

一维双组分玻色-爱因斯坦凝聚体系的量子隧穿特性

李高清¹⁾ 陈海军^{1)†} 薛具奎²⁾

1) (陇东学院物理与电子工程学院, 庆阳 745000)

2) (西北师范大学物理与电子工程学院, 兰州 730070)

(2009 年 7 月 19 日收到; 2009 年 8 月 26 日收到修改稿)

利用双模近似方法研究了一维双组分玻色-爱因斯坦凝聚体 (Bose-Einstein condensates, BECs) 的量子隧穿特性. 从描述三维双组分 BECs 系统的 Gross-Pitaevskii 方程 (GPE) 出发, 得到了描述一维体系的 GP 方程. 把体系波函数写成原子数和相位指数的乘积, 得到描述体系隧穿特性的费曼方程. 数值求解费曼方程, 研究了原子之间相互作用 (双组分 BECs 体系原子之间的相互作用包括组分内部原子之间的相互作用和不同组分原子之间的相互作用) 对隧穿特性的影响. 结果显示, 当原子之间的相互作用较弱时, 体系发生量子隧穿现象, 表现为原子数在平衡位置附近作周期振荡; 随着原子之间相互作用增强, 体系经历一个临界状态, 进入自俘获状态, 即由于原子之间相互作用的存在, 在对称双势阱中演化的 BECs 可以呈现出原子数高度的不对称分布, 好像绝多数原子被其中一个势阱俘获. 从隧穿到自俘获原子之间的相互作用存在一个临界值, 从而体系的能量也对应一个临界值, 根据体系的哈密顿函数, 就能求出相互作用临界值的表达式.

关键词: 隧穿, 自俘获, 相互作用, 双组分玻色-爱因斯坦凝聚

PACC: 0340K, 0530J, 0365

1. 引言

约瑟夫森效应^[1]是宏观量子干涉现象的直接证明, 在凝聚态物理, 量子光学和冷原子物理等领域有重要的理论和实际意义^[2]. 约瑟夫森效应是 1961 年约瑟夫森从理论上预言的效应, 在约瑟夫森结两端加上直流电压, 会在结中引起射频交变振荡电流, 若在此直流电压上进一步加上一定频率的射频交变振荡电压, 则会在结中引起直流电流. 约瑟夫森效应已经在超导和超流以及 BECs 体系中实现, 尤其在 BECs 体系中呈现出其它系统中没有的丰富的隧穿现象^[3-5]. 单组分 BEC 置于双势阱中的量子隧穿效应在理论上已有大量的研究, 主要考虑了双势阱中由于原子数和相位差值引起原子数的量子隧穿^[6-14]. 实验上实现了弱相互作用多组分原子体系的玻色-爱因斯坦凝聚^[15-18]给研究约瑟夫森效应提供了新的实验平台, 大量的研究集中于双势阱或单势阱中混合 BECs 或分离 BECs 的量子隧穿特性^[19-29].

本文利用双模近似方法研究了一维双组分玻

色-爱因斯坦凝聚体系的量子隧穿特性. 从描述三维双组分 BECs 系统的 Gross-Pitaevskii 方程 (GPE) 出发, 得到了描述一维体系的 GP 方程和它对应的无量纲形式. 为了研究双势阱中双组分 BECs 的隧穿特性, 把波函数写成原子数和相位指数的乘积, 得到描述体系隧穿特性的费曼方程. 双组分 BECs 体系由于组分之间原子相互作用的存在, 费曼方程中出现了组分之间的相互作用项, 可以呈现出单组分 BEC 系统没有的隧穿现象. 数值求解费曼方程, 研究了原子之间相互作用对隧穿特性的影响. 结果显示, 当原子之间的相互作用较弱时, 体系发生量子隧穿现象, 表现为粒子数在平衡位置附近作周期振荡; 最有意义的是随着原子之间相互作用增强, 体系经历一个临界状态, 进入自俘获状态^[4, 5, 19, 30-32], 即由于原子之间相互作用的存在, 在对称双势阱中演化的 BECs 可以呈现高度的不对称分布, 好像绝大多数原子被其中一个势阱俘获. 从隧穿到自俘获原子之间的相互作用存在一个临界值, 从而体系的能量也对应一个临界值, 根据体系的哈密顿函数, 可以给出对应的原子相互作用临界值的表达式, 从而给出关于自俘获现象的一般结论.

