第 59 卷 第 3 期 2010 年 3 月
1000-3290/2010/59(03)/1423-05

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol. 59, No. 3, March, 2010

Hamilton 系统 Noether 理论的新型逆问题

丁光涛†

(安徽师范大学物理与电子信息学院,芜湖 241000)

(2009 年 5 月 24 日收到;2009 年 6 月 19 日收到修改稿)

研究 Hamilton 系统 Noether 理论新型的逆问题,得到利用 Noether 理论从已知的第一积分构建 Hamilton 函数和对称性的一般解法和若干特殊解法,提出由 Hamilton 函数直接导出守恒量的两条推论. 举例说明所得结果的应用.

关键词: Noether 理论, Hamilton 系统, 逆问题, 守恒量
PACC: 0320

1. 引 言

动力学逆问题是经典力学中古老而又常新的重要课题,几十年来该领域取得一系列重要研究成果[1—6]. 所谓动力学逆问题简言之,是从给定的运动性质,如第一积分,反过来建立动力学方程,当然,随着科学技术的发展,该问题的提法逐步扩充和完善. 对 Hamilton 力学而言,因为其动力学方程由系统的 Hamilton 函数确定,故其动力学逆问题可以归结成由第一积分构建 H 函数.

Noether 理论揭示了力学系统守恒量与其动力学对称性之间的内在联系,几十年来这个数理学科热门课题同样取得众多重要成果[1,4,7—15]. Hamilton 系统 Noether 理论将三个方面:系统动力学特征函数、对称变换和运动守恒量紧密联系起来,对于给定 Hamilton 函数的系统,可以确定其对称性,进而由对称性直接导出守恒量,或者反过来,由守恒量导出对称性. 本文研究 Hamilton 系统 Noether 理论新类型的逆问题,即由系统已知的守恒量(运动微分方程的第一积分)构建系统的 Hamilton 函数,并同时确定对应的对称变换. 在给出基本解法以及若干特殊解法后,举例说明得到的结果. 在本文讨论过程中,还得到两个直接由 Hamilton 函数导出守恒量的推论.

2. Hamilton 系统的 Noether 理论概述

Hamilton 系统运动方程——正则方程为

$$\dot{q}_\alpha = \frac{\partial H}{\partial p_\alpha},\ \dot{p}_\alpha = -\frac{\partial H}{\partial q_\alpha},\quad (\alpha = 1,\cdots,n), \tag{1}$$

其中 q_α, p_α 为正则变量, $H = H(t,q,p)$ 为 Hamilton 函数.

设时间和正则变量取无限小变换

$$\begin{aligned} t^* &= t + \varepsilon\xi_o(t,q,p),\\ q_\alpha^* &= q_\alpha + \varepsilon\xi_\alpha(t,q,p),\\ p_\alpha^* &= p_\alpha + \varepsilon\eta_\alpha(t,q,p), \end{aligned} \tag{2}$$

其中 ε 为无限小参量, ξ_o, ξ_α, η_α 为变换无限小生成元. 如果存在规范函数 $G_N = G_N(t,q,p)$ 使 ξ_o, ξ_α, η_α 满足如下 Noether 等式:

$$p_\alpha\dot{\xi}_\alpha - \frac{\partial H}{\partial t}\xi_o - \frac{\partial H}{\partial q_\alpha}\xi_\alpha - H\dot{\xi}_o + \dot{G}_N = 0, \tag{3}$$

则系统这种不变性为 Noether 对称性,由此直接导出 Noether 守恒量

$$I_N = p_\alpha\xi_\alpha - H\xi_o + G_N = \text{const}. \tag{4}$$

Hamilton 系统 Noether 对称性另一判断方法是下列 Killing 方程有解:

$$\begin{aligned} &p_\alpha\frac{\partial\xi_\alpha}{\partial t} - \frac{\partial H}{\partial t}\xi_o - \frac{\partial H}{\partial q_\alpha}\xi_\alpha\\ &- H\frac{\partial\xi_o}{\partial t} + \frac{\partial G_N}{\partial t}\\ &+ \left(p_\alpha\frac{\partial\xi_\alpha}{\partial q_\beta} - H\frac{\partial\xi_o}{\partial q_\beta} + \frac{\partial G_N}{\partial q_\beta}\right)\frac{\partial H}{\partial p_\beta} = 0,\\ &p_\alpha\frac{\partial\xi_\alpha}{\partial p_\beta} - H\frac{\partial\xi_o}{\partial p_\beta} + \frac{\partial G_N}{\partial p_\beta} = 0,\\ &(\alpha,\beta = 1,\cdots,n), \end{aligned} \tag{5}$$

