

强非局域非线性介质中的二维库墨-高斯孤子簇^{*}

徐四六¹⁾²⁾ 刘会平¹⁾ 易 林^{1)†}

1) (华中科技大学物理学院, 武汉 430074)

2) (咸宁学院物理系, 咸宁 437100)

(2009 年 4 月 21 日收到; 2009 年 5 月 13 日收到修改稿)

利用自相似技术求解一个在强非局域非线性条件下的 $(2+1)$ 维非线性薛定谔方程, 得到一个精确的库墨-高斯解析解, 数值模拟与解析解的一致性表明, 这种库墨-高斯孤子形成了一类空间孤子簇. 发现这种非局域孤子具有较大的相移.

关键词: 空间光孤子, 自相似技术, 强非局域非线性

PACC: 4265S, 0200, 4270D

1. 引 言

1997 年 Snyder 和 Mitchell^[1] 提出强非局域非线性均匀介质中空间孤子传输的线性模型, 并预言在此介质中存在稳定的孤子解, 从而引发了新一轮空间光孤子的研究热潮^[2-14]. 随后通过理论预测和实验探索, Peccianti 等^[15,16] 证明了向列液晶是强非局域介质. 不久液晶中的孤子和呼吸子解被求出, 在实验中也观察到它们的相关传输现象^[17,18]. 特别是近年来, 一系列由特殊函数组成的孤子群相继被找到, 将这一领域的研究推向新的高度: 如郭旗等^[3] 在强非局域介质中发现了孤子的大相移现象, 找到了拉盖尔-高斯孤子和呼吸子解^[19]; Zhong 等^[20,21] 研究了二维和三维强非局域介质中孤子的传输规律, 得到了以自相似的方式传输的拉盖尔-高斯孤子簇和三维由惠特克 (Whittaker) 函数和厄米特-高斯 (Hermite-Gauss) 函数组成的孤子群.

本文基于 $(1+2)$ 非线性薛定谔方程 (NNLSE) 模型, 首先将高斯响应函数在强非局域程度条件下进行展开, 得到了在强非局域条件下光束在非线性介质中的传输方程. 采用自相似技术, 获得了一个精确的库墨-高斯解析解. 数值模拟与解析解的一致性表明, 这种库墨-高斯孤子形成了一类空间孤子簇. 我们发现沿着孤子的传输方向, 相对于局域孤

子, 库墨-高斯孤子有较大的相位, 其与传输距离具有线性递增的关系.

2. 非局域非线性薛定谔方程

在非局域非线性介质中, 沿 z 方向传输的光束的演化, 可以用推广的 $(2+1)$ 维非线性薛定谔方程模型来描述, 其一般表达式可以写成^[14-16]

$$2ikn_0\partial_z E(\mathbf{r}, z) + n_0\nabla_{\perp}^2 E(\mathbf{r}, z) + 2k^2\Delta n(I, z)E(\mathbf{r}, z) = 0, \quad (1)$$

式中 $E(\mathbf{r}, z)$ 是光束波包, $k = \omega n_0 / c$, 其中 k 是光波在介质中的波数, n_0 是材料的线性折射率, $\Delta n = n_2 \int R(\mathbf{r} - \mathbf{r}') |E(\mathbf{r}', z)|^2 d^2\mathbf{r}'$ 是折射率的改变, n_2 是非线性折射率系数, $\nabla_{\perp}^2$ 是横向拉普拉斯算符, 光强 $I = |E(\mathbf{r}, z)|^2$. $R(\mathbf{r})$ 是介质的响应函数, 一般为对称的实函数, 它满足归一化条件 $\int R(\mathbf{r}) d^2\mathbf{r} = 1$. 本文中, 我们假设介质是自聚焦的, 并且其响应函数为高斯型, 响应函数 $R(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \frac{1}{\pi w_m^2} e^{-\frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2}{w_m^2}}$, 其中参数 w_m 表示介质非局域度. 对于强非局域介质, 介质的响应函数的宽度远大于光束的宽度, 通过泰勒展开 $R(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ 函数对 $\mathbf{r}'$ 在 $\mathbf{r}' = \mathbf{r}$ 点, 得到

$$R(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = R_0 + (\mathbf{r} - \mathbf{r}') \cdot \nabla_{\perp} R_0$$

^{*} 国家重点基础研究发展计划 (批准号: 2006CB921605) 资助的课题.