2. 模 型

在三维情况下,描述双组分 BECs 体系动力学行为的 Gross-Pitaevskii 方程(GPE)为

$$i\hbar \frac{\partial \Phi_k(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \left[-\frac{\hbar^2}{2m_k} \nabla^2 + V_k(\mathbf{r}) + U_{kk} |\Phi_k(\mathbf{r}, t)|^2 + U_{kl} |\Phi_l(\mathbf{r}, t)|^2 \right] \Phi_k(\mathbf{r}, t), \quad (1)$$

$\nabla^2 = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2$, 其中 $k, l = 1, 2, k \neq l$. m_k 是 k 组分单个原子的质量. 相互作用系数 $U_{kk} = 4\pi\hbar^2 a_{kk}/m_k$ 和 $U_{kl} = 2\pi\hbar^2 a_{kl}/m_{kl}$, 其中 $m_{kl} = m_k m_l / (m_k + m_l)$ 是约化质量. U_{kk} 和 U_{kl} 分别代表相同组分原子之间和不同组分原子之间的相互作用. 宏观波函数 $\Phi_k(\mathbf{r}, t)$ 满足归一化条件 $\int |\Phi_k(\mathbf{r}, t)|^2 d\mathbf{r} = N_k$. $V_k(\mathbf{r})$ 是第 k 组分原子所感受到的外势作用. 在一般的理论研究中, 取 $m \equiv m_1 = m_2$ 和 $V \equiv V_1 = V_2$.

当势阱的横向囚禁频率远大于轴向囚禁频率时, BECs 体系可看成准一维模型, 其横向处于基态, 波函数分解为

$$\Phi_k(\mathbf{r}, t) = \Psi_k(x, y; t) \varphi_k(z, t), \quad (2)$$

其中 $\Psi_k(x, y; t)$ 是横向的基态波函数

$$\Psi_k(x, y; t) = \sqrt{\frac{1}{\pi l_{k\perp}^2}} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{2l_{k\perp}^2}\right) \times \exp(-i\omega_{k\perp} t), \quad (3)$$

$l_{k\perp} = \sqrt{\hbar/(m\omega_{k\perp})}$ 是体系横向的波包宽度. 利用横向体系波函数满足的基态方程, 积分可以得到一维体系对应的 GPE,

$$i\hbar \frac{\partial \varphi_k(z, t)}{\partial t} = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial z^2} + V(z) + G_{kk} |\varphi_k(z, t)|^2 + G_{kl} |\varphi_l(z, t)|^2 \right] \varphi_k(z, t), \quad (4)$$

研究宏观量子隧穿效应, 势阱采用双势阱模型

$$V(z) = \frac{1}{2} m \omega_z^2 z^2 + \Gamma \exp\left(-\frac{z^2}{\Lambda^2}\right), \quad (5)$$

其中 Γ 和 Λ 分别是势垒的高度和宽度. 相互作用系数 $G_{kk} = U_{kk}/2\pi l_{k\perp}^2$, $G_{kl} = U_{kl}/(\pi l_{k\perp}^2 + \pi l_{l\perp}^2)$.

考虑无量纲化形式 $z' = z/l_z$, $t' = t/(2/\omega_z)$ 和 $\psi_k(z', t') = \varphi_k(z, t)/\sqrt{N_k/l_z}$, 其中 $l_z = \sqrt{\hbar/m\omega_z}$, 可以得到(为了方便, 省去“'”)

$$i \frac{\partial \psi_k(z, t)}{\partial t} = \left[-\frac{\partial^2}{\partial z^2} + V(z) \right.$$

$$\left. + g_{kk} |\psi_k(z, t)|^2 + g_{kl} |\psi_l(z, t)|^2 \right] \psi_k(z, t), \quad (6)$$

势阱

$$V(z) = z^2 + \gamma \exp\left(-\frac{z^2}{\lambda^2}\right), \quad (7)$$

相互作用系数 $g_{kk} = 4N_k a_{kk}/l_z$, $g_{kl} = 4N_l a_{kl}/l_z$, 已经假定了 $\omega_{1\perp} = \omega_{2\perp} = \omega_{\perp}$ 和 $\omega_{1z} = \omega_{2z} = \nu\omega_{\perp}$.