如果已知方程(1)的第一积分

† E-mail: dgt695@sina.com

$$I = I(t,q,p) = \text{const.} \tag{6}$$

则根据 Noether 逆定理,可以导出对应的对称性

$$\xi_\alpha = \frac{\partial H}{\partial p_\alpha}\xi_o + \frac{\partial I}{\partial p_\alpha}, \tag{7}$$

$$I = p_\alpha \xi_\alpha - H\xi_o + G_{\mathrm{N}}. \tag{8}$$

说明两点:一是在本文讨论中不区分对称性和准对称性,而把通常严格的对称性视为 $G_{\mathrm{N}} = 0$ 的情况;二是在(3),(4),(5),(7)和(8)式中均未出现 η_α,根据文献[9],已知 ξ_o,ξ_α,可以计算出 η_α.

3. 应用 Noether 理论求解 Hamilton 系统动力学逆问题

Hamilton 系统动力学逆问题提法.

已知系统一组相容而且独立的第一积分

$$I_i = I_i(t,q,p) = \text{const.}$$
$$(i = 1,\cdots,m \leqslant 2n), \tag{9}$$

构建系统可以容许的 Hamilton 函数 $H(t,q,p)$,使上述第一积分均为系统的 Noether 守恒量,同时确定与每一个第一积分对应的对称性.

与通常文献中的 Noether 逆定理相比较,这是新型的 Noether 理论逆问题.根据上述 Hamilton 系统的 Noether 理论,可得到

定理 1 对于 Hamilton 函数未知的系统(1),已知第一积分(6),设其在无限小变换式(3)下,为 Noether 守恒量,则联立求解(4)式和(3)式,或联立求解(4)式和方程(5)可以得到系统的 Hamilton 函数 $H(t,q,p)$,以及对应的对称变换生成元和规范函数.

由于方程数少于待求函数的个数,故解不是唯一的,求解过程中有较大的选择补充条件的自由程度.因此,当给出的第一积分具有某些特性时,可以在上述通用解法基础上建立若干特殊解法.

推论 1 若 $\frac{\partial I}{\partial t} = 0$,则可以选择

(i)

$$\begin{aligned} \xi_o &= -1, \\ \xi_\alpha &= 0, \\ G_{\mathrm{N}} &= 0, \\ H &= I(q,p). \end{aligned} \tag{10}$$

(ii)

$$\begin{aligned} \xi_o &= -f(t)^{-1}, \\ \xi_\alpha &= 0, \\ G_{\mathrm{N}} &= 0, \\ H &= f(t)I(q,p). \end{aligned} \tag{11}$$

(iii)

$$\begin{aligned} \xi_o &= -\left[\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}I}\right]^{-1}, \\ \xi_\alpha &= 0, \\ G_N &= I - \varphi(I)\left[\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}I}\right]^{-1}, \\ H &= \varphi[I(q,p)]. \end{aligned} \tag{12}$$

容易证明,将(10)—(12)式代入(4)和(3)式,都能满足.

已知第一积分,构建 Hamilton 函数的另一基本解法联立求解(4)式与方程(5),可以建立如下专门的求解程序,以得到待求的 H 函数和对应的对称性.

首先,用(6)式所给 I 代替(4)式中 I_{N},并将(4)式两边对 p_α 求偏导数,同时结合方程(5)中第二组方程,得

$$\xi_\alpha = \frac{\partial H}{\partial p_\alpha}\xi_o + \frac{\partial I}{\partial p_\alpha}. \tag{13}$$

应当指出,(13)式即(7)式.其次,将(4)式两边分别对 t 和 q_α 求偏导数,再与(13)式一起代入方程(5)第一式,得

$$\frac{\partial I}{\partial t} + \frac{\partial I}{\partial q_\alpha}\frac{\partial H}{\partial p_\alpha} - \frac{\partial I}{\partial p_\alpha}\frac{\partial H}{\partial q_\alpha} = 0. \tag{14}$$