[†] 通讯联系人. E-mail: hust316@163.com

$$+ \frac{1}{2} [(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \cdot \nabla_{\perp}]^2 R_0 + \dots, \quad (2)$$

式中 $R_0 = R(\mathbf{r}')|_{r'=0}$, $R''_0 = -\frac{\partial^2 R(\mathbf{r}')}{\partial r'^2} \Big|_{r'=0}$. 考虑高斯函数关于 $r = r'$ 的对称性, 展开式的第二项可以消去. 由于在强非局域条件下, 光束在传输过程中, 其满足方程解的中心位置局域在 $\mathbf{r} - \mathbf{r}' = 0$, 因此高阶项相对很小, 可以不计. (2) 式保留到二次项, 得到 $\Delta n = \frac{P_0}{\pi w_m^2} \left(1 - \frac{r^2}{w_m^2}\right)$, 其中 $P_0 = \iint |E(\mathbf{r}, z)|^2 d\mathbf{r}$ 是光束的初始功率, 并将 Δn 代入 (1) 式并进行转换 $E(r, z) = \psi(r, z) \exp(ikP_0 z / n_0 \pi w_m^2)$, 则 (1) 式可以简化成强非局域非线性介质中归一化形式的非线性薛定谔方程

$$i \frac{\partial \psi}{\partial z} + \beta \nabla_{\perp}^2 \psi - \gamma r^2 \psi = 0, \quad (3)$$

$$\text{式中 } r = \sqrt{x^2 + y^2}, \beta = \frac{1}{2k}, \gamma = \frac{P_0}{2\pi k n_0 w_m^4}.$$

3. 自相似孤子解

根据文献[19,20], 定义复场为 $\psi(z, r, \varphi) = A(z, r, \varphi) e^{iB(z, r)}$, 这里 $A(z, r, \varphi)$ 和 $B(z, r)$ 是实函数. 在极坐标系中, 横向拉普拉斯算符是 $\nabla_{\perp}^2 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$. 将 $\psi(z, r, \varphi)$ 代入 (2) 式, 并要求实部与虚部分别为零, 我们可以得到如下两个耦合的方程:

$$\frac{\partial A}{\partial z} + \frac{\beta}{2} \left(2 \frac{\partial A}{\partial r} \frac{\partial B}{\partial r} + A \frac{\partial^2 B}{\partial r^2} + \frac{A}{r} \frac{\partial B}{\partial r} \right) = 0, \quad (4)$$

$$-A \frac{\partial B}{\partial z} + \frac{\beta}{2} \left[\frac{\partial^2 A}{\partial r^2} - A \left(\frac{\partial B}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r} \frac{\partial A}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 A}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial z^2} \right] - \gamma r^2 A = 0. \quad (5)$$

为了寻求 (4) 和 (5) 式的自相似解, 我们假设振幅

$$A(r, \varphi, z) = \frac{\mu P_0 \Phi(\varphi)}{w(z)} F(\theta), \quad (6)$$

和相位

$$B(r, z) = c(z) r^2 + a(z), \quad (7)$$

式中 μ 是归一化常数, $w(z)$ 是光束的束宽, $\theta(z, r)$ 是自相似变量, $a(z)$ 是相移, $c(z)$ 代表波前曲率, 它们都是传输距离 z 的函数. 把 (6) 和 (7) 式代入 (4) 式, 展开成 r 的多项式并令其系数为零, 可以得到

$$\theta(z, r) = \frac{r}{w(z)}, \quad a(z) = \frac{1}{2w} \frac{dw(z)}{dz}, \quad (8)$$

将 (6) — (8) 式代入 (5) 式, 利用转换 $\zeta = \lambda \theta^2$ 和 $F = e^{-\frac{\lambda \theta^2}{2}} \theta^m \Psi$, 我们得到

$$-\frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} = m^2, \quad (9)$$

$$-\frac{w^3}{2\beta} \frac{d^2 w}{dz^2} - \gamma w^4 = -\frac{\beta \lambda^2}{2}, \quad (10)$$

$$-\frac{w^2}{\lambda \beta} \frac{dc}{dz} - \frac{m+1}{2} = n, \quad (11)$$

$$\zeta \frac{d^2 \Psi}{d\zeta^2} + (m+1-\zeta) \frac{d\Psi}{d\zeta} + n\Psi = 0, \quad (12)$$