3. 隧穿分析

为了研究双势阱中双组分 BECs 体系的量子隧穿特性, 把波函数写成

$$\psi_k(z, t) = a_{k1}(t) b_{k1}(z) + a_{k2}(t) b_{k2}(z), \quad (8)$$

其中 $a_{ki}(t) = \sqrt{N_{ki}/N_k} \exp[i\theta_{ki}(t)]$, $|a_{k1}(t)|^2 + |a_{k2}(t)|^2 = N_{k1}/N_k + N_{k2}/N_k \equiv 1$, 代入方程(6)得到描述双组分 BECs 体系隧穿特性的费曼方程

$$i\dot{a}_{ki} = (\mathcal{E}_{ki}^0 + \mathcal{M}_{kk,i} N_{ki}/N_k + \mathcal{M}_{kl,i} N_{li}/N_l) a_{ki} - \mathcal{L}_{k,ij} a_{kj}, \quad (9)$$

其中

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{ki}^0 &= \int \left| \frac{d}{dz} b_{ki} \right|^2 dz + |b_{ki}|^2 V(z) dz, \\ \mathcal{M}_{kk,i} &= \frac{g_{kk}}{N_k} \int |b_{ki}|^4 dz, \\ \mathcal{M}_{kl,i} &= \frac{g_{kl}}{N_l} \int |b_{ki}|^2 |b_{li}|^2 dz, \\ \mathcal{L}_{k,ij} &= \int \left(\frac{d}{dz} b_{ki} \frac{d}{dz} b_{kj} \right) dz \\ &\quad - \int b_{ki}^* V(z) b_{ij} dz. \end{aligned} \quad (10)$$

双势阱中每一组分原子数的相对差值(The fractional population imbalance)和相位差(relative phase)分别是

$$\begin{aligned} z_k(t) &= (N_{k1} - N_{k2})/N_k, \\ \varphi_k(t) &= \theta_{k2}(t) - \theta_{k1}(t). \end{aligned} \quad (11)$$

从方程(9)和方程(10)可以得到 $z_k(t)$ 和 $\varphi_k(t)$ 的演化方程

$$\begin{aligned} \dot{z}_k(t) &= -\sqrt{1 - z_k^2(t)} \sin[\varphi_k(t)], \\ \dot{\varphi}_k(t) &= \Delta \mathcal{E}_k + \beta_{kk} z_k(t) + \beta_{kl} z_l(t) \\ &\quad + \frac{z_k(t)}{\sqrt{1 - z_k^2(t)}} \cos[\varphi_k(t)], \end{aligned} \quad (12)$$

其中, 时间的无量纲形式是 $2\mathcal{L}_{k,ij}t \rightarrow t$, 相互作用为

$$\Delta \mathcal{E}_k = \mathcal{E}_{k1}^0 - \mathcal{E}_{k2}^0 + \frac{1}{2} [(\mathcal{M}_{kk,1} - \mathcal{M}_{kk,2}) N_k + (\mathcal{M}_{kl,1} - \mathcal{M}_{kl,2}) N_l],$$
$$\beta_{kk} = \frac{1}{2} (\mathcal{M}_{kk,1} + \mathcal{M}_{kk,2}) N_k,$$
$$\beta_{kl} = \frac{1}{2} (\mathcal{M}_{kl,1} + \mathcal{M}_{kl,2}) N_l. \tag{13}$$

$$- \sqrt{1 - z_k^2} \cos \varphi_k. \tag{14}$$

从方程(12)可以看出, z_k 和 φ_k 是一组正则变量, 满足哈密顿正则方程 $\dot{z}_k = -\partial H_k / \partial \varphi_k$, $\dot{\varphi}_k = \partial H_k / \partial z_k$, 每一组分的哈密顿函数是

$$H_k = \frac{\beta_{kk}}{2} z_k^2 + \frac{\beta_{kl}}{2} z_k z_l + \Delta \mathcal{E}_k z_k$$

$$\beta_{kkc} = \frac{2H_c - \beta_{12c} z_k(0) z_l(0) - \Delta \mathcal{E}_k z_k(0) + 2 \sqrt{1 - z_k^2(0)} \cos \varphi_k(0)}{z_k^2(0)}. \tag{15}$$

