹⁾ 陈利霞¹⁾ 陆大全¹⁾ 郭旗¹⁾ 吴立军¹⁾ 胡巍^{1)†}

1) (华南师范大学光子信息技术广东省高校重点实验室, 广州 510006)

2) (广州大学机械与电气工程学院, 广州 510006)

(2009 年 5 月 4 日收到; 2009 年 5 月 26 日收到修改稿)

利用光谱重置法在数值上求解非局域非线性薛定谔方程, 快速准确地计算出非局域非线性介质中空间光孤子的波形, 并得到在不同非局域程度下形成孤子的临界功率和临界束宽的关系. 研究表明, 在任意非局域程度条件下都可以形成稳定的空间光孤子. 在响应函数不同时分别与分析解进行对比, 发现数值解和分析解只有在强非局域和弱非局域这两种极限条件下是一致的, 并给出了对应解析解的有效范围.

关键词: 光谱重置法, 非局域空间光孤子, 临界功率, 临界束宽

PACC: 4265S

1. 引言

非局域空间光孤子是存在于空间非局域非线性介质中的空间光孤子, 当非线性效应产生的会聚效果与衍射产生的发散效果平衡时, 光束在介质中就以空间光孤子的形态传输. 在非局域非线性介质中光束的传输可以用非局域非线性薛定谔方程来描述^[1-3], 介质的特性由响应函数表示, 根据响应函数的宽度和光束宽度的相对大小可以把非局域程度分为四种: 局域、弱非局域、一般非局域和强非局域^[4]. 根据响应函数是否处处连续可导, 可分为无奇点型响应函数材料(如高斯型响应)和有奇点型响应函数材料(如指数衰减型响应), 常用的液晶材料即为指数衰减型响应^[5].

当前对非局域空间光孤子的研究已经引起了人们广泛的兴趣^[1-15]. Synder 等^[1]在强非局域条件下得到了精确的高斯型空间孤子解. 郭旗等^[6,7]的进一步研究得到了强非局域模型下无奇点型响应函数材料中的解析解, 曹龙贵等^[15]求得了强非局域条件下有奇点型响应函数材料中的近似解析解. Królikowski 等^[8]得到了弱非局域条件下空间光孤子的解析解.

然而至今尚未见有文献报道能够给出在不同

非局域程度下求得光孤子精确解析解的统一方法, 在一般非局域条件下更没有得到光孤子的解析解. 本文利用一种新算法, 从 1+1 维非局域非线性介质出发, 在数值上求出两种不同类型响应函数材料中任意非局域程度条件下的空间光孤子, 得到了不同非局域程度下的空间光孤子的波形. 结果表明在任意非局域程度条件下都可以形成稳定的光孤子, 且光孤子的临界功率随着非局域程度的减弱而减小. 在强非局域和弱非局域两种极限条件下, 我们的数值结果与解析结果精确符合.

2. 光谱重置法求光束在非局域非线性介质中的孤子解

光束在 1+1 维非局域非线性介质中的传输可以用非局域非线性薛定谔方程^[1-3]来描述

$$i \frac{\partial \psi}{\partial z} + \frac{1}{2k} \nabla^2 \psi + \rho \psi \int r(x-x') |\psi(x')|^2 dx' = 0, \quad (1)$$

式中, ψ 为光束的振幅分布, $k = \omega n_0 / c$ (ω 为光束的角频率, n_0 为材料的线性折射率, c 为真空中的光速), $\rho = k\eta$ (η 为介质常数, $\eta > 0$ 表示自聚焦介质, $\eta < 0$ 表示自散焦介质, 本文取 $\eta > 0$), $r(x)$ 是介质的对称非线性响应函数, 其满足归一化条件

* 国家自然科学基金(批准号:10804033, 10674050)、广东省高校创新团队计划(批准号:06CXTD005)和高等学校博士学科点专项科研基金(批准号:200805740002)资助的课题.