式中 $m = n = 0, 1, 2, \dots$, 分别是描述光束角向分布和径向分布而引入的两个物理参量, λ 是非零的参数. (12) 式是库墨微分方程, 它的解是连带库墨多项式

$$F'(-n, m+1, \lambda \theta^2) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{n!}{k!(n-k)!} \times \frac{1}{(m+1)_k} (\lambda \theta^2)^k \quad (m=0, 1, 2, \dots).$$

因此我们可得 $F(\theta) = e^{-\frac{\lambda \theta^2}{2}} \theta^m F'(-n, m+1, \lambda \theta^2)$. 由 (9) 式得到, $\Phi = \cos(m\varphi) + i q \sin(m\varphi)$, 其中 q ($0 \leq q \leq 1$) 是描述光强调制深度而引入的一个物理量. 当 $q \rightarrow 1$, Φ 具有径向对称性; 对 $q \rightarrow 0$, Φ 描述介质中的多极孤子^[21]. 假定初始条件 $w/w_0|_{z=0} = 1$

和 $\frac{dw}{w_0 dz} \Big|_{z=0} = 0$, 对 (10) 式积分可以得到

$$w^2 = w_0^2 [\cos^2(2\sqrt{\beta\gamma}z) + \lambda_1 \sin^2(2\sqrt{\beta\gamma}z)], \quad (13)$$

式中 $\lambda_1 = \lambda / \sqrt{2\beta\gamma} w_0^2$, 因此脉冲宽度由 γ, β 和 w_0 决定. 由 (8), (11) 和 (13) 式, 可以得到如下相位 $a(z)$ 和波前曲率 $c(z)$:

$$a(z) = a_0 + \frac{2n+m+1}{\sqrt{\beta}\lambda} \arctan \left[\frac{\lambda}{2\gamma\beta w_0^2} \tan(2\sqrt{\beta\gamma}z) \right], \quad (14)$$

$$c(z) = \frac{\sqrt{s}}{8\beta} \frac{(-1+\lambda_1) \sin(2\sqrt{\beta\gamma}z)}{\cos^2(2\sqrt{\beta\gamma}z) + \lambda_1 \sin^2(2\sqrt{\beta\gamma}z)}. \quad (15)$$

因此精确的自相似孤立波解可以表示为

$$\psi(r, \varphi, z) = \frac{\mu P_0}{w} [\cos(m\varphi) + i q \sin(m\varphi)] \left(\frac{r}{w} \right)^m \times e^{-\frac{\lambda r^2}{2w^2} - i(a(z) + c(z)r^2)} F'(-n, m+1, \lambda \theta^2), \quad (16)$$

特别地, 当 $\lambda_1 = 1$ 时, 得到 $w(z) = w_0$, 波前曲率 $c(z) = 0$ 和相位

$$a(z) = a_0 + \frac{2n + m + 1}{\sqrt{\beta}w_0^2}z. \tag{17}$$

注意到在(16)式中,孤立波光束由库墨多项式参数 (n,m) 、材料参数 γ 、角分布、脉宽、功率决定. 光束能量可以通过库墨多项式 $F'(-n,m+1,\lambda\theta^2)$ 的正交关系 $E = \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(z,r,\varphi)|^2 \mathrm{d}r \mathrm{d}\varphi = P_0^2(1+q^2) \leqslant 2P_0^2$ 计算. 因此这种光束孤子的能量一般小于 sech 孤子的能量,与描述库墨-高斯孤子的二个参数 (n,m) 无关. 由于(2)式是线性方程,光束传输比较稳定^[22–24].