数值求解方程(12), 结果如图 1, 2, 3 和 4 所示. 图 1 给出隧穿特性随组分内部原子之间相互作用的变化以及相平面 $(\varphi_k - z_k)$ 上的等值能量线, 其中组分之间原子的相互作用固定不变, $\beta_{12} = 0.5$. 当组分内部原子相互作用较弱时, 发生隧穿现象, 表现为原子数的差值做周期性振荡(图 1(a)), 两组分原子数差值的振荡是反向的, 当一组分原子数的

和力学中的单摆当能量达到一定值之后, 单摆沿正或反两个方向旋转起来类似, 双组分 BECs 体系能量超过某一临界值 H_c 之后, 体系就进入了自俘获状态, 即由于原子之间相互作用的存在, 在对称双势阱中演化的 BEC 可以呈现高度的不对称分布, $\langle z_k(t) \rangle \neq 0$, 好像绝大多数原子被其中一个势阱俘获^[30], 这种现象在实验中已经实现^[4,5]. 因此据方程(14)可以得出体系进入自俘获状态关于原子相互作用的临界条件是

差值减小时, 另一组分原子数的差值增大, 两种组分原子数的振荡不能同步. 当组分内部原子的相互作用增大时, 原子数的振荡频率先增大后减小(图 1(b), (c)), 这和单组分双模近似的结果是一致的^[31,32]. 当同种组分原子之间相互作用继续增强时, 体系会经历一个临界状态(图 1(d)) 进入自俘获状态(图 1(e)). 图 1(f) 是用相图 $(\varphi_k - z_k)$ 上等

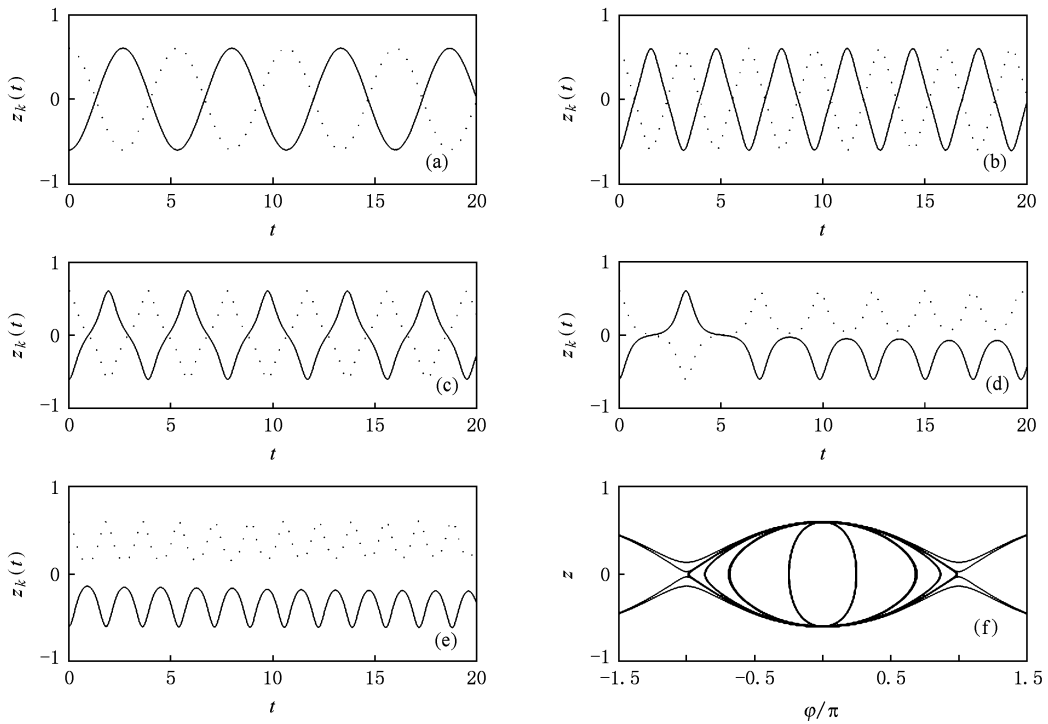


图1 原子数差值 $z_k(t)$ 随时间的变化以及相空间 $(z_k - \varphi_k)$ 中的定值能量线(f) ($\beta_{12} = 0.5, \varphi_1(0) = \varphi_2(0) = 0, z_1(0) = 0.6, z_2(0) = -0.6, \beta_{11} = \beta_{22} = 1$ (a), 8 (b), 10 (c), 10.5 (d), 11 (e))

