

基于非均匀外场的双量子比特自旋 XYZ 模型的 swap 门操作^{*}

张国锋[†], 邢 钊

(北京航空航天大学物理科学与核能工程学院物理系, 北京 100191)

(2009 年 6 月 13 日收到; 2009 年 6 月 18 日收到修改稿)

自旋模型在实现量子信息处理中起着很重要的作用. 将自旋之间的海森堡相互作用作为最基本量子比特之间的相互作用, 将会使量子比特之间产生量子纠缠; 同时忽略掉自旋之间相互作用的各向异性可直接用来实现 (swap)ⁿ 量子门, 再配以单量子比特旋转门, 可构成完备的量子计算基本门. 事实上, 各向异性相互作用是存在于任何固态材料中的, 其对实现量子逻辑门的影响很值得研究. 本文讨论了在非均匀外场下 XYZ 模型的双量子比特 swap 门的实现问题, 给出非均匀外场以及各向异性相互作用导致的 swap 门操作的误差.

关键词: XYZ 模型, swap 门, 非均匀, 各向异性

PACC: 0365, 7510

1. 引 言

众所周知, 在量子计算中 C-NOT 门起着很重要的作用. 人们已经证明任何多量子比特系统的么正变换都能够通过单比特门和 C-NOT 门联合实现, 即 C-NOT 门是通用门. 在以自旋为基础的方案中, 单量子比特门对应于单自旋的旋转, 而双量子比特门的实现则主要是基于自旋间的交换相互作用. 在所有的双量子比特门中, 交换门 $U_{\text{swap}}(|\Psi\rangle \otimes |\Phi\rangle) = |\Phi\rangle \otimes |\Psi\rangle$ ^[1] 起着基础性的作用. 尽管交换门本身并不是通用门, 但是人们已经证明可以通过单比特门和 $(U_{\text{swap}})^{1/2}$ 的联合实现构建 C-NOT 门的操作^[2], 这也意味着 $(U_{\text{swap}})^{1/2}$ 是普适的.

量子计算的最终实现必然要求多量子比特的集成, 这将对原子、分子体系造成挑战. 尽管在固态量子计算方案 (核磁共振、超导、量子点) 中还没有成功演示控制的单量子比特操作, 但是原则上可以实现多量子比特的规模集成化. 固态方案里各种被考虑作为量子比特的微观自由度中, 电子或核自旋

由于是天然的双态系统, 且相对于其他自由度有更长的相干时间而备受青睐. 利用自旋来表示量子比特是因为自旋自由度在许多物理系统中可以用作量子比特, 或作为量子比特的等效模型. 自旋之间的海森堡相互作用可以在量子点、原子核自旋、电子自旋和光点阵等许多物理系统中实现. 目前基于自旋与自旋之间的海森堡相互作用构造量子纠缠出现了大量工作^[3-8]. 但是, 目前利用自旋间交换相互作用构造量子逻辑门的研究甚少. 文献[9]和[10]详细研究了考虑自旋-轨道耦合在内的双量子比特各向同性的 XXX 模型和非均匀外场中 XXZ 模型的 swap 门操作, 文献[11]利用代数动力学方法对三粒子自旋 XXZ 模型进行了严格求解, 讨论了一位量子逻辑门操作的实现问题. 事实上在实际的固体材料中自旋之间的相互作用通常是各向异性的, 也就是说在空间三个方向自旋之间的耦合都具有不同的强度. 本文主要集中于非均匀外场下双量子比特系统 XYZ 模型的 swap 门操作, 给出了非均匀外场和自旋交换相互作用的各向异性对实现 swap 门的影响, 进一步分析了实现 swap 操作的误差.

^{*} 国家自然科学基金 (批准号: 10604053 和 10874013) 资助的课题.

[†] E-mail: gfl978zhang@buaa.edu.cn

2. 模型与体系解

在非均匀磁场中, 交换相互作用各向异性的两自旋之间的哈密顿量可以写为

$$H = \frac{1}{2} [J(1 + \nu)\sigma_1^x\sigma_2^x + J(1 - \nu)\sigma_1^y\sigma_2^y + J_z\sigma_1^z\sigma_2^z + (B + b)\sigma_1^z + (B - b)\sigma_2^z], \quad (1)$$

其中 ν 描述了 x, y 方向的自旋耦合作用的差别, b, B 分别代表外磁场的非均匀和均匀部分且 $B \geq 0$. J 和 J_z 是实的耦合系数, 两者都大于零对应于反铁磁耦合, 都小于零对应于铁磁耦合^[12].