利用 Poisson 括号,上式可以改写成

$$\frac{\partial I}{\partial t} + [I,H] = 0. \tag{15}$$

(14)或(15)式所表达的正是 I 为守恒量(第一积分)的条件[1,16],通过 Noether 理论重新导出,说明分析力学理论的自洽,但在这里将把(14)式看成由 I 求 H 的偏微分方程,解方程(14)可以求得系统 H 函数,再与(13)式一起代入(4)式,得

$$\left(p_\alpha\frac{\partial H}{\partial p_\alpha} - H\right)\xi_o = I - p_\alpha\frac{\partial I}{\partial p_\alpha} - G_{\mathrm{N}}. \tag{16}$$

由(13)和(16)式可以得到对应的对称变换,同样要指出,解不是唯一的,求解时应引入补充条件.例如取

$$G_{\mathrm{N}} = I - p_\alpha\frac{\partial I}{\partial p_\alpha},$$

得

$$\xi_o = 0, \xi_\alpha = \frac{\partial I}{\partial p_\alpha}. \tag{17}$$

由上述论证,可以得到

定理 2 对于 Hamilton 函数未知的系统(1),已知第一积分(6),设其在无限小变换式(3)下,为

Noether 守恒量，则联立求解(14)式，(13)式和(16)式，可以得到系统的 Hamilton 函数 $H(t,q,p)$，以及对应的对称变换生成元和规范函数.

问题回到由(9)式给定的一组第一积分，求系统可以容许的 Hamilton 函数. 利用 Noether 理论的通用解法，有两条路径：路径一是先求出与每个第一积分对应的 Hamilton 函数集合，再找出 m 个集合中的共同元素，这就是待求的与 m 个第一积分对应的函数 $H(t,q,p)$，一般说来，解不是唯一的；路径二是先求出一个第一积分对应的 Hamilton 函数集合，然后将集合中每个 H 函数与其余的第一积分代入(14)式检验，只有使其余第一积分都满足(14)式的，才是待求的 Hamilton 函数. 应当指出，在实际求解过程中，要找到与一个积分对应的全部 Hamilton 函数是很困难的.

4. 两个直接由 Hamilton 函数导出守恒量的推论

Hamilton 力学中，由函数 $H(t,q,p)$ 的结构，可以直接导出守恒量[1,16]，例如

若 $\frac{\partial H}{\partial t}=0$，则 $H=\text{const}$.

若 $\frac{\partial H}{\partial q_\beta}=0$，则 $p_\beta=\text{const}$.（β 为特定值），

等等. 在推导(11)和(12)式的过程中，实际上用 Noether 理论证明了下面两个推论.

推论 2　若系统 Hamilton 函数是时间函数 $f(t)$ 和与时间无关的正则变量函数 $I(q,p)$ 的乘积，即

$$H(t,q,p)=f(t)I(q,p),$$

则函数 $I(q,p)$ 是系统的守恒量.

推论 3　若系统 Hamilton 函数是与时间无关的正则变量函数 $I(q,p)$ 的复合函数，即

$$H(q,p)=\varphi[I(q,p)],$$

则函数 $I(q,p)$ 是系统的守恒量.

上述两个推论还可以组成新的推论，例如，若 $H(t,q,p)=f(t)\varphi[I(q,p)]$，则 $I(q,p)=\text{const.}$.

5. 算　例

例 1　(ⅰ)已知系统一个第一积分为

$$I=\frac{1}{2}p^2,\tag{18}$$

构建系统的 Hamilton 函数 H 和对应的对称变换.

(ⅱ)设系统的另一个第一积分为

$$I'=\gamma q-\mathrm{e}^{\gamma t}p,\tag{19}$$

确定系统的 Hamilton 函数.