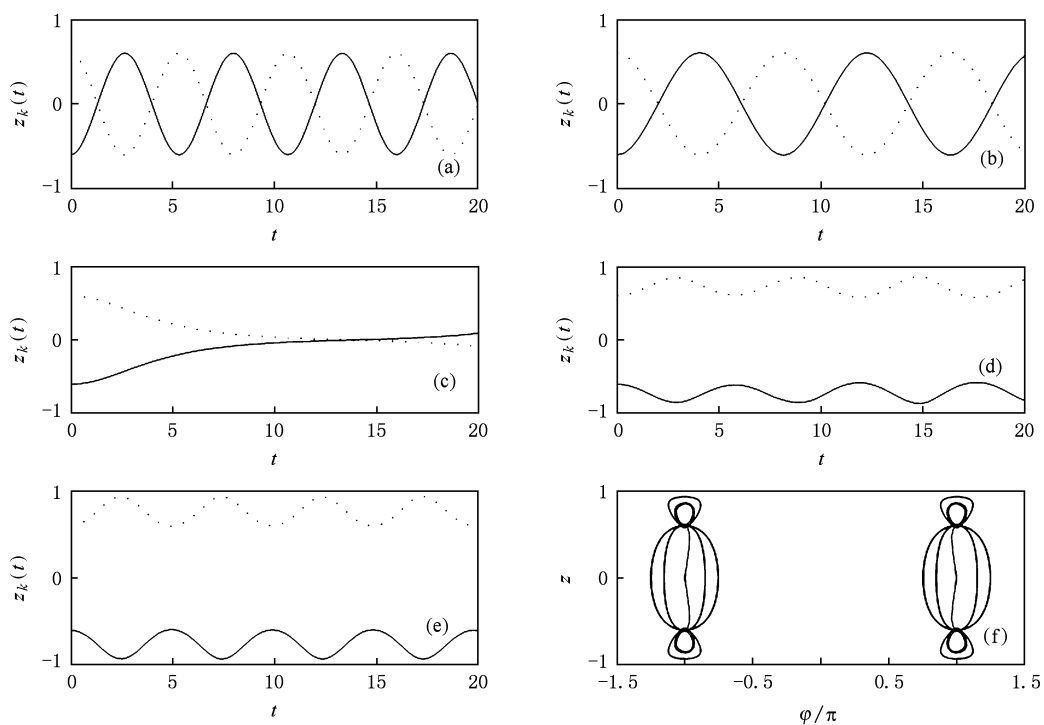


图2 原子数差值 $z_k(t)$ 随时间的变化以及相空间 $(z_k - \varphi_k)$ 中的定值能量线(f) ($\beta_{12} = 0.5, \varphi_1(0) = \varphi_2(0) = \pi, z_1(0) = 0.6, z_2(0) = -0.6, \beta_{11} = \beta_{22} = 0$ (a), 1 (b), 1.61111111 (c), 2 (d), 2.2 (e))

