

# $(G'/G)$ 展开法与高维非线性物理方程的新分形结构\*

李帮庆 马玉兰<sup>†</sup> 徐美萍

(北京工商大学计算机与信息工程学院, 北京 100048)

(2009 年 5 月 25 日收到; 2009 年 6 月 26 日收到修改稿)

将  $(G'/G)$  展开法扩展到研究高维非线性物理方程的非行波解和分形结构. 以  $(2+1)$  维变系数色散长波系统为例, 构造出该系统的非行波解, 对解中的任意函数进行适当的设置, 发现了一类新的分形结构, 即十字形分形结构.

**关键词:**  $(G'/G)$  展开法,  $(2+1)$  维变系数色散长波系统, 非行波解, 十字形分形结构

**PACC:** 0230, 0340, 0290

## 1. 引 言

许多非线性物理现象可用非线性数学物理方程来描述. 近些年, 对非线性数学物理方程的研究不断有新的突破, 尤其是不少行之有效的求解方法被开发出来, 如齐次平衡法<sup>[1-3]</sup>, Jacobi 椭圆函数展开法<sup>[4-6]</sup>,  $F$ -展开法<sup>[7-10]</sup>, 辅助方程法<sup>[11-14]</sup>, 分离变量法<sup>[15-18]</sup>, Riccati 函数法<sup>[19-21]</sup>, 扩展的 Riccati 映射法<sup>[22-24]</sup>等.

局域结构激发是非线性科学中一项重要研究内容<sup>[15-18, 25-31]</sup>. 如果非线性物理方程的解中含有相关独立变量的任意函数, 通过对任意函数的适当选取, 能够激发丰富的局域结构, 而这些局域结构可以解释某些非线性物理现象<sup>[32]</sup>. 研究局域激发的主要方法有分离变量法和扩展的 Riccati 映射法等. 分形是一种典型的非线性现象, 但是, 相对于其他局域结构激发, 有关分形结构激发的方法比较少, 研究也不够深入. 已有的局域分形结构激发主要是通过指数函数和 Jacobi 函数或正弦函数组合而得到<sup>[33-37]</sup>. 发现新分形结构是非常困难但又重要的任务.

新近, 基于齐次平衡原则和常微分方程理论, Wang 等提出了  $(G'/G)$  展开法<sup>[38]</sup>. 该方法简洁高效, 已经成为非线性数学物理方程的一类新求解方

法<sup>[39-42]</sup>. 我们对  $(G'/G)$  展开法中的线性行波变换扩展为任意函数的非线性变换, 并构造出非线性  $(3+1)$  维 Burgers 系统的非行波解列<sup>[43]</sup>. 由于应用扩展的  $(G'/G)$  展开法获得的非行波解中含有独立变量的任意函数, 从而成为研究局域结构激发的有力工具, 并且可将孤子、混沌与分形等非线性现象融合在一个系统中进行研究.

本文将  $(G'/G)$  展开法扩展到构造非线性  $(2+1)$  维变系数色散长波系统的三种非行波解列, 即双曲函数解, 三角函数解和有理函数解. 每种解中均含有任意函数. 通过对双曲函数解中的任意函数进行适当的设置, 发现了该系统的一类新的分形结构, 即十字形分形结构.

考虑如下  $(2+1)$  维变系数色散长波系统:

$$u_{ty} = -B(t)[v_{xx} + (uu_x)_y], \quad (1)$$

$$v_t = -B(t)[(uv)_x + u_x + \beta^2 u_{xy}], \quad (2)$$

其中  $u = u(x, y, t)$ ,  $v = v(x, y, t)$  为系统的相应物理场,  $B(t)$  为时间函数系数,  $\beta$  为参数. 该系统是描述水波通过等深、狭长理想水道运动的重要模型. 当  $B(t) = 1$ ,  $x = y$  且  $\beta^2 = 1$  时, 该系统约化为经典的 Boussinesq 方程. 当  $B(t) = 1$  且  $\beta^2 = 1$  时, 该系统约化为通常的色散长波系统, 它是由 Boiti 等在研究弱 Lax 对的相容条件时首先得到的<sup>[43]</sup>. 文献<sup>[44-48]</sup>讨论了通常的色散长波系统的部分精确解.

\* 北京市教委科技发展计划面上项目(批准号: KM201010011008)和北京市优秀骨干教师项目(批准号: PXM2007-014213-044566)资助的课题.

<sup>†</sup> 通讯联系人. E-mail: mayl@th. btbu. edu. cn

## 2. 扩展的 $(G'/G)$ 展开法与系统 (1), (2) 的非行波解

本节我们首先简要介绍扩展的  $(G'/G)$  展开法. 对于一个  $(2+1)$  维含独立变量  $x, y, t$  的非线性系统

$$F(u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{yy}, u_{xt}, u_{yt}, u_{xy}, u_{xx}, u_{yy}, \dots) = 0, \quad (3)$$

$(G'/G)$  展开法的主要思想是假设方程 (3) 的解可表示为如下含  $(G'/G)$  的一个代数多项式:

$$u = \sum_{i=0}^n a_i \left[ \frac{G'(q)}{G(q)} \right]^i, \quad (4)$$

其中  $G' = \frac{dG(q)}{dq}$ ,  $G'' = \frac{d^2G(q)}{dq^2}$ ,  $q = sx + ly - Vt$  为行波变换,  $s, l, V, a_i (i = 0, 1, 2, \dots, n)$  为常数,  $G = G(q)$  满足二阶线性常微分方程

$$G'' + \lambda G' + \mu G = 0. \quad (5)$$

将拟解 (4) 代入到原方程 (3), 应用齐次平衡法可求得方程 (3) 的行波解.