† 通讯联系人. E-mail: huwei@senu.edu.cn

$$\int_{-\infty}^{\infty} r(x) dx = 1.$$

本文讨论两种类型的响应函数, 分别是高斯型和指数衰减型

$$r_G(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}w_m} \exp\left(-\frac{x^2}{w_m^2}\right), \quad (2)$$

$$r_E(x) = \frac{1}{2w_m} \exp\left(-\frac{|x|}{w_m}\right), \quad (3)$$

式中 w_m 为响应函数的宽度. 通过以下的归一化变换:

$$\begin{aligned} X &= \frac{x}{w_m}, \\ Z &= \frac{z}{kw_m^2}, \\ U &= \frac{\psi}{\psi_0}, \end{aligned} \quad (4)$$

其中 $|\psi_0|^2 = 1/\rho kw_m^2$, 分别对薛定谔方程和响应函数进行归一化, 得到归一化的方程和响应函数

$$i \frac{\partial U}{\partial Z} + \frac{1}{2} \nabla^2 U + U \int R(X - X') |U(X')|^2 dX' = 0, \quad (5)$$

$$R_G(X) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp(-X^2), \quad (6)$$

$$R_E(X) = \frac{1}{2} \exp(-|X|). \quad (7)$$

通过在强非局域条件下展开响应函数 $R(X)$ [6,14,15], 弱非局域条件下展开光强 $|U(X)|^2$ 的方法 [8] 可以分别得到相应条件下的解析解. 但是在一般非局域条件下至今尚没有人给出解析解, 所以只能在数值上求出任意非局域程度条件下的孤子解, 以便进一步研究孤子的性质. 因此我们可以利用 Ablowitz 等 [9] 提出的光谱重置法来求得精确的孤子波形.

由于空间光孤子是衍射效应和非线性效应达到平衡时光束在非线性介质中的一种稳定传输状态. 如果光束函数的孤子态一定存在, 那么非局域非线性薛定谔方程的孤子解在傅里叶空间内的光谱在整个传输过程中保持不变. 因此对于任意可积的初始光束, 我们可以在傅里叶空间对它的光谱进行迭代, 直到其收敛于稳定状态.

光谱重置法即是能将产生孤子的系统 (如非局域非线性薛定谔方程) 变换到傅里叶空间, 找到一对耦合的积分方程和代数方程, 这一对方程可以有效地保证光谱重置法收敛, 将任意可积的初始光束函数代入方程进行迭代, 最终得到孤子解. 由于采

用一对耦合的方程双重逼近, 该算法的收敛速度极其迅速. 与利用分步傅里叶算法找孤子的方法 [10,11] 相比, 本算法不用手动调整初始入射波形和振幅, 且不利用光束的传输状态来判断是否为孤子形态, 因此更加准确和易于实现.

在归一化系统中, 孤子解的形式 [8] 可设为

$$U(X, Z) = u(X) \exp(i\mu Z), \quad (8)$$

这里 $\mu > 0$ 是传播常数 (即孤子的特征值), $u(X)$ 为任意可积的待定波形. 代入 (5) 式, 得到

$$-\mu u + \frac{1}{2} \nabla^2 u + u \int R(X - X') |u(X')|^2 dX' = 0. \quad (9)$$

定义傅里叶变换 F 为

$$\hat{u}(K) = F[u(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} u(X) \exp(iKX) dX,$$

对 (9) 式进行傅里叶变换, 可以得到

$$\hat{u}(K) = \frac{F\left[u \int R(X - X') |u(X')|^2 dX'\right]}{\mu + \frac{1}{2} |K|^2}. \quad (10)$$

在这里我们引入一个新的变量 λ 以限制无边界条件下其他增益对振幅的影响, 并避免振幅趋向零. 令 $u(X) = \lambda v(X)$, $\hat{u}(K) = \lambda \hat{v}(K)$, 这里 $\lambda \neq 0$ 是一个能够确定的常数. (10) 式变形为

$$\begin{aligned} \hat{v}(K) &= \frac{|\lambda|^2 F\left[v \int R(X - X') |v(X')|^2 dX'\right]}{\mu + \frac{1}{2} |K|^2} \\ &\equiv |\lambda|^2 Q_\lambda[\hat{v}(K)]. \end{aligned} \quad (11)$$