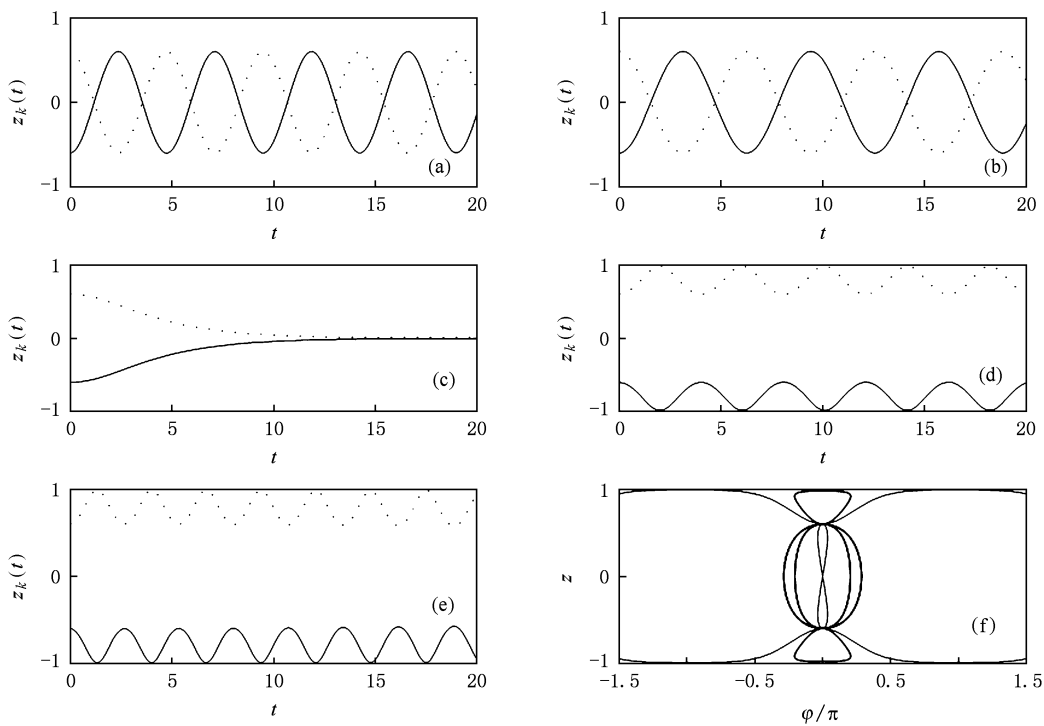


图3 原子数差值 $z_k(t)$ 随时间的变化以及相空间 $(z_k - \varphi_k)$ 中的定值能量线(f) ($\beta_{11} = \beta_{22} = 1, \varphi_1(0) = \varphi_2(0) = 0, z_1(0) = 0.6, z_2(0) = -0.6, \beta_{12} = 0$ (a), 1 (b), 2.11111111 (c), 3 (d), 4 (e))

值能量线对上述动力学行为的概括. 当能量较低时, 其回线接近于圆形, 对应于原子数的周期振荡.

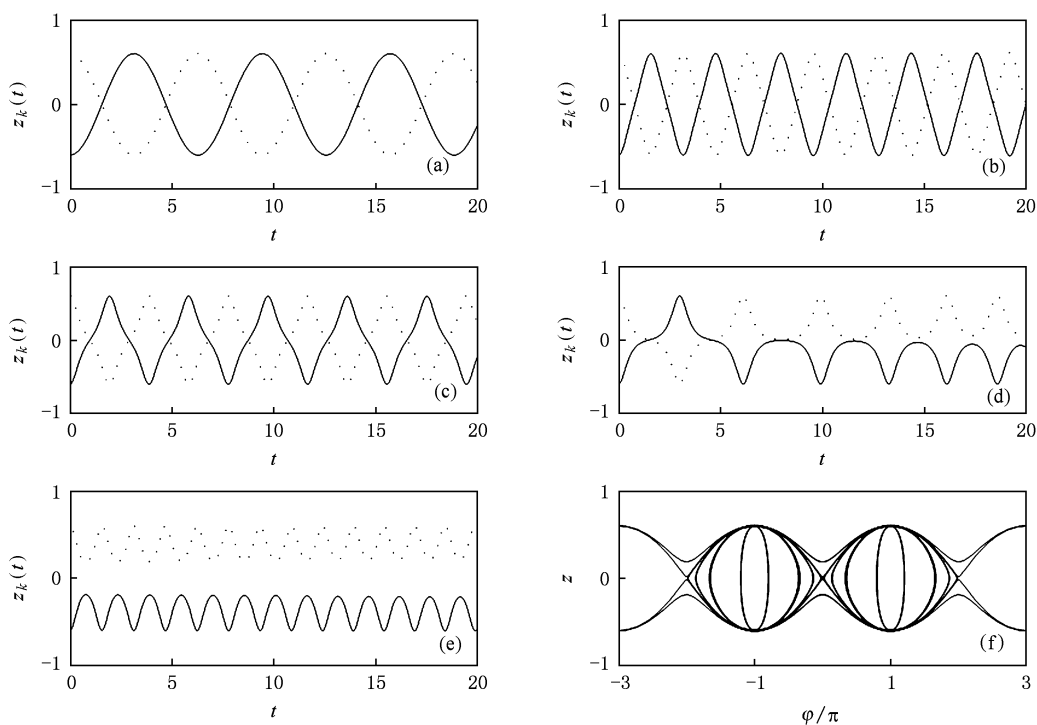


图4 原子数差值 $z_k(t)$ 随时间的变化以及相空间 $(z_k - \varphi_k)$ 中的定值能量线 (f) ($\beta_{11} = \beta_{22} = 1, \varphi_1(0) = \varphi_2(0) = \pi, z_1(0) = 0.6, z_2(0) = -0.6, \beta_{12} = 1$) (a), 8 (b), 10.5 (c), 11 (d), 12 (e))

当能量越高时,其回线越扁,且左右两端凸出,渐呈尖角状,对应于临界状态. 当能量进一步增高时,其轨线不再闭合,对应于自俘获状态.