将(18)式中 I 代入(14)式得

$$\frac{1}{2}p^2=p\xi-H\xi_o+G_{\mathrm{N}}.\tag{20}$$

此方程的解很多，例如

$$H=\frac{1}{2}p^2,\xi_o=-1,\xi=0,G_N=0,\tag{21}$$

$$H=\frac{1}{2}p^2,\xi_o=0,\xi=p,G_{\mathrm{N}}=-\frac{1}{2}p^2,\tag{22}$$

$$H=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{\gamma t}p^2,\xi_o=-\mathrm{e}^{-\gamma t},\xi=0,G_{\mathrm{N}}=0,\tag{23}$$

$$H=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{\gamma t}p^2,\xi_o=0,\xi=p,G_{\mathrm{N}}=-\frac{1}{2}p^2,\tag{24}$$

$$H=\frac{1}{4}p^4,\xi_o=-\frac{1}{p^2},\xi=0,G_{\mathrm{N}}=\frac{1}{4}p^2,\tag{25}$$

$$H=\frac{1}{2}(p^2+q^2),\xi_o=-1,$$

$$\xi=0,G_{\mathrm{N}}=-\frac{1}{2}q^2,\tag{26}$$

$$H=\frac{1}{2}e^{\gamma t}(p^2+q^2),$$

$$\xi_o=-e^{-\gamma t},\xi=0,G_{\mathrm{N}}=-\frac{1}{2}q^2,\tag{27}$$

等等. 将解(21)—(27)代入(3)式检验，得解(26)和(27)应当弃去. 不难看出，解(21)—(25)，还可以利用(13)，(14)和(16)式求出，或直接利用(10)，(11)和(12)式得到.

对于第一积分式(19)，代入(14)式得

$$-\gamma\mathrm{e}^{\gamma t}p+\gamma\frac{\partial H}{\partial p}+\mathrm{e}^{\gamma t}\frac{\partial H}{\partial q}=0.\tag{28}$$

此方程的解也不是唯一的. 例如

$$H=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{\gamma t}p^2,\tag{29}$$

$$H=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{\gamma t}p^2-\mathrm{e}^{\gamma t}p+\gamma q,\tag{30}$$

$$H=\gamma pq-\frac{\gamma^2}{2}q^2\mathrm{e}^{-\gamma t},\tag{31}$$

等等. 由(23)和(29)式，可得系统一个 Hamilton 函数为

$$H=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{\gamma t}p^2.$$

例 2　已知系统 4 个第一积分为

$$I_1=\frac{1}{2}(p_1^2+p_2^2)+q_2,I_2=p_1,$$

$$I_3=p_2+t,I_4=q_1-p_1t,\tag{32}$$

求系统的 Hamilton 函数.

首先,求与 I_1 对应的 Hamilton 函数. 由于 $\frac{\partial I_1}{\partial t} = 0$, 故由(10)和(11)式得

$$H_1 = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2) + q_2, \tag{33}$$

$$H_2 = f(t)\left[\frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2) + q_2\right]. \tag{34}$$

还可以将 I_1 代入方程(14)求解,对 I_1 方程(14)写成

$$-p_1\frac{\partial H}{\partial q_1} - p_2\frac{\partial H}{\partial q_2} + \frac{\partial H}{\partial p_2} = 0. \tag{35}$$

此方程解除上述 H_1 和 H_2 外,还有

$$H_3 = p_1p_2 + q_1, \tag{36}$$

$$H_4 = g(t)(p_1p_2 + q_1), \tag{37}$$

等等. 对 I_2, I_3 和 I_4 不再分别求出对应的 Hamilton 函数,而是用守恒量条件(14)式检验.

将 I_2 与 H_1 代入(14)式成立;I_2 与 H_2 代入(14)式成立;I_2 与 H_3 代入(14)式不成立;I_2 与 H_4 代入(14)式不成立,故 H_3 与 H_4 弃去.

将 I_3 与 H_1 代入(14)式成立;I_3 与 H_2 代入(14)式不成立,故 H_2 弃去.

将 I_4 与 H_1 代入(14)式成立,故(33)式的 H_1 是待求的 Hamilton 函数.

6. 讨论与结论

本文研究了 Hamilton 系统 Noether 理论与动力学逆问题的关系,给出利用 Noether 对称性理论,从第一积分构建系统 Hamilton 函数以及导出对应对称变换的通用解法和若干特殊解法. 本文结果可以概括成:

1. 提出新型的 Hamilton 系统 Noether 理论逆问题,由守恒量构建系统的动力学特征函数 H; 同时对通常的 Noether 逆定理而言,也是一个突破和发展,在确定动力学特征函数 H 的同时,求出与守恒量对应的对称变换生成元和规范函数.