4. 数值分析

为了验证解析解(14)式的有效性,我们对(1)式采用分步傅里叶算法进行数值仿真. 此时我们取响应函数 $R(\mathbf{r}-\mathbf{r}') = \frac{1}{\pi w_m^2} e^{-\frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^2}{w_m^2}}$, 初始的光强 $\psi_{21}(r,\varphi,0) = \frac{\mu P_0}{w_0} \cos(2\varphi) \left(\frac{r}{w_0}\right)^2 e^{-\frac{r^2}{2w_0^2} - i(ar^2 + c)} F'(-1, 3, \lambda\theta^2)$, 相应的参数选择 $w_m = 12, \mu = \lambda = P_0 = w_0 = a_0 = c_0 = 1, q = 0$.

由于 $\lambda_1 = \lambda/2\gamma w_0^4, \gamma = \frac{P_0}{2\pi k n_0 w_m^4}$, 因此可以得

到 $\lambda_1 = \frac{\pi n_0 k \lambda w_m}{P_0 w_0^4}$. 由此看到光波传输的性质决定于输入光的功率、宽度以及非线性非局域度. 通过调制这些参数就可以控制孤子的传输性质.

4.1. 库墨-高斯呼吸子的传输特征

图1—图3分别是孤子 KG_{mn} (此时 $m = 2, n = 1$) 光束在不同 λ_1 参数条件下,解析解与数值模拟的比较. 从这3个图中可以看出,当 $\lambda_1 > 1$ 时,光束在该种介质中传输,随着传输距离的增加4个斑点间的间距增加,光束展宽,光强减弱;相反,当 $\lambda_1 < 1$ 时,光束被压缩,光强增强,而斑点的个数($m \times 2 = 4$)保持不变. 虽然这里我们仅仅展示了一个周期内的演化规律,但是这种周期性光斑收缩扩展的演化规律将不断重复. 正因为孤立波的这种奇异的传输特征,我们称之为“库墨-高斯呼吸子”. 从图中可以看出,解析解与数值模拟符合得很好,墨库-高斯呼吸子的传输是稳定的,对于其他的初始值,能够得到相同的结论.

4.2. 墨库-高斯孤子的传输特征

当 $\lambda_1 = 1$ 时,得到 $w(z) = w_0$,衍射刚好与非线性抵消^[20]. 这种情况下, KG_{mn} 光束的脉宽保持不变. 由(16)式描述的这种空间孤子由两个参数 n 和