在标准基矢 $|11\rangle, |10\rangle, |01\rangle, |00\rangle$ 下, 很容易得出体系的本征值

$$\begin{aligned} E_1 &= -\sqrt{b^2 + J^2} - \frac{J_z}{2}, \\ E_2 &= \sqrt{b^2 + J^2} - \frac{J_z}{2}, \\ E_3 &= \frac{1}{2}(J_z - 2\sqrt{B^2 + (J\nu)^2}), \\ E_4 &= \frac{1}{2}(J_z + 2\sqrt{B^2 + (J\nu)^2}), \end{aligned} \quad (2)$$

相应的本征态为

$$\begin{aligned} |\psi_1\rangle &= \frac{\xi_-}{\sqrt{\xi_-^2 + 1}}|10\rangle + \frac{1}{\sqrt{\xi_-^2 + 1}}|01\rangle, \\ |\psi_2\rangle &= \frac{\xi_+}{\sqrt{\xi_+^2 + 1}}|10\rangle + \frac{1}{\sqrt{\xi_+^2 + 1}}|01\rangle, \\ |\psi_3\rangle &= \frac{\zeta_-}{\sqrt{\zeta_-^2 + 1}}|11\rangle + \frac{1}{\sqrt{\zeta_-^2 + 1}}|00\rangle, \\ |\psi_4\rangle &= \frac{\zeta_+}{\sqrt{\zeta_+^2 + 1}}|11\rangle + \frac{1}{\sqrt{\zeta_+^2 + 1}}|00\rangle, \end{aligned} \quad (3)$$

其中

$$\begin{aligned} \xi_{\pm} &= (b \pm \sqrt{b^2 + J^2})/J, \\ \zeta_{\pm} &= (B \pm \sqrt{B^2 + (J\nu)^2})/(J\nu). \end{aligned}$$

假定初态为

$$\begin{aligned} |\psi(0)\rangle &= {}_0^1(\alpha_1) \otimes {}_0^1(\beta_2) \\ &= \alpha_1\alpha_2|11\rangle + \alpha_1\beta_2|10\rangle \\ &\quad + \beta_1\alpha_2|01\rangle + \beta_1\beta_2|00\rangle, \end{aligned}$$

则在上述哈密顿量(1)的演化下该态演化为

$$\begin{aligned} |\Psi(t)\rangle &= a(t)|11\rangle + b(t)|10\rangle \\ &\quad + c(t)|01\rangle + d(t)|00\rangle. \end{aligned} \quad (4)$$

令 $\eta = \sqrt{B^2 + (J\nu)^2}$, $\varepsilon = \sqrt{b^2 + J^2}$. 并借助(3)式, 可以求得

$$\begin{aligned} a(t) &= e^{-iJ_z t/2} (Ae^{i\eta t} + Be^{-i\eta t})/2, \\ A &= \left(1 - \frac{B}{\eta}\right)\alpha_1\alpha_2 - \frac{J\nu}{\eta}\beta_1\beta_2, \\ B &= \left(1 + \frac{B}{\eta}\right)\alpha_1\alpha_2 + \frac{J\nu}{\eta}\beta_1\beta_2; \\ b(t) &= e^{iJ_z t/2} C(e^{i\eta t} - e^{-i\eta t})/2, \\ C &= -\frac{J}{\varepsilon}\alpha_2\beta_1 - \frac{b}{\varepsilon}\alpha_1\beta_2; \\ c(t) &= e^{iJ_z t/2} D(e^{i\eta t} - e^{-i\eta t})/2, \\ D &= \frac{b}{\varepsilon}\alpha_2\beta_1 - \frac{J}{\varepsilon}\alpha_1\beta_2; \\ d(t) &= e^{-iJ_z t/2} (Ee^{i\eta t} + Fe^{-i\eta t})/2, \\ E &= -\frac{J\nu}{\eta}\alpha_1\alpha_2 + \left(1 + \frac{B}{\eta}\right)\beta_1\beta_2; \\ F &= \frac{J\nu}{\eta}\alpha_1\alpha_2 + \left(1 - \frac{B}{\eta}\right)\beta_1\beta_2. \end{aligned} \quad (5)$$

3. swap 门操作误差分析

假定初态为 $\varphi(0) = \varphi_1(1,0) \otimes \varphi_2(2,0)$, 括号中的第一项和第二项分别指自旋序数和时间. 如果在体系哈密顿量的作用下在某个时间演化为 $\varphi = \varphi_2(2,0) \otimes \varphi_1(1,0)$, 那么理想的 swap 操作就实现了. swap 操作实质上是将一个直积态演化为另一个直积态. 但由于自旋之间交换相互作用, 两自旋的态一般会相互纠缠. 仅在某些特定的时间会演化为非纠缠态. 可以通过检验一个态在非纠缠的时候是否对应于量子态的交换来论证 swap 操作是否具有可实施性^[4].