将  $(G'/G)$  展开法扩展到构造高维非线性方程的非行波解的方法是: 将原来的行波变换  $q = sx + ly - Vt$  扩展为任意函数  $q = q(x, y, t)$  变换, 而行波变换  $q = sx + ly - Vt$  仅为这个任意函数的特例. 当  $q$  为任意函数时得到的解称为非行波解.

下面我们求  $(2+1)$  维变系数色散长波系统 (1), (2) 的非行波解. 假设系统 (1), (2) 有如下形式的解:

$$u = \sum_{i=0}^m a_i \left[ \frac{G'(q)}{G(q)} \right]^i, \quad (6)$$

$$v = \sum_{j=0}^n b_j \left[ \frac{G'(q)}{G(q)} \right]^j, \quad (7)$$

其中  $a_i (i = 0, 1, 2, \dots, m)$ ,  $b_j (j = 0, 1, 2, \dots, n)$  均为含变量  $x, y, t$  的待定函数,  $q = q(x, y, t)$  为  $x, y, t$  的函数,  $G(q)$  满足方程 (5).

对 (1) 和 (2) 式分别应用齐次平衡原则<sup>[1]</sup>, 可得

$$m + 3 = m + n + 1, \quad (8)$$

$$(m + m + 1) + 1 = \max\{n + 2, m + 2\} \\ = \max\{4, m + 2\}. \quad (9)$$

求解 (8) 和 (9) 式易得  $m = 1, n = 2$ . 因此 (6) 和 (7) 式可分别写为

$$u = a_0 + a_1 \left( \frac{G'(q)}{G(q)} \right), \quad (10)$$

$$v = b_0 + b_1 \left( \frac{G'(q)}{G(q)} \right) + b_2 \left( \frac{G'(q)}{G(q)} \right)^2. \quad (11)$$

本文寻求系统 (1), (2) 形如 (10), (11) 的解, 其中  $q(x, y, t) = f(x, t) + g(y)$ . 注意到方程 (5), 因此

$$\left( \frac{G'}{G} \right)' = \frac{GG'' - G'^2}{G^2} = -\mu - \lambda \left( \frac{G'}{G} \right) - \left( \frac{G'}{G} \right)^2. \quad (12)$$

对 (10) 和 (11) 式求相应变量的偏导数, 并注意到 (12) 式, 我们得到

$$u_x = (a_{0x} - \mu a_{1f_x}) + (a_{1x} - \lambda a_{1f_x}) \left( \frac{G'}{G} \right) \\ - a_{1f_x} \left( \frac{G'}{G} \right)^2, \quad (13)$$

$$v_t = (b_{0t} - \mu b_{1f_t}) + (b_{1t} - \lambda b_{1f_t} - 2\mu b_{2f_t}) \left( \frac{G'}{G} \right) \\ + (b_{2t} - b_{1f_t} - 2\lambda b_{2f_t}) \left( \frac{G'}{G} \right)^2 \\ - 2b_{2f_t} \left( \frac{G'}{G} \right)^3, \quad (14)$$

$$(uv)_x = [(a_0 b_0)_x - \mu f_x (a_0 b_1 + a_1 b_0)] \\ + [(a_0 b_1 + a_1 b_0)_x - \lambda f_x (a_0 b_1 + a_1 b_0) \\ - 2\mu f_x (a_0 b_2 + a_1 b_1)] \left( \frac{G'}{G} \right) \\ + [(a_0 b_2 + a_1 b_1)_x - f_x (a_0 b_1 + a_1 b_0) \\ - 2\lambda f_x (a_0 b_2 + a_1 b_1) - 3\mu f_x a_1 b_2] \left( \frac{G'}{G} \right)^2 \\ + [(a_1 b_2)_x - 2f_x (a_0 b_2 + a_1 b_1) \\ - 3\lambda f_x a_1 b_2] \left( \frac{G'}{G} \right)^3 \\ - 3f_x a_1 b_2 \left( \frac{G'}{G} \right)^4, \quad (15)$$

$$u_{xy} = \{ [(a_{0x} - \mu a_{1f_x})_x - \mu f_x (a_{1x} - \lambda a_{1f_x})]_y \\ - \mu g' [(a_{1x} - \lambda a_{1f_x})_x \\ - \lambda a_{1xf_x} + (\lambda^2 + 2\mu) a_{1f_x}^2] \} \\ + \{ [(a_{1x} - \mu a_{1f_x})_x \\ - \lambda f_x (a_{1x} - \lambda a_{1f_x}) + 2\mu a_{1f_x}^2]_y \\ + g' [-\lambda (a_{1x} - \lambda a_{1f_x})_x \\ + (\lambda^2 + 2\mu) a_{1xf_x} - \lambda (\lambda^2 + 8\mu) a_{1f_x}^2 \\ + 2\mu (a_{1f_x})_x] \} \left( \frac{G'}{G} \right) \\ + \{ [- (a_{1f_x})_x - f_x (a_{1x} \\ - \lambda a_{1f_x}) + 2\lambda a_{1f_x}^2]_y \\ - g' [(7\lambda^2 + 8\mu) a_{1f_x}^2 - 3\lambda a_{1xf_x} \\ - 2\lambda (a_{1f_x})_x + (a_{1x} - \lambda a_{1f_x})_x] \} \left( \frac{G'}{G} \right)^2 \\ + \{ 2(a_{xx})_y - g' [12\lambda a_{1f_x}^2$$