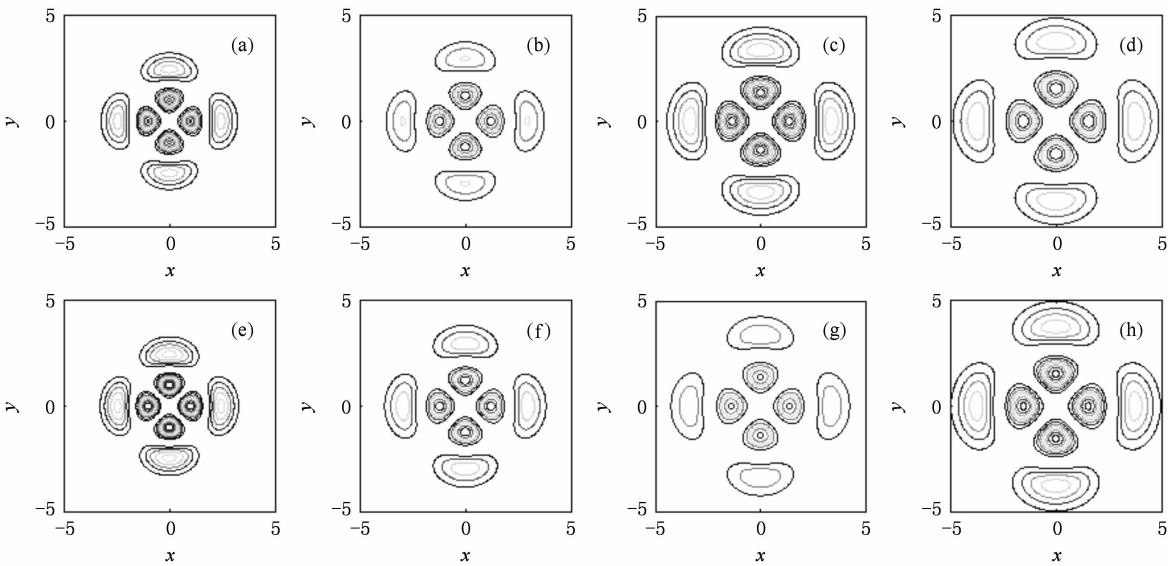


图1 解析解 KG_{21} ((16)式)与数值模拟((1)式)的光强在 x - y 平面上的轮廓分布比较 参数 $w_m = 12, \mu = \lambda = P_0 = w_0 = 1, q = 0, \lambda_1 = 2.8$. (a),(b),(c),(d)为解析解;(e),(f),(g),(h)为相应的数值解;(a)和(e),(b)和(f),(c)和(g),(d)和(h)的传输距离分别为 $\sqrt{2\beta\gamma}z = 0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}$

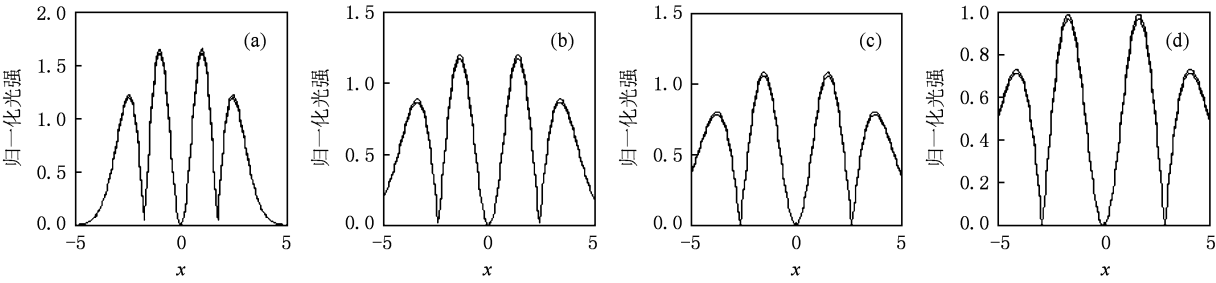


图2 解析解 KG_{21} ((16)式)与数值模拟((1)式)在 x 方向上的归一化的光强分布比较 点线代表解析解,虚线代表数值解,其他参数同图

1. (a),(b),(c),(d)的传输距离分别为 $\sqrt{2\beta\gamma z}=0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}$

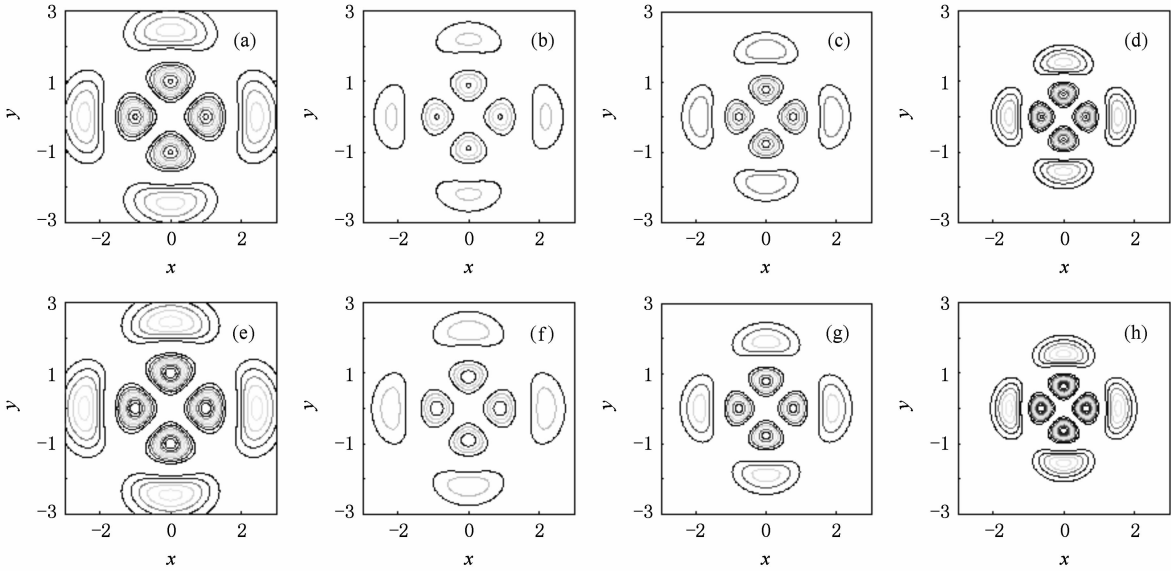


图3 解析解 KG_{21} ((16)式)与数值模拟((1)式)的光强在 $x-y$ 平面上的轮廓分布比较 参数 $\lambda_1=0.2$,其他参数同图1. (a),(b),(c),(d)为解析