图 2 给出的是体系在 $\varphi_1(0) = \varphi_2(0) = \pi$, 组分之间原子相互作用保持不变,不同的组分内部原子相互作用所对应的隧穿演化. 图 3 给出的是体系在 $\varphi_1(0) = \varphi_2(0) = 0$, 组分内部原子相互作用保持不变,不同的组分之间原子相互作用所对应的隧穿演化. 图 4 给出的是体系在 $\varphi_1(0) = \varphi_2(0) = \pi$, 组分内部原子相互作用保持不变,不同的组分之间原子相互作用所对应的隧穿演化.

在所有结果中原子数差值的初始值是相等的,所不同的是初相位. 当组分之间原子相互作用固定时,0 相位进入自俘获状态关于组分内部原子相互作用的临界值大于 π 相位进入自俘获状态关于组分内部原子相互作用的临界值. 而当组分内部原子相互作用固定时,0 相位进入自俘获状态关于组分之间原子相互作用的临界值小于 π 相位进入自俘获状态关于组分之间原子相互作用的临界值. 另外,可以看出,等值能量线图在分别固定组分内部

原子相互作用和组分之间原子相互作用时有完全不同的结果. 因此组分内部和组分之间原子相互作用在双组分 BECs 体系的宏观量子隧穿中有完全不同的作用.

4. 结 论

利用双模近似方法讨论了原子之间的相互作用对双组分 BECs 系统的宏观量子隧穿特性的影响. 双势阱中双组分 BECs 的量子隧穿受制于多种因素,例如初始相位差和原子数差值,势垒高度和宽度以及原子之间的相互作用. 本文主要考虑组分内部原子之间相互作用和组分之间原子相互作用的影响. 当原子之间的相互作用较弱时,体系发生宏观量子隧穿现象. 当原子之间的相互作用超过一个临界值以后,体系会进入自俘获状态. 另外,运用等值能量线在相图上对双组分的宏观隧穿特性进行了总结. 重要的是,原子之间的相互作用可以通过 Feshbach 共振技术调节,所以这样的结果可以通过实验来验证.