$$\begin{aligned}
& -4a_{1x}f_x - 2a_{1xx}] \left\{ \left( \frac{G'}{G} \right)^3 \right. \\
& - 6a_{1x}f_x g' \left( \frac{G'}{G} \right)^4, \quad (16)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_{iy} = & [(a_{0i} - \mu a_{if_i})_y - \mu g'(a_{1i} - \lambda a_{if_i})] \\
& + [(a_{1i} - \lambda a_{if_i})_y + 2\mu a_{if_i} g' \\
& - \lambda g'(a_{1i} - \lambda a_{if_i})] \left( \frac{G'}{G} \right) \\
& + [- (a_{if_i})_y - g'(a_{1i} - \lambda a_{if_i}) \\
& + 2\lambda a_{if_i} g'] \left( \frac{G'}{G} \right)^2 + 2a_{if_i} g' \left( \frac{G'}{G} \right)^3, \quad (17)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v_{xx} = & [(b_{0x} - \mu b_{1f_x})_x \\
& - \mu f_x(b_{1x} - \lambda b_{1f_x} - 2\mu b_{2f_x})] \\
& + [(b_{1x} - \lambda b_{1f_x} - 2\mu b_{2f_x})_x \\
& - \lambda f_x(b_{1x} - \lambda b_{1f_x} - 2\mu b_{2f_x}) \\
& - 2\mu f_x(b_{2x} - b_{1f_x} - 2\lambda b_{2f_x})] \left( \frac{G'}{G} \right) \\
& + [(b_{2x} - b_{1f_x} - 2\lambda b_{2f_x})_x \\
& - f_x(b_{1x} - \lambda b_{1f_x} - 2\mu b_{2f_x}) \\
& - 2\lambda f_x(b_{2x} - b_{1f_x} - 2\lambda b_{2f_x}) \\
& + 6\mu b_{2f_x}^2] \left( \frac{G'}{G} \right)^2 \\
& + [-2(b_{2f_x})_x + 6\lambda b_{2f_x}^2 \\
& - 2f_x(b_{2x} - b_{1f_x} - 2\lambda b_{2f_x})] \left( \frac{G'}{G} \right)^3 \\
& + 6b_{2f_x}^2 \left( \frac{G'}{G} \right)^4, \quad (18)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(uu_x)_y = & \{ [a_0(a_{0x} - \mu a_{1f_x})]_y \\
& - \mu g'[a_0(a_{1x} - \lambda a_{1f_x}) \\
& + a_1(a_{0x} - \mu a_{1f_x})] \} \\
& + \{ [a_0(a_{1x} - \lambda a_{1f_x}) \\
& + a_1(a_{0x} - \mu a_{1f_x})]_y \\
& - \lambda g'[a_0(a_{1x} - \lambda a_{1f_x}) \\
& + a_1(a_{0x} - \mu a_{1f_x})] - 2\mu g'[a_1(a_{1x} \\
& - \lambda a_{1f_x}) - a_0 a_{1f_x}] \} \left( \frac{G'}{G} \right) \\
& + \{ [a_1(a_{1x} - \lambda a_{1f_x}) - a_0 a_{1f_x}]_y \\
& - g'[a_0(a_{1x} - \lambda a_{1f_x}) + a_1(a_{0x} - \mu a_{1f_x})] \\
& - 2\lambda g'[a_1(a_{1x} - \lambda a_{1f_x}) - a_0 a_{1f_x}] \\
& + 3\mu a_{1f_x}^2 g' \} \left( \frac{G'}{G} \right)^2 \\
& + \{ - (a_{1f_x}^2)_y - 2g'[a_1(a_{1x} - \lambda a_{1f_x})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - a_0 a_{1f_x}] + 3\lambda a_{1f_x}^2 g' \} \left( \frac{G'}{G} \right)^3 \\
& + 3a_{1f_x}^2 g' \left( \frac{G'}{G} \right)^4. \quad (19)
\end{aligned}$$

将(13)–(19)式代入(1)式, 合并  $(G'/G)$  的各阶幂次项, 令其系数为零可得

$$\left( \frac{G'}{G} \right)^4: 0 = -B(t) [6b_{2f_x}^2 + 3a_{1f_x}^2 g'], \quad (20)$$