解;(e),(f),(g),(h)为相应的数值解;(a)和(e), (b)和(f), (c)和(g), (d)和(h)的传输距离分别为 $\sqrt{2\beta\gamma z}=0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}$

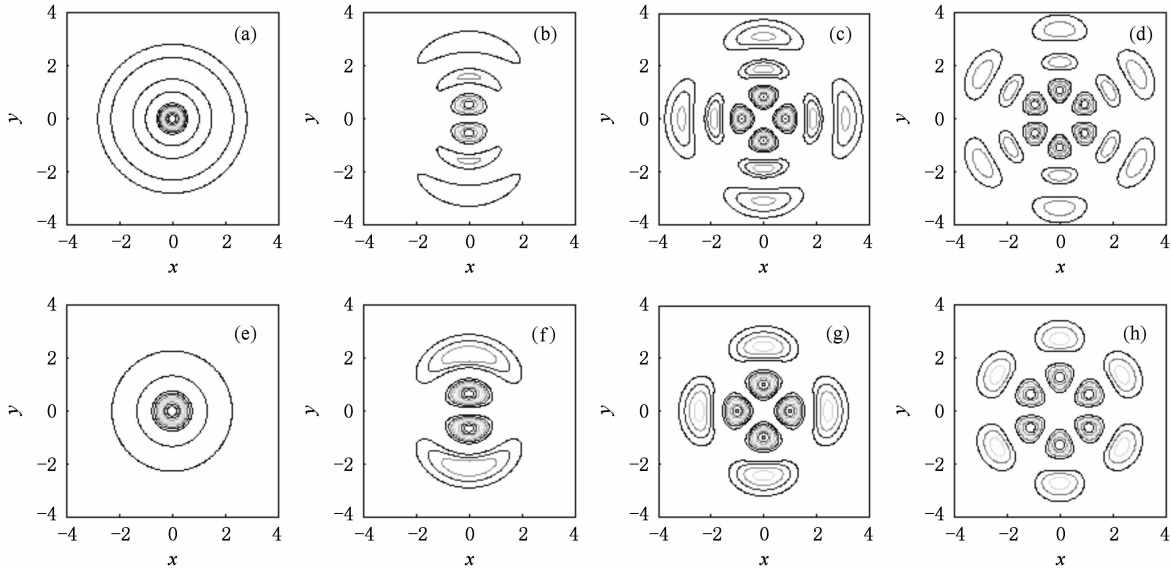


图4 孤子 KG_{mn} 的强度在 $x-y$ 平面上的轮廓分布 $q=0$,其他参数同图1. (a) $KG_{02}, n=2$; (b) $KG_{12}, n=2$; (c) $KG_{22}, n=2$; (d) $KG_{32}, n=2$; (e) $KG_{01}, n=1$; (f) $KG_{11}, n=1$; (g) $KG_{21}, n=1$; (h) $KG_{31}, n=1$

m 决定. 对于固定的 n 和不同的 m (或固定的 m 和不同的 n), KG_{mn} 空间孤子形成一族孤子群, 它们有如下一些共同的性质 (见图 4): 1) 光强分布呈现多层的明暗相间破缺的环形光斑, 随着半径的增加, 光斑的强度逐渐下降; 2) 孤子群的层数决定于量子数 n , 形成 $n+1$ 个层, 每层光斑的个数取决于量子数为 m , 个数为 $2m$; 3) 当 m 足够大时, 斑点形成项链^[20], 并且项链环中能清晰地看到明环的圈数较少; 4) 当 $m=0$ 时光强的最大值位于传输中心轴上, 形成高斯孤子. 在强非局域条件下, 当 $m=0$ 时介质在对称性外场作用下, 对介质进

行对称性极化, 使得介质中的光场和强度分布显然与角分布无关^[24-26].