在 (11) 式两边同时乘以 \hat{v}^* 并在整个 K 空间内积分, 可以确定常数 λ 的值

$$|\lambda|^2 = \frac{\int |\hat{v}|^2 dK}{\int Q_\lambda[\hat{v}(K)] \hat{v}^* dK}. \quad (12)$$

从 (11) 和 (12) 式, 我们可以得到耦合的迭代关系式

$$|\lambda_m|^2 = \frac{\int |\hat{v}_m|^2 dK}{\int Q_\lambda[\hat{v}_m(K)] \hat{v}_m^* dK}, \quad (13)$$

$$\hat{v}_{m+1}(K) = \frac{|\lambda_m|^2 F\left[v_m \int R(X - X') |v_m(X')|^2 dX'\right]}{\mu + \frac{1}{2} |K|^2}. \quad (14)$$

整个光谱重置法的计算流程如下: 给出一个任意的试探波形 $v_1(X)$ (如高斯函数或者双曲正割函数),

对其作傅里叶变换得到 $\hat{v}_1(K)$, 代入(13)式, 可以得到 $|\lambda_1|^2$, 再将 $|\lambda_1|^2$ 代入(14)式, 可以得到 $\hat{v}_2(K)$. 如果迭代 $n+1$ 次以后, 有

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} |\lambda_{n+1}|^2 |\hat{v}_{n+1}(K)|^2 dK - \int_{-\infty}^{\infty} |\lambda_n|^2 |\hat{v}_n(K)|^2 dK \right| < \delta,$$

其中 δ 确定光束波形的精度, 这里取 10^{-6} , 则可认为此时的光谱为孤子状态的光谱. 对 \hat{v}_{n+1} 作逆傅里叶变换, 可以得到孤子态的光束函数 $u(X) = \lambda_{n+1} v_{n+1}(X)$.

计算中, 对不同的响应函数我们选取合适的 μ 值通过迭代得到孤子的波形 $u(X)$ (见图 1), 并计算出不同 μ 值时的临界功率 P_c 和二阶矩束宽 W_c ,

$$P_c = \int_{-\infty}^{\infty} |U|^2 dX, \quad W_c^2 = \frac{4 \int_{-\infty}^{\infty} |U|^2 X^2 dX}{\int_{-\infty}^{\infty} |U|^2 dX}. \quad (15)$$

由于方程是按照 w_m 归一化的, 所以 W_c 也代表了非局域程度. 当 $W_c \ll 1$ 时, 说明在物理坐标中孤子的临界束宽远远小于介质响应函数的宽度, 代表了强非局域情况; $W_c \gg 1$ 时, 说明在物理坐标中孤子的临界束宽远远大于介质响应函数的宽度, 代表了弱非局域情况; 当 $W_c \rightarrow \infty$ 时, 则(1)式演化为局域条件下的非线性薛定谔方程. 即随着 W_c 的增大, 在物理坐标中非局域程度逐渐变小.

我们计算出空间光孤子的临界功率与临界束宽的关系如图 2 所示, 可以看出孤子临界束宽越小, 孤子所需的临界功率越大. 这是因为入射光束越细, 则衍射效应越强, 要求的非线性就越强. 当 $W_c \gg 1$ 时, 响应函数的宽度远远小于光束束宽, 两种类型响应函数随着非局域程度的减小, 都逐渐趋近于 δ 函数, 高斯响应和指数衰减响应形成孤子的临界功率逐渐相等. 而当 $W_c \ll 1$ 时, 两种不同的响应函数对应的临界功率有很大差别, 说明在强非局域条件下, 响应函数的形状对临界功率有很大的影响. 通