$$\begin{aligned}
& \left( \frac{G'}{G} \right)^3: 2a_{1f_i} g' \\
& = -B(t) \{ -2(b_{2f_x})_x + 6\lambda b_{2f_x}^2 \\
& - 2f_x(b_{2x} - b_{1f_x} - 2\lambda b_{2f_x}) \\
& - (a_{1f_x}^2)_y - 2g'[a_1(a_{1x} - \lambda a_{1f_x}) \\
& - a_0 a_{1f_x}] + 3\lambda a_{1f_x}^2 g' \}, \quad (21)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left( \frac{G'}{G} \right)^2: g'[3\lambda a_{1f_i} - a_{1i}] \\
& = -B(t) \{ (b_{2x} - b_{1f_x} - 2\lambda b_{2f_x})_x \\
& - f_x(b_{1x} - \lambda b_{1f_x} - 2\mu b_{2f_x}) \\
& - 2\lambda f_x(b_{2x} - b_{1f_x} - 2\lambda b_{2f_x}) \\
& + 6\mu b_{2f_x}^2 + g'[-(a_0 a_1)_x - 2\lambda a_1 a_{1x} \\
& + 3\lambda a_0 a_{1f_x} + 2(\lambda^2 + 2\mu) a_{1f_x}^2] \}, \quad (22)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left( \frac{G'}{G} \right): g'[(\lambda^2 + 2\mu) a_{1f_i} - \lambda a_{1i}] \\
& = -B(t) \{ (b_{1x} - \lambda b_{1f_x} - 2\mu b_{2f_x})_x \\
& - \lambda f_x(b_{1x} - \lambda b_{1f_x} - 2\mu b_{2f_x}) \\
& - 2\mu f_x(b_{2x} - b_{1f_x} - 2\lambda b_{2f_x}) \\
& + g'[3\lambda \mu a_{1f_x}^2 + (\lambda^2 + 2\mu) a_0 a_{1f_x} \\
& - \lambda(a_0 a_1)_x - 2\mu a_1 a_{1x}] \}, \quad (23)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left( \frac{G'}{G} \right)^0: g'[\lambda \mu a_{1f_i} - \mu a_{1i}] \\
& = -B(t) \{ (b_{0x} - \mu b_{1f_x})_x \\
& - \mu f_x(b_{1x} - \lambda b_{1f_x} - 2\mu b_{2f_x}) \\
& - \mu g'[(a_0 a_1)_x - \lambda a_0 a_{1f_x} - \mu a_{1f_x}^2] \}. \quad (24)
\end{aligned}$$

将(13)–(19)式代入(2)式, 合并  $(G'/G)$  的各阶幂次项, 令其系数为零可得

$$\begin{aligned}
& \left( \frac{G'}{G} \right)^4: 0 = -B(t) [-3a_1 b_{2f_x} - 6\beta^2 a_{1f_x}^2 g'], \\
& \left( \frac{G'}{G} \right)^3: -2b_{2f_i} \\
& = -B(t) \{ (a_1 b_2)_x - 2f_x(a_0 b_2 + a_1 b_1) \\
& - 3\lambda a_1 b_{2f_x} + 2\beta^2 (a_{1f_x})_y \\
& - \beta^2 g'[12\lambda a_{1f_x}^2 - 4a_{1x} f_x - 2a_{1f_{xx}}] \}, \quad (26)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left(\frac{G'}{G}\right)^2 : b_{2t} - b_{1t}f_t - 2\lambda b_{2t}f_t \\ & = -B(t) \{ -a_{1t}f_x + (a_0b_2 + a_1b_1)_x \\ & \quad - f_x(a_0b_1 + a_1b_0) \\ & \quad - 2\lambda f_x(a_0b_2 + a_1b_1) - 3\mu a_1b_{2t}f_x \\ & \quad - \beta^2 g'[(7\lambda^2 + 8\mu)a_{1t}f_x^2 + a_{1xx} \\ & \quad - 6\lambda a_{1x}f_x - 3\lambda a_{1t}f_{xx}] \}, \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} & \left(\frac{G'}{G}\right) : b_{1t} - \lambda b_{1t}f_t - 2\mu b_{2t}f_t \\ & = -B(t) \{ (a_{1x} - \lambda a_{1t}f_x) + (a_0b_1 + a_1b_0)_x \\ & \quad - \lambda f_x(a_0b_1 + a_1b_0) \\ & \quad - 2\mu f_x(a_0b_2 + a_1b_1) \\ & \quad + \beta^2 g'[-\lambda(a_{1x} - \lambda a_{1t}f_x)_x \\ & \quad + \lambda^2 a_{1x}f_x - \lambda(\lambda^2 + 8\mu)a_{1t}f_x^2 \\ & \quad + 2\mu a_{1x}f_x + 2\mu(a_{1t}f_x)_x] \}, \end{aligned} \quad (28)$$

$$\begin{aligned} & \left(\frac{G'}{G}\right)^0 : b_{0t} - \mu b_{1t}f_t \\ & = -B(t) \{ (a_{0x} - \mu a_{1t}f_x) + (a_0b_0)_x \\ & \quad - \mu f_x(a_0b_1 + a_1b_0) \\ & \quad - \mu\beta^2 g'[(a_{1x} - \lambda a_{1t}f_x)_x \\ & \quad - \lambda a_{1x}f_x + (\lambda^2 + 2\mu)a_{1t}f_x^2] \}. \end{aligned} \quad (29)$$

解方程组(20)–(29)可得

$$\begin{aligned} a_0 & = \lambda\beta f_x - \frac{f_t}{B(t)f_x} - \frac{\beta f_{xx}}{f_x}, \\ a_1 & = 2\beta f_x, b_0 = -1 - 2\mu\beta^2 f_x g', \\ b_1 & = -2\lambda\beta^2 f_x g', b_2 = -2\beta^2 f_x g'. \end{aligned} \quad (30)$$

在方程(20)–(29)中,先联立(20),(25),(21)与(26)解得 $a_1, b_2, b_1, a_0$ ,因 $a_0, a_1$ 与 $y$ 无关,经化简可得(22)–(24)与(27)–(29).

将(30)代入(10),(11)式,再根据常微方程(5)的解可得到系统(1),(2)的三种分离变量形式的非行波解.