当 $q=1$ 时, 形成环状孤子. 由图 5 可以清晰地看到孤子由一系列的明暗相间的光环组成, 它们有共同的中心. 当 $m \neq 0$ 时, 环心的光强为零; 反之, 当 $m=0$ 时, 光强的最大值在圆心. 光强的径向分布规律如同图 4. 这种现象的物理来源于非局域. 非局域非线性意味着介质的极化不仅与该区域的电场有关, 而且与介质的周边区域的电场也有关^[22-24]. 由于周边电场的影响, 导致光场的衰减.

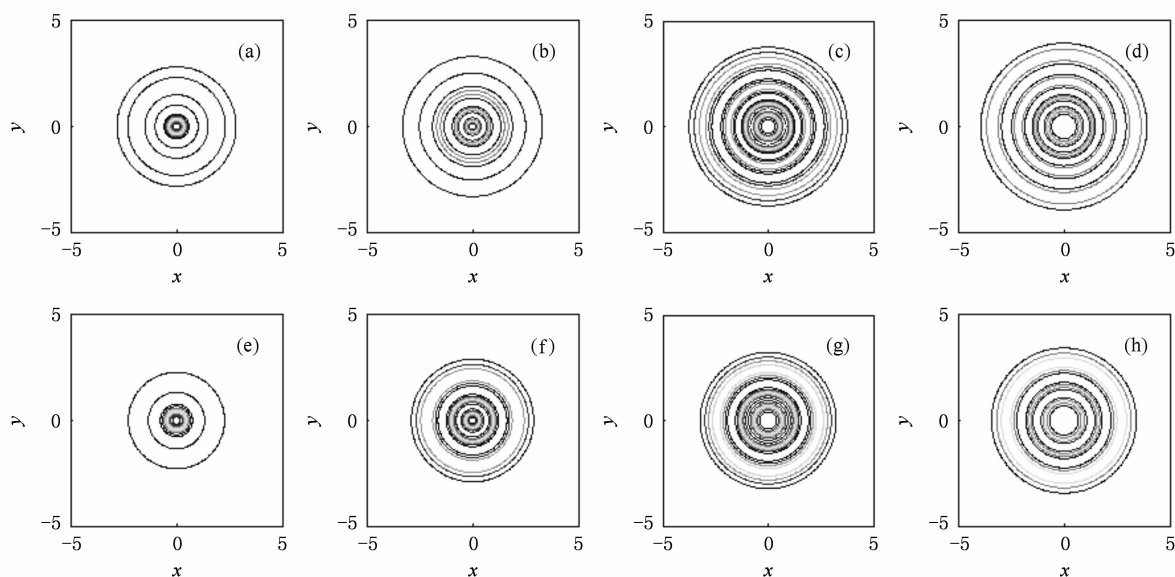


图 5 孤子 KG_{mn} 的强度在 x - y 平面上的轮廓分布 $q=1$, 其他参数同图 4. (a) KG_{02} , $n=2$; (b) KG_{12} , $n=2$; (c) KG_{22} , $n=2$; (d) KG_{32} , $n=2$; (e) KG_{01} , $n=1$; (f) KG_{11} , $n=1$; (g) KG_{21} , $n=1$; (h) KG_{31} , $n=1$

尽管调制深度 q 的不同影响孤子的性质, 形成涡旋孤子或多极孤子; 然而由 (17) 式知, 孤子沿传输方向的相位性质决定于脉冲的初始宽度 w_0 , 量子数 m, n , 以及与波数相关的参数 β , 与 q 无关. 相位随传输距离 z 线性增加.

5. 结 论

我们在极坐标求解了强非局域 $(2+1)$ 维非线性薛定谔方程. 分析发现, 存在一群以自相似的方式传输的库墨-高斯孤子簇. 通过数值模拟验证这些自相似波, 结果表明它们是稳定的空间孤子群.