- [1] Josephson B D 1962 *Phys. Lett.* **1** 251
- [2] Xiong B, Liu X X, arXiv:cond-mat/0703327.
Xiong B, Zhang W P, Liu W M, arXiv:cond-mat/0703160.
- [3] Anderson B P, Kasevich M A 1998 *Science* **282** 1686
- [4] Anker T, Albiez M, Gati R, Hunsmann S, Eiermann B, Trombettoni A, Oberthaler M K 2005 *Phys. Rev. Lett.* **94** 020403
- [5] Albiez M, Gati R, Föolling J, Hunsmann S, Cristiani M, Oberthaler M K 2005 *Phys. Rev. Lett.* **95** 010402
- [6] Pedri P, Pitaevskii L, Stringari S, Fort C, Burger S, Cataliotti F S, Maddaloni P, Minardi F, Inguscio M 2001 *Phys. Rev. Lett.* **87** 220401
- [7] Adhikari S K 2003 *Eur. Phys. J. D* **25** 161
- [8] Burger S, Cataliotti F S, Fort C, Minardi F, Inguscio M, Chiofalo M L, Tosi M P 2001 *Phys. Rev. Lett.* **86** 4447
- [9] Kröaer M, Pitaevskii L, Stringari S 2002 *Phys. Rev. Lett.* **88** 180404
- [10] Adhikari S K 2005 *Phys. Rev. A* **72** 013619
- [11] Wang G F, Liu H 2008 *Acta. Phys. Sin.* **57** 0667 (in Chinese)
[王冠芳、刘 红 2008 物理学报 **57** 0667]
- [12] Liu Z Z, Yang Z A 2007 *Acta. Phys. Sin.* **56** 1245 (in Chinese)
[刘泽专、杨志安 2007 物理学报 **56** 1245]
- [13] Ma Y, Fu L B, Yang Z A, Liu J 2006 *Acta. Phys. Sin.* **55** 5623 (in Chinese)
[马 云、傅立斌、杨志安、刘 杰 2006 物理学报 **55** 5623]
- [14] Fang Y C, Yang Z A 2008 *Acta. Phys. Sin.* **57** 7438 (in Chinese)
[房永翠、杨志安 2008 物理学报 **57** 7438]
- [15] Yan D, Song L J, Chen D W 2009 *Acta. Phys. Sin.* **58** 3679 (in Chinese)
[严 冬、宋立军、陈殿伟 2009 物理学报 **58** 3679]
- [16] Chen H J, Xue J K 2008 *Acta. Phys. Sin.* **57** 3962 (in Chinese)
[陈海军、薛具奎 2008 物理学报 **57** 3962]
- [17] Li H M 2007 *Chin. Phys.* **16** 3187
- [18] Ren J R, Guo H 2009 *Chin. Phys. B* **18** 3379
- [19] Xiong H W, Liu S J, Zhan M S 2006 *Phys. Rev.* **73** 224505
- [20] Wen L H, Li J H 2007 *Phys. Lett. A* **369** 307
- [21] Kuang L M, Ouyang Z W 2000 *Phys. Rev. A* **61** 023604
- [22] Kasamatsu K, Yasui Y, Tsubota M 2001 *Phys. Rev. A* **64** 053605
- [23] Salmond G L, Holmes C A, Milburn G J 2002 *Phys. Rev. A* **65** 033623
- [24] Lee C, Hai W, Luo X, Shi L, Gao K 2003 *Phys. Rev. A* **68** 053614
- [25] Li F, Shu W X, Luo H L, Ren Z Z 2007 *Chin. Phys.* **16** 650
- [26] Xiong B, Liu X X 2007 *Chin. Phys. B* **16** 2578
- [27] Zhou L, Kong L B, Zhou M S 2008 *Chin. Phys. B* **17** 1601
- [28] Fang J S 2008 *Chin. Phys. B* **17** 3996
- [29] Fang Y C, Yang Z A, Yang L Y 2008 *Acta. Phys. Sin.* **57** 661 (in Chinese)
[房永翠、杨志安、杨丽云 2008 物理学报 **57** 661]
- [30] Wang G F, Fu L B, Zhao H, Liu J 2005 *Acta. Phys. Sin.* **54** 5003 (in Chinese)
[王冠芳、傅立斌、赵 鸿、刘 杰 2005 物理学报 **54** 5003]
- [31] Smerzi A, Fantoni S, Giovanazzi S, Shenoy S R 1997 *Phys. Rev. Lett.* **79** 4950
- [32] Raghavan S, Smerzi A, Fantoni S, Shenoy S R 1999 *Phys. Rev. A* **59** 620

One-dimensional tunneling dynamics between two-component Bose-Einstein condensates

Li Gao-Qing¹⁾ Chen Hai-Jun^{1)†} Xue Ju-Kui²⁾

1) (*Physics and Electronics Engineering College, Longdong University, Qingyang 745000, China*)

2) (*Physics and Electronics Engineering College, Northwest Normal University, Lanzhou 730070, China*)

(Received 19 July 2009; revised manuscript received 26 August 2009)

Abstract

One-dimensional quantum tunneling dynamics between two-component Bose-Einstein condensates confined in a double-well magnetic trap is investigated. One-dimensional Gross-Pitaevskii equations for two-component Bose-Einstein condensates are derived from the three-dimensional ones. We derive Feynman equations from one-dimensional Gross-Pitaevskii equations. To study tunneling dynamics we solve Feynman equations in terms of a completely numerical procedure. In contrast to single-component condensates between two-component condensates, we find that this system can take on abundant tunneling results, the full tunneling dynamical behavior is summarized in phase portrait with constant energy lines. It is found that this system can achieve self-trapping when increase interatomic interactions exceed a critical value. We give the analytical critical expressions of interatomic interactions from the system Hamiltonian.

Keywords: tunneling, self-trapping, interacting, two-component Bose-Einstein condensates

PACC: 0340K, 0530J, 0365

† E-mail: Chhaijun@163.com