**情形 1** 当 $\lambda^2 - 4\mu > 0$ ,记 $\delta_1 = \frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2}$ ,

由方程(5)的通解可得

$$\frac{G'}{G} = -\frac{\lambda}{2} + \delta_1 \frac{C_1 \cosh\delta_1(f+g) + C_2 \sinh\delta_1(f+g)}{C_1 \sinh\delta_1(f+g) + C_2 \cosh\delta_1(f+g)}.$$

此时系统(1),(2)的双曲函数形式解为

$$\begin{aligned} u_1 & = -\frac{f_t}{B(t)f_x} - \frac{\beta f_{xx}}{f_x} + 2\beta\delta_1 f_x \\ & \quad \times \frac{C_1 \cosh\delta_1(f+g) + C_2 \sinh\delta_1(f+g)}{C_1 \sinh\delta_1(f+g) + C_2 \cosh\delta_1(f+g)}, \end{aligned} \quad (31)$$

$$\begin{aligned} v_1 & = -1 + 2\beta^2 \delta_1^2 f_x g' \\ & \quad \times \left\{ 1 - \left[ \frac{C_1 \cosh\delta_1(f+g) + C_2 \sinh\delta_1(f+g)}{C_1 \sinh\delta_1(f+g) + C_2 \cosh\delta_1(f+g)} \right]^2 \right\}. \end{aligned} \quad (32)$$

**情形 2** 当 $\lambda^2 - 4\mu < 0$ ,记 $\delta_2 = \frac{\sqrt{4\mu - \lambda^2}}{2}$ ,由

方程(5)的通解可得

$$\frac{G'}{G} = -\frac{\lambda}{2} + \delta_2 \frac{-C_1 \sin\delta_2(f+g) + C_2 \cos\delta_2(f+g)}{C_1 \cos\delta_2(f+g) + C_2 \sin\delta_2(f+g)}.$$

此时系统(1),(2)的三角函数形式解为

$$\begin{aligned} u_2 & = -\frac{f_t}{B(t)f_x} - \frac{\beta f_{xx}}{f_x} + 2\beta\delta_2 f_x \\ & \quad \times \frac{-C_1 \sin\delta_2(f+g) + C_2 \cos\delta_2(f+g)}{C_1 \cos\delta_2(f+g) + C_2 \sin\delta_2(f+g)}, \end{aligned} \quad (33)$$

$$\begin{aligned} v_2 & = -1 - 2\beta^2 \delta_2^2 f_x g' \\ & \quad \times \left\{ 1 + \left[ \frac{-C_1 \sin\delta_2(f+g) + C_2 \cos\delta_2(f+g)}{C_1 \cos\delta_2(f+g) + C_2 \sin\delta_2(f+g)} \right]^2 \right\}. \end{aligned} \quad (34)$$

**情形 3** 当 $\lambda^2 - 4\mu = 0$ ,由方程(5)的通解可得

$$\frac{G'}{G} = -\frac{\lambda}{2} + \frac{C_2}{C_1 + C_2(f+g)}.$$

此时系统(1),(2)的有理函数形式解为

$$u_3 = -\frac{f_t}{B(t)f_x} - \frac{\beta f_{xx}}{f_x} + \frac{2\beta C_2 f_x}{C_1 + C_2(f+g)}, \quad (35)$$

$$v_3 = -1 - 2\beta^2 f_x g' \left[ \frac{C_2}{C_1 + C_2(f+g)} \right]^2. \quad (36)$$

### 3. 系统(1),(2)的十字形分形结构

由于在非行波解(31)–(36)中含有任意函数 $f(x,t)$ 和 $g(y)$ ,这就对特殊结构的激发提供了必要条件.我们通过余弦函数、对数函数和幂函数进行巧妙组合,获得了(2+1)维变系数色散长波系统(1),(2)的新分形结构.

以解(32)式为例,选择 $f(x,t)$ 和 $g(y)$ 分别为

$$\begin{aligned} f(x,t) & = 2 + (k_1 x + t) \ln[k_2^2(k_1 x + t)^2] \\ & \quad \times \cos(k_3 x + t), \end{aligned} \quad (37)$$

$$g(y) = 2 + r_1 y \ln[r_2^2(r_1 y)^2] \cos(r_3 y), \quad (38)$$

其中 $k_1, k_2, k_3, r_1, r_2, r_3$ 为常数,且均不为零.

取变量 $t = 0$ ,参数 $\beta, \delta_1, C_1, C_2, k_1, k_2, k_3, r_1, r_2, r_3$ 分别取下列六组特殊值时,得到系统(1),(2)的一类新孤子结构,共有六种不同的形态,如图1所示.