- [1] Snyder A W, Mitchell D J 1997 *Science* **276** 1538
- [2] Snyder A W, Kivshar Y 1997 *J. Opt. Soc. Am. B* **11** 3025
- [3] Guo Q, Luo B, Yi F, Chi S, Xie Y 2004 *Phys. Rev. E* **69** 016602
- [4] Shen Y R 1997 *Science* **276** 1520
- [5] Krolkowski W, Bang O 2001 *Phys. Rev. E* **63** 016610
- [6] Qin X J, Guo Q 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 1237 (in Chinese)
[秦晓娟、郭旗 2006 物理学报 **55** 1237]
- [7] Ouyang S G, Guo Q, Hu W 2006 *Phys. Rev. E* **74** 036622
- [8] Parola A, Salasnich L, Reatto L 1998 *Phys. Rev. A* **57** (R)3180
- [9] Li H M 2008 *Chin. Phys. B* **17** 759
- [10] Dong L W, Yang X Y, Chen H Y 2008 *Chin. Phys. B* **17** 988
- [11] Yang H, Tang Y 2008 *Chin. Phys. B* **17** 1008
- [12] Cao L G, Lu D Q, Hu W, Yang P B, Zhu Y Q, Guo Q 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 6365 (in Chinese) [曹龙贵、陆大全、胡巍、杨平保、朱叶青、郭旗 2008 物理学报 **57** 6365]

- [13] Long X W, Hu W, Zhang T, Guo Q, Lan S, Gao X C 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 1397 (in Chinese) [龙学文、胡 巍、张涛、郭 旗、兰 胜、高喜存 2007 物理学报 **56** 1397]
- [14] Xu C B, Guo Q 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 5194 (in Chinese) [许超彬、郭 旗 2005 物理学报 **54** 5194]
- [15] Peccianti M, Brzdakiewicz K A, Assanto G 2002 *Opt. Lett.* **27** 1460
- [16] Conti C, Peccianti M, Assanto G 2004 *Phys. Rev. Lett.* **91** 073901
- [17] Peccianti M, Rossi A D, Assanto G 2002 *Appl. Phys. Lett.* **77** 7
- [18] Conti C, Peccianti M, Assanto G 2004 *Phys. Rev. Lett.* **92** 113902
- [19] Deng D M, Guo Q 2008 *J. Opt. A: Pure Appl. Opt.* **10** 035101
- [20] Zhong W P, Yi L 2007 *Phys. Rev. A* **75** 061801 (R)
- [21] Zhong W P, Yi L, Xie R H, Beli'e M, Chen G 2008 *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.* **41** 025402
- [22] Cohen O, Buljan H, Schwartz T, Fleischer J W, Segev M 2006 *Phys. Rev. E* **73** 015601
- [23] Krolikowski W, Bang O, Rasmussen J J, Wyller J 2001 *Phys. Rev. E* **64** 016612
- [24] Mitchell D J, Snyder A W 1999 *J. Opt. Soc. Am. B* **16** 236
- [25] Bang O, Krolikowski W, Wyller J, Rasmussen J J 2002 *Phys. Rev. E* **66** 046619
- [26] Buccoliero D, Desyatnikov A S, Krolikowski W, Kivshar Y S 2007 *Phys. Rev. Lett.* **98** 053901

Two-dimensional Kummer-Gaussian soliton clusters in strongly nonlocal nonlinear media *

Xu Si-Liu¹⁾²⁾ Liu Hui-Ping¹⁾ Yi Lin^{1)†}

1) (School of Physics, Huazhong University of Science and Technology, Wuhan 430074, China)

2) (Department of Physics, Xianning College, Xianning 437100, China)

(Received 21 April 2009; revised manuscript received 13 May 2009)

Abstract

We solve the two-dimensional strongly nonlocal nonlinear Schrödinger equation in polar coordinates. An exact analytical solution of self-similar waves, namely Kummer-Gaussian soliton clusters, is obtained. Numerical simulations confirm the validity of the analytical solutions. It is shown that the nonlocal optical spacial solitons have large phase shift.

Keywords: optical spatial solitons, self-similar technology, strongly nonlocal nonlinearity

PACC: 4265S, 0200, 4270D

* Project supported by the National Basic Research Program of China (Grant No. 2006CB921605).

† Corresponding author. E-mail: hust316@163.com