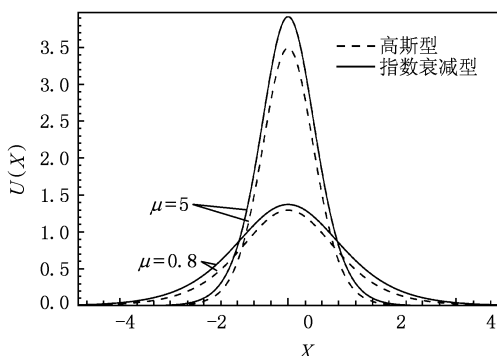


图 1 不同传播常数在高斯响应和指数衰减响应下的孤子波形

过图 3 我们可以看出 $dP_c/d\mu > 0$, 因此孤子可以稳定存在^[10].

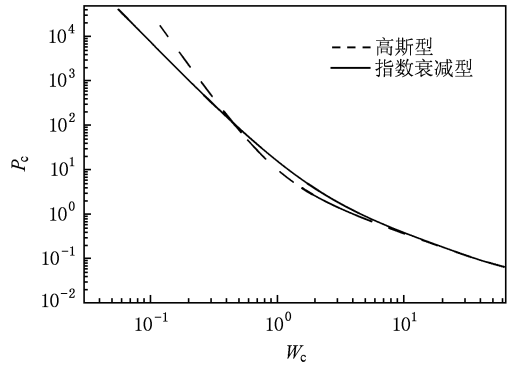


图 2 孤子临界功率与临界束宽的关系

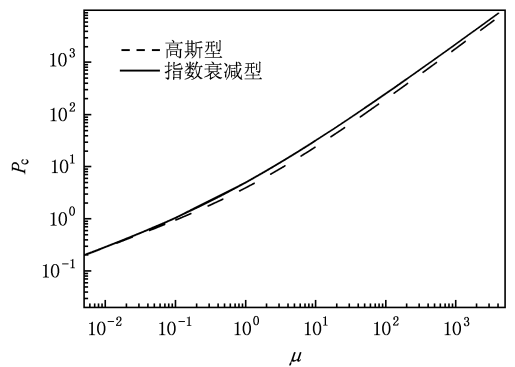


图 3 传播常数与临界功率的关系

3. 与非局域非线性介质中空间光孤子解析解的对比

将光谱重置法计算出的数值解和已有的解析解对比, 可以验证我们算法的准确性, 并得到两种响应函数材料中不同非局域程度条件下解析解的适用范围.

3.1. 与强非局域条件下解析解的对比

强非局域情况下孤子的解析解和响应函数的类型有关. 由于响应函数的宽度远大于光束的束宽, 对无奇点型响应函数(如高斯型响应), 根据郭旗等^[6]的方法, 在本文的归一化坐标下将响应函数展开为

$$R_c(X) \approx R_c(0) + \frac{1}{2} R_c''(0) X^2,$$

可以得到强非局域介质中孤子解的波形

$$U(X, Z) |_{z=0} = \frac{2^{3/4}}{\sqrt{W_c^3}} \exp\left(-\frac{X^2}{W_c^2}\right). \quad (16)$$

孤子的临界功率和临界束宽的关系为

$$P_c = \frac{2}{W_c^4} \sqrt{\frac{\pi}{2}}. \quad (17)$$

将响应函数展开到四阶,使该方法在亚强非局域条件下也适用^[7],即得到亚强非局域下孤子临界功率和临界束宽的关系

$$P_c = \frac{2}{W_c^4 - \frac{1}{2}W_c^6} \sqrt{\frac{\pi}{2}}. \quad (18)$$

高斯响应情况下解析解和数值解的对照参见图4.图4中的细实线为我们求得的数值解,虚线为强非局域条件下的解析解(17)式,带三角的细线则为亚强非局域条件下的解析解(18)式.可以看出,当 $W_c \ll 1$ 时,满足强非局域条件,解析结果和数值解完全符合.随着 W_c 增大,非局域程度减小,解析解逐渐偏离数值解.将解析解和数值解的相对误差为10%时作为解析解的失效条件,可以得到高斯响应时强非局域条件下解析解失效时的 W_c 值为0.26.也就是说响应宽度约为光束束宽的4倍时,文献^[6]的解析解仍然可以给出相当精确的结果.在亚强非局域条件下解析解失效时 W_c 值为0.48,即此时响应宽度仅为光束束宽的2倍.