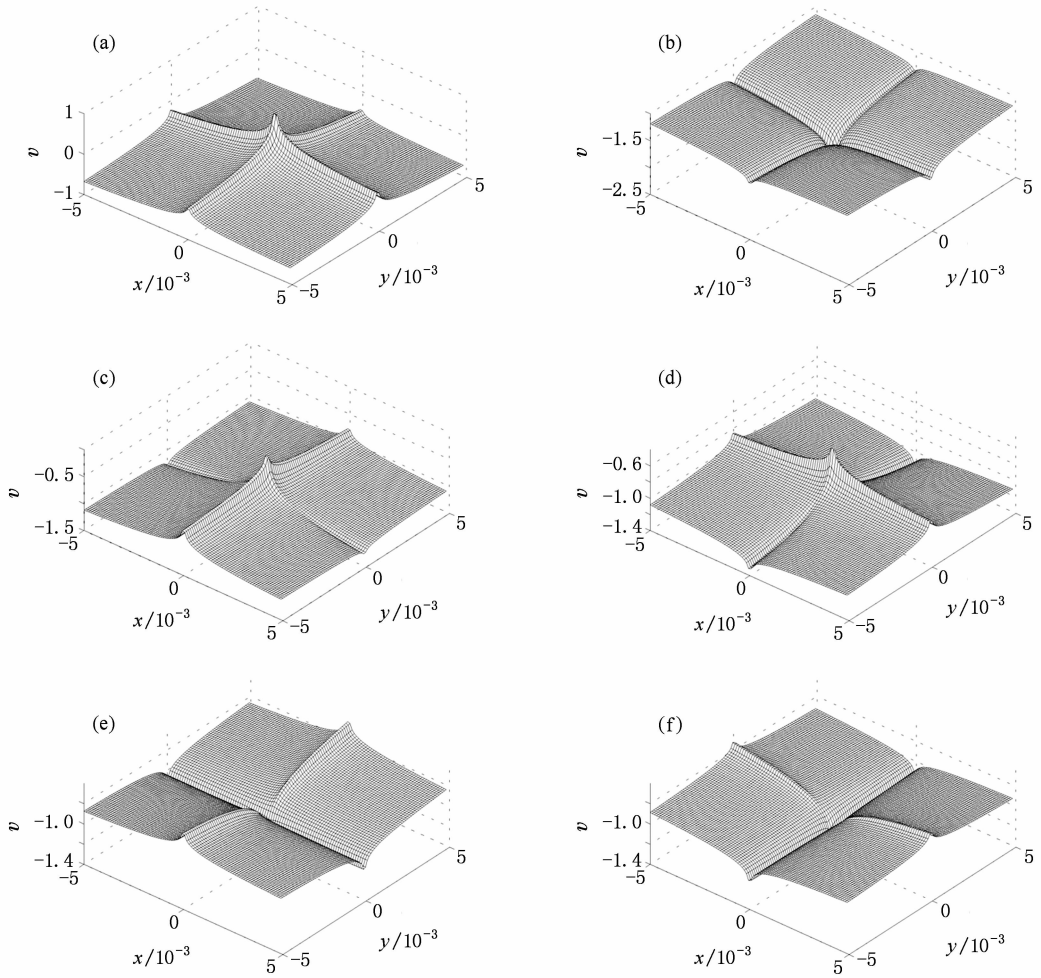


图1 取变量  $t = 0$ , 解(22)在不同参数  $\beta, \delta_1, C_1, C_2, k_1, k_2, k_3, r_1, r_2, r_3$  设置下的图形 (a) (39)式; (b) (40)式; (c) (41)式; (d) (42)式; (e) (43)式; (f) (44)式

$$\begin{aligned} \beta &= 2, \delta_1 = 1, C_1 = 1, C_2 = 2, \\ k_1 &= 1, k_2 = 1.3, k_3 = 1.7, \\ r_1 &= 2, r_2 = 2.6, r_3 = 2.1. \end{aligned} \quad (39)$$

$$\begin{aligned} \beta &= 2, \delta_1 = 1, C_1 = 3, C_2 = 2, \\ k_1 &= 1, k_2 = 1.3, k_3 = 1.7, \\ r_1 &= 2, r_2 = 2.6, r_3 = 2.1. \end{aligned} \quad (40)$$

$$\begin{aligned} \beta &= 2, \delta_1 = 1, C_1 = 1, C_2 = 2, \\ k_1 &= 1, k_2 = 260, k_3 = 1.7, \\ r_1 &= 2, r_2 = 2.6, r_3 = 2.1. \end{aligned} \quad (41)$$

$$\begin{aligned} \beta &= 2, \delta_1 = 1, C_1 = 1, C_2 = 2, \\ k_1 &= 1, k_2 = 12, k_3 = 1.7, \\ r_1 &= 2, r_2 = 220, r_3 = 2.1. \end{aligned} \quad (42)$$

$$\begin{aligned} \beta &= 2, \delta_1 = 1, C_1 = 3, C_2 = 2, \\ k_1 &= 1, k_2 = 4, k_3 = 1.7, \end{aligned}$$

$$r_1 = 2, r_2 = 220, r_3 = 2.1. \quad (43)$$

$$\begin{aligned} \beta &= 2, \delta_1 = 1, C_1 = 3, C_2 = 2, \\ k_1 &= 1, k_2 = 660, k_3 = 1.7, \\ r_1 &= 2, r_2 = 2, r_3 = 2.1. \end{aligned} \quad (44)$$

从图1可知,当解中的常数  $C_1, C_2$  取不同值时,孤子结构的交汇顶点朝向不同.

分形的本质特征是在不同尺度下形状的相似性.经过进一步研究,我们发现图1中的(a),(b)两个孤子结构为分形结构.为更清晰观察这一分形特征,仍然选取  $f(x, t)$  满足(37)式,  $g(y)$  满足(38)式,图2给出解(32)在  $t = 0$  和参数设置满足(39)式时,  $x, y$  分别在  $[-5 \times 10^{-6}, 5 \times 10^{-6}]$ ,  $[-5 \times 10^{-9}, 5 \times 10^{-9}]$  和  $[-5 \times 10^{-12}, 5 \times 10^{-12}]$  三个区间上的图形.可以看出,虽然每个区间依次缩小到  $1/1000$ ,图形仍保持其形状的相似性.我们称这种孤子结构为十字形分形结构.