2. 发展了动力学逆问题,直接利用 Noether 对称理论从第一积分求 Hamilton 系统的动力学特征函数 H, 不需要先从第一积分求出运动微分方程,再将方程改写成自伴随形式后计算动力学特征函数;换句话说,对于由运动微分方程导出动力学特征函数问题,提供了一条新的路径,即先求出第一积分,再构建动力学特征函数.

3. 对 Hamilton 系统,给出了由第一积分导出 Hamilton 函数以及 Noether 对称变换的通用解法和若干特殊解法,全面讨论了 Hamilton 系统动力学特征函数、对称变换和运动守恒量三者之间的联系和转换关系.

4. 在上述讨论过程中,得到了由 Hamilton 函数直接导出守恒量的两条推论.

本文的研究可以推广到 Lagrange 系统和 Birkhoff 系统.

[1] Mei F X, Liu D, Luo Y 1991 *Advanced analytical mechanics* (Beijing: Beijing Institute of Technology Press) (in Chinese) [梅凤翔、刘端、罗勇 1991 高等分析力学 (北京:北京理工大学出版社)]

[2] Галиуллин А С 1986 *Методы решения обратных задач динамики* (Москва: Наука)

[3] Mei F X 1991 *Mechanics in Engineering* **13** 17 (in Chinese) [梅凤翔 1991 力学与实践 **13** 17]

[4] Luo S K, Zhang Y F 2008 *Advances in the Study of Dynamics of Constrained Systems* (Beijing: Science Press) (in Chinese) [罗绍凯、张永发等 2008 约束系统动力学研究进展 (北京:科学出版社)]

[5] Santilli R M 1978 *Foundations of Theoretical Mechanics* I (New York: Springer-Verlag)

[6] Santilli R M 1983 *Foundations of Theoretical Mechanics* II (New York: Springer-Verlag)

[7] Noether A E 1918 *Nachr. Akad. Wiss. Gottingen. Math. Phys.* K I II 235

[8] Zhao Y Y, Mei F X 1999 *Symmetries and Invariants of Mechanical Systems* (Beijing: Science Press) (in Chinese) [赵跃宇、梅凤翔 1999 力学系统的对称性与不变量 (北京:科学出版社)]

[9] Mei F X 1999 *Applications of Lie Groups and Lie Algebras to Constrained Mechanical Systems* (Beijing: Science Press) (in Chinese) [梅凤翔 1999 李群和李代数对约束力学系统的应用 (北京:科学出版社)]

[10] Li Z P 1981 *Acta Phys. Sin.* **30** 1659 (in Chinese) [李子平 1981 物理学报 **30** 1659]

[11] Liu D 1990 *Sci. China* A (11) 1189 (in Chinese) [刘端 1990 中国科学 A 辑 (11)1189]

[12] Li Z P 1991 *Chin. Sci. Bull* **36** 958 (in Chinese) [李子平 1991 科学通报 **36** 958]

[13] Mei F X 1993 *Sci. China* A **36** 1456

[14] Zhang Y, Shang M, Mei F X 2000 *Chin. Phys.* **9** 401

[15] Luo S K 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 2941 (in Chinese) [罗绍凯 2003 物理学报 **52** 2941]

[16] Goldstein H, Poole C, Safko J 2002 *Classical Mechanics* 3rd ed. (Redwood City: Addison-Wesley)

New kind of inverse problems of Noether's theory for Hamiltonian systems

Ding Guang-Tao†
(*The College of Physics and Electronic Information*, *Anhui Normal University*, *Wuhu* 241000, *China*)
(Received 24 May 2009; revised manuscript received 19 June 2009)

Abstract

In this paper, a new kind of inverse problems of Noether's theory for Hamiltonian systems is studied. The general solution and the specific solutions of constructing the Hamiltonians and the symmetries from known first integrals by using Noether's theory are obtained. Two corollaries according to which the conserved quantities can be deduced directly from the Hamiltonians are presented. Two examples are given to illustrate the application of the results.

Keywords: Noether's theory, Hamiltonian system, inverse problem, conserved quantity
PACC: 0320

† E-mail: dgt695@sina.com