如果响应函数有奇点,原则上无法对响应函数进行泰勒展开.但是对于指数衰减响应,可以采用另外一种方法^[15]将响应函数展开为

$$R_E(X) = \frac{1}{2} \left(1 - |X| + \frac{X^2}{2}\right). \quad (19)$$

利用变分法^[14],可求得孤子临界束宽和临界功率的关系

$$P_c = \frac{4}{W_c^3 - \frac{\sqrt{\pi}}{2}W_c^4} \sqrt{\frac{\pi}{2}}. \quad (20)$$

(20)式存在奇异性,考虑在强非局域条件下有 $W_c \ll 1$,上式可近似为

$$P_c = \frac{4}{W_c^3} \sqrt{\frac{\pi}{2}}. \quad (21)$$

注意到(21)式中 P_c 与 W_c 的三次方成反比,而(17)式中 P_c 与 W_c 的四次方成反比,说明强非局域条件下响应函数的形状对临界功率有很大影响,如图2所示.如果将响应函数 $R_E(X)$ 展开到5阶,则可得到在亚强非局域程度下的解析解^[15],并得到临界束宽和临界功率的关系

$$P_c = \frac{4}{W_c^3 - \frac{\sqrt{\pi}}{2}W_c^4 + \frac{1}{2}W_c^5 - \frac{\sqrt{\pi}}{8}W_c^6} \sqrt{\frac{\pi}{2}}. \quad (22)$$

图5给出了响应函数为指数衰减型时解析解与数值解的对比.其中细实线表示数值解,虚线为强非局域条件下的近似解(21)式,带三角的细线为亚强非局域条件下的解析解(22)式.同样我们得到指数衰减型响应下强非局域和亚强非局域条件下解析解失效时的 W_c 值分别为0.11和0.93.可以看出将(19)式展开到高阶可以得到更高的精度.

3.2. 与弱非局域条件下解析解的对比

在弱非局域条件下,响应函数的宽度远小于光束的束宽,我们可以在归一化系统下将光强展开^[8], (5)式可写为

$$i \frac{\partial U}{\partial Z} + \frac{1}{2} \nabla^2 U + U(|U|^2 + \xi \partial^2 U) = 0, \quad (23)$$

其中

$$\xi = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} R(X) X^2 dX. \quad (24)$$

对于弱非局域条件, $W_c \gg \xi$. 当 $R(X) = \delta(X)$ 时, $\xi = 0$, 此时(23)式退化为局域非线性薛定谔方程.

设 $u_0 = u(0)$ 表示振幅的最大值, $I = |u(X)|^2$ 表示光强,可以得到^[8]

$$P_c = \sqrt{I_0} + \frac{1 + 4\xi I_0}{\sqrt{4\xi}} \tan^{-1}(\sqrt{4\xi I_0}),$$

$$\pm X = \frac{1}{u_0} \tanh^{-1}\left(\frac{\sigma}{u_0}\right) + \sqrt{4\xi} \tan^{-1}(\sigma \sqrt{4\xi}), \quad (25)$$

式中 $\sigma = \sqrt{(I_0 - I)/(1 + 4\xi I)}$. 利用传播常数 μ 与振幅 u_0 的关系 $u_0^2 = 2\mu$, 得到临界功率关于传播常数的表达式为

$$P_c = \sqrt{2\mu} + \frac{1 + 8\xi\mu}{2\sqrt{\xi}} \tan^{-1}(\sqrt{8\xi\mu}). \quad (26)$$