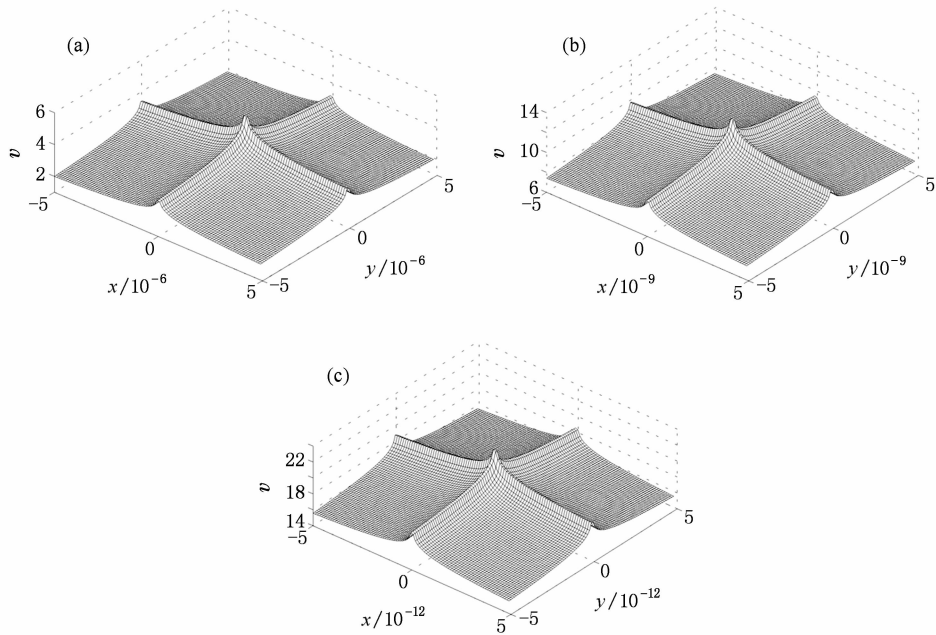


图2 取变量  $t = 0$ ，参数  $\beta, \delta_1, C_1, C_2, k_1, k_2, k_3, r_1, r_2, r_3$  设置为(39)式，解(32)式在不同区间上图形

(a)  $x, y \in [-5 \times 10^{-6}, 5 \times 10^{-6}]$ ; (b)  $x, y \in [-5 \times 10^{-9}, 5 \times 10^{-9}]$ ; (c)  $x, y \in [-5 \times 10^{-12}, 5 \times 10^{-12}]$

## 4. 结 论

本文将  $(G'/G)$  展开法扩展后构造出  $(2+1)$  维变系数色散长波系统的非行波解列，而这些非行波解能够激发丰富的局域结构。通过适当设置解中的

任意函数，研究了  $(2+1)$  维变系数色散长波系统的一类新的分形结构，即十字形分形结构。据我们所知，十字形分形结构是首次发现。本文中的扩展  $(G'/G)$  展开法也可用于构造其他高维非线性物理系统的非行波解，并且这些系统中也存在十字形分形结构。

- [1] Wang M L 1995 *Phys. Lett. A* **199** 169
- [2] Yan Z Y, Zhang H Q 2000 *Acta Phys. Sin.* **49** 2113 (in Chinese) [闫振亚、张鸿庆 2000 物理学报 **49** 2113]
- [3] Fan E G 2000 *Acta Phys. Sin.* **49** 1409 (in Chinese) [范恩贵 2000 物理学报 **49** 1409]
- [4] Liu S K, Liu S D, Fu Z T 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 2068 (in Chinese) [刘式适、刘适达、付遵涛 2001 物理学报 **50** 2068]
- [5] Liu S D, Fu Z T, Liu S K, Zhao Q 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 718 (in Chinese) [刘式达、付遵涛、刘适式、赵强 2002 物理学报 **51** 718]
- [6] Wu G J, Han J H, Shi L M, Zhang M 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 3858 (in Chinese) [吴国将、韩家骅、史良马、张苗 2006 物理学报 **55** 3858]
- [7] Wang M L, Zhou Y B, Li Z B 2003 *Phys. Lett. A* **318** 84
- [8] Zhou Y B, Wang M L, Miao T D 2004 *Phys. Lett. A* **323** 77
- [9] Zhang J L, Wang Y M, Wang M L 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 1574 (in Chinese) [张金良、王跃明、王明亮 2003 物理学报 **52** 1574]
- [10] Li X Z, Zhang J L, Wang Y M, Wang M L 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 4045 (in Chinese) [李向正、张金良、王跃明、王明亮 2004 物理学报 **53** 4045]
- [11] Taogetusang, Sirendaerji 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 13 (in Chinese) [套格图桑、斯仁道尔吉 2006 物理学报 **55** 13]
- [12] Taogetusang, Sirendaerji 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 3246 (in Chinese) [套格图桑、斯仁道尔吉 2006 物理学报 **55** 3246]
- [13] Li X Z, Li X Y, Zhao L Y, Zhang J L 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 2203 (in Chinese) [李向正、李修勇、赵丽英、张金良 2008 物理学报 **57** 2203]
- [14] Ma Y L, Li B Q 2009 *Appl. Math. Comput.* **211** 102
- [15] Lou S Y, Qu C Z, Zhang S L 2006 *Chin. Phys.* **15** 2765
- [16] Tang X Y, Liang Z F 2006 *Phys. Lett. A* **351** 398
- [17] Zhang S L, Lou S Y, Qu C Z 2006 *Chin. Phys.* **15** 2765
- [18] Ma H C, Ge D J, Yu Y D 2008 *Chin. Phys. B* **17** 1448
- [19] Ying J P, Lou S Y 2003 *Chin. Phys. Lett.* **20** 1448
- [20] Fang J P, Zheng C L, Zhu J M 2005 *Commun. Theor. Phys.* **44** 203