已知在局域条件下孤子解的形状为双曲正割^[16], 因此我们可以合理地推断随着非局域程度的减小,孤子的波形将逐渐趋向双曲正割. 由此我们可以得到弱非局域情况下二阶矩临界宽度 W_c 为光束光强减小为 $1/e^2$ 处束宽的1.123倍, 得到临界束宽关于传播常数的表达式

$$W_c = \frac{1.123}{\sqrt{2\mu}} \tanh^{-1}\left(\sqrt{\frac{1 - 1/e^2}{1 + 8\xi\mu/e^2}}\right)$$

$$+ 2.246 \sqrt{\xi} \tan^{-1}\left(\sqrt{8\xi\mu} \sqrt{\frac{1 - 1/e^2}{1 + 8\xi\mu/e^2}}\right). \quad (27)$$

对不同的响应函数, ξ 有不同的取值. 对于高斯

型响应 $\xi_C = 0.25$; 对于指数衰减型响应 $\xi_E = 1$. 从 (26) 和 (27) 式得到弱非局域条件下临界功率与临界束宽在高斯响应和指数衰减响应时的关系分别如图 4 和图 5 中的点划线所示. 可以看出在 $W_c \gg 1$ 时, 满足弱非局域条件, 解析解和数值解完全符合. 当 W_c 变小时, 非局域程度加强, 弱非局域下的解析

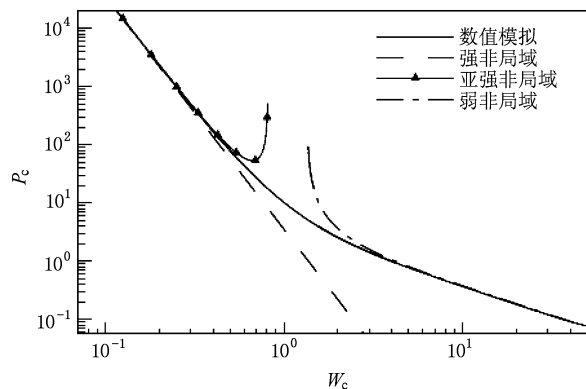


图 4 响应函数为高斯型时数值模拟结果与解析解的比较

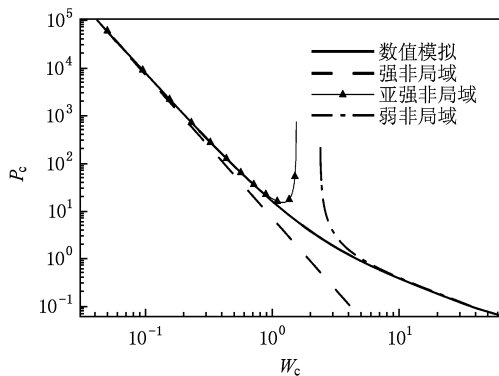


图 5 响应函数为指数衰减型时数值模拟结果与解析解的比较

解失效. 同样以 10% 作为误差限, 可以得到解析解失效时的 W_c 值在高斯响应和指数响应时分别为 3.15 和 4.86. 也就是说当光束宽度是响应函数宽度的 3—5 倍以上时, 弱非局域模型^[8] 可以给出相当精确的结果.

4. 结 论

本文通过光谱重置法, 精确快捷地计算出在非局域非线性介质中响应函数分别为高斯型和指数衰减型的情况下的空间光孤子, 得到了光孤子临界功率与临界束宽的关系. 随着空间光孤子临界束宽的增加, 即介质非局域程度越来越弱, 光孤子的临界功率会逐渐减小. 在强非局域条件下响应函数的形状对临界功率有很大的影响, 而弱非局域条件下响应函数的形状对临界功率影响很小. 在强非局域和弱非局域条件下得到的解析解, 只能局限于其非局域程度条件, 在非局域程度趋向于一般非局域时都会失效, 我们给出了其有效范围. 因此, 在还未找到一个统一的表达式来描述任意非局域程度条件下空间光孤子的特性时, 光谱重置法是研究空间孤子很好的工具, 在数值上完成了从强非局域到弱非局域的过渡.

光谱重置法除了讨论高斯型和指数衰减型响应函数, 对其他类型的响应函数也是适用的. 此外, 光谱重置法还能用于和非局域非线性薛定谔方程类似的玻色-爱因斯坦体系、流体力学等问题的研究.

- [1] Snyder A W, Mitcher D J 1997 *Science* **276** 1538
- [2] Stegeman G I, Segev M 1997 *Science* **286** 1518
- [3] Mitcher D J, Snyder A W 1999 *J. Opt. Soc. Am. B* **16** 236
- [4] Bang O, Królikowski W, Wyller J, Rasmussen J J 2002 *Phys. Rev. E* **66** 046619
- [5] Hu W, Zhang T, Guo Q 2006 *Appl. Phys. Lett.* **89** 071111
- [6] Guo Q, Luo B R, Yi F H, Chi S E, Xie Y Q 2004 *Phys. Rev. E* **69** 016602
- [7] Guo Q, Luo B, Chi S 2006 *Opt. Commun.* **259** 336
- [8] Królikowski W, Bang O 2000 *Phys. Rev. E* **63** 016610
- [9] Ablowitz M J, Musslimani Z H 2005 *Opt. Lett.* **30** 2140
- [10] Xu C B, Guo Q 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 3025 (in Chinese) [许超彬, 郭 旗 2004 物理学报 **53** 3025]
- [11] Cao J N, Guo Q 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 3688 (in Chinese) [曹觉能, 郭 旗 2005 物理学报 **54** 3688]
- [12] Zhang X P, Guo Q, Hu W 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 5189 (in Chinese) [张霞萍, 郭 旗, 胡 巍 2005 物理学报 **54** 5189]
- [13] Gao X C, Hu W, Zhang T, Guo Q, Wang X A, Long X W 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 2237 (in Chinese) [高喜存, 胡 巍, 张涛, 郭 旗, 王新爱, 龙学文 2007 物理学报 **56** 2237]
- [14] Bai D F, Guo Q, Hu W 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 5684 (in Chinese) [白东峰, 郭 旗, 胡 巍 2008 物理学报 **57** 5684]
- [15] Cao L G, Lu D Q, Hu W 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 6365 (in Chinese) [曹龙贵, 陆大全, 胡 巍 2008 物理学报 **57** 6365]
- [16] Agrawal G P 2005 *Nonlinear Fiber Optics* (New York: Academic Press) p142

Applications of spectral renormalization method to the research of nonlocal optical spatial soliton^{*}

Zheng Rui¹⁾ Gao Xing-Hui¹⁾²⁾ Cao Wei-Wen¹⁾ Chen Li-Xia¹⁾ Lu Da-Quan¹⁾
Guo Qi¹⁾ Wu Li-Jun¹⁾ Hu Wei^{1)†}

1) (*Key Laboratory of Photonic Information Technology of Guangdong Province, South China Normal University, Guangzhou 510006, China*)

2) (*College of Mechanical and Electric Engineering, Guangzhou University, Guangzhou 510006, China*)

(Received 4 May 2009; revised manuscript received 26 May 2009)

Abstract

We use spectral renormalization method to solve the nonlocal nonlinear Schrödinger equation, which gives accurate waveform of nonlocal optical spatial soliton. The relation between critical power and critical beamwidth is acquired in different nonlocal conditions. We discovered that optical spatial soliton exists stably in any nonlocal degree. Comparing analytic solution with numerical solution for different response functions, we find that they are consistent only under strong nonlocal and weak nonlocal conditions. The effective range of analytic solution is also given.

Keywords: spectral renormalization method, nonlocal optical spatial soliton, critical power, critical beamwidth

PACC: 4265S

^{*} Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 10804033, 10674050), the Program for Innovative Research Team of High Education in Guangdong Province, China (Grant No. 06CXTD005), and the Specialized Research Fund for the Doctoral Program of Higher Education of China (Grant No. 200805740002).

[†] Corresponding author. E-mail: huwei@scnu.edu.cn