- [21] Fang J P, Zheng C L 2005 *Chin. Phys.* **14** 670
- [22] Fang J P, Zheng C L, Zhu J M 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 2990 (in Chinese) [方建平、郑春龙、朱加民 2005 物理学报 **54** 2990]
- [23] Ma S H, Wu X H, Fang J P, Zheng C L 2006 *Z. Naturforsch.* **61a** 249
- [24] Ma S H, Fang J P 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 5611 (in Chinese) [马松华、方建平 2006 物理学报 **55** 5611]
- [25] Ma S H, Fang J P, Zheng C L 2008 *Chin. Phys. B* **17** 2767
- [26] Ma S H, Fang J P, Hong B H, Zheng C L 2008 *Commun. Theor. Phys.* **49** 1245
- [27] Huang L, Sun J A, Dou F Q, Duan W S, Liu X X 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 611 (in Chinese) [黄磊、孙建安、豆福全、段文山 2007 物理学报 **56** 611]
- [28] Ma S H, Fang J P, Zheng C L 2007 *Z. Naturforsch.* **62a** 8
- [29] Ma S H, Fang J P, Zheng C L 2008 *Z. Naturforsch.* **63a** 121
- [30] Li J B, Zheng C L, Ma S H 2008 *Z. Naturforsch.* **63a** 641
- [31] Ma S H, Wu X H, Fang J P, Zheng C L 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 0011 (in Chinese) [马松华、吴小红、方建平、郑春龙 2008 物理学报 **57** 0011]
- [32] Lou S Y, Tang X Y 2006 *Methods of Nonlinear Mathematical Physics* (Beijing: Science Press) p120 (in Chinese) [楼森岳、唐晓艳 2006 非线性数学物理方法(北京: 科学出版社) 第 120 页]
- [33] Ma Z Y, Zhu J M, Zheng C L 2004 *Chin. Phys.* **13** 1382
- [34] Zhu J M, Ma Z Y, Zheng C L 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 3248 (in Chinese) [朱加民、马正义、郑春龙 2004 物理学报 **53** 3248]
- [35] Ma Z Y, Zheng C L 2006 *Chin. Phys.* **15** 0045
- [36] Ma S H, Fang J P, Ren Q B 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 6784 (in Chinese) [马松华、方建平 2007 物理学报 **56** 6784]
- [37] Ma Z Y, Hu Y H 2007 *Chaos, Solitons Fractals* **34** 1667
- [38] Wang M L, Li X Z, Zhang J L 2008 *Phys. Lett. A* **372** 417
- [39] Zhang S, Tong J L, Wang W 2008 *Phys. Lett. A* **372** 2254
- [40] Bekir A. 2008 *Phys. Lett. A* **372** 3400
- [41] Zhang J, Wei X L, Lu Y J 2008 *Phys. Lett. A* **372** 3653
- [42] Li B Q, Ma Y L 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 4373 (in Chinese) [李帮庆、马玉兰 2009 物理学报 **58** 4373]
- [43] Ma Y L, Li B Q, Sun J Z 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 7402 (in Chinese, in press) [马玉兰、李帮庆、孙践知 2009 物理学报 **58** 7402]
- [44] Boiti P, Leon J J, Manna M, Pempinelli F 1987 *Inverse Problems* **3** 25
- [45] Zeng X, Zhang H Q 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 504 (in Chinese) [曾昕、张鸿庆 2005 物理学报 **54** 504]
- [46] Naranmandula 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 1671 (in Chinese) [那仁满都拉 2009 物理学报 **51** 1671]
- [47] Liu C S 2005 *Chin. Phys.* **14** 1710
- [48] Zhang W L, Wu G J, Zhang M, Wang J M, Han J H 2008 *Chin. Phys. B* **17** 1156

## $(G'/G)$ -expansion method and novel fractal structures for high-dimensional nonlinear physical equation\*

Li Bang-Qing Ma Yu-Lan<sup>†</sup> Xu Mei-Ping

(School of Computer and Information Engineering, Beijing Technology and Business University, Beijing 100048, China)

(Received 25 May 2009; revised manuscript received 26 June 2009)

### Abstract

The  $(G'/G)$ -expansion method is extended to construct non-traveling wave solutions and explore the fractal structure for high dimensional nonlinear physical equation. As an example, a series of non-traveling solutions is obtained for the  $(2+1)$ -dimensional dispersive long wave system with variable coefficient. Furthermore, by setting properly the arbitrary functions in the solutions, a class of novel fractal structures, namely, the cross-like fractal structures are firstly observed.

**Keywords:**  $(G'/G)$ -expansion method,  $(2+1)$ -dimensional dispersive long wave system with variable coefficient, non-traveling solution, cross-like fractal structure

**PACC:** 0230, 0340, 0290

\* Project supported by the Scientific Research Common Program of Beijing Municipal Commission of Education (Grant No. KM201010011008) and the Excellent Key Teachers Project of Beijing (Grant No. PXM2007-014213-044566).

<sup>†</sup> Corresponding author. E-mail: mayl@th. btbu. edu. cn