根据(4)和(5)式, 可以得到体系在任意时刻的密度矩阵 $\rho_{12} = |\Psi(t)\rangle\langle\Psi(t)|$. 如果两量子比特体系处于一个直积态, 那么其中任意一个自旋态必须是纯态. 可以写出其中一个自旋的约化密度矩阵为

$$\begin{aligned} \rho_1 &= \begin{pmatrix} \rho_{1\uparrow\uparrow} & \rho_{1\uparrow\downarrow} \\ \rho_{1\downarrow\uparrow} & \rho_{1\downarrow\downarrow} \end{pmatrix}, \\ \rho_{1\uparrow\uparrow} &= |a(t)|^2 + |b(t)|^2, \\ \rho_{1\downarrow\downarrow} &= |c(t)|^2 + |d(t)|^2, \\ \rho_{1\uparrow\downarrow} &= a(t)c^*(t) + b(t)d^*(t), \\ \rho_{1\downarrow\uparrow} &= \rho_{1\uparrow\downarrow}^*. \end{aligned} \quad (6)$$

从文献[4]知道, 当 $\nu = 0, b = 0$ 时, 为了实现 swap 操作, 第一个自旋应该达到的状态为

$|\psi_{1\text{理想}}\rangle = \alpha_2 |1\rangle + (-1)^{\frac{n-m}{2}} \beta_2 e^{iBt} |0\rangle$, (7)
其中 n 与 m 是整数. 此时除了附加的位相外(附加的位相可以通过单自旋的旋转得以纠正), 理想的 swap 操作已经实现. 可以计算出在 $\nu \neq 0, b \neq 0$ 时其中一个自旋态演化到 $|\psi_{1\text{理想}}\rangle$ 上的概率 p , 进而用 $\Delta = 1 - p$ 来估算实际 swap 门与理想交换门之间的误差

$$p = (\alpha_2^* \quad (-1)^{\frac{n-m}{2}} \beta_2^* e^{-iBt}) \rho_1 \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ (-1)^{\frac{n-m}{2}} \beta_2 e^{iBt} \end{pmatrix}, \tag{8}$$

很容易得到

$$\begin{aligned} p = & \left[\frac{1}{4} (|A|^2 + |B|^2) + |C|^2 \right] |\alpha_2|^2 \\ & + \left[\frac{1}{4} (|E|^2 + |F|^2) + |D|^2 \right] |\beta_2|^2 \\ & + \left[\frac{1}{4} (AB^* |\alpha_2|^2 + EF^* |\beta_2|^2) \right. \\ & \left. - \frac{1}{2} (AD^* + CF^*) \alpha_2^* \beta_2 \right] e^{i2Bt} \\ & + \left[\frac{1}{4} (A^* B |\alpha_2|^2 + E^* F |\beta_2|^2) \right. \\ & \left. - \frac{1}{2} (A^* D + C^* F) \alpha_2 \beta_2^* \right] e^{-i2Bt} \\ & - \frac{1}{2} [(BD^* + CE^*) \alpha_2^* \beta_2 \\ & + (B^* D + C^* E) \alpha_2 \beta_2^*]. \end{aligned} \tag{9}$$

利用 $ae^{i\varphi}e^{i\varphi(t)} + ae^{-i\varphi}e^{-i\varphi(t)} = 2a\cos(\varphi + \varphi(t)) \in [-2, 2]$, (9) 式可以得到最大概率与最小概率的解析表达式

$$p_{\min} = P - Q; p_{\max} = P + Q, \tag{10}$$

其中

$$\begin{aligned} P = & \left[\frac{1}{4} (|A|^2 + |B|^2) + |C|^2 \right] |\alpha_2|^2 \\ & + \left[\frac{1}{4} (|E|^2 + |F|^2) + |D|^2 \right] |\beta_2|^2 \\ & - \frac{1}{2} [(BD^* + CE^*) \alpha_2^* \beta_2 \\ & + (B^* D + C^* E) \alpha_2 \beta_2^*]; \\ Q = & \left| \frac{1}{2} (AB^* |\alpha_2|^2 + EF^* |\beta_2|^2) \right. \\ & \left. - (AD^* + CF^*) \alpha_2^* \beta_2 \right|. \end{aligned} \tag{11}$$

令 $\mu = J\nu/B, \delta = b/J$, 并且假定都为小量, 在计算中只保留其二阶小量.

$$\begin{aligned} P = & (1 - \frac{1}{2}\mu^2) (|\alpha_1\alpha_2|^2 + |\beta_1\beta_2|^2) \\ & + (1 - \delta^2) (|\alpha_2^2\beta_1|^2 + |\alpha_1\beta_2^2|^2) \\ & + \frac{1}{4}\mu^2\delta(\alpha_1\alpha_2^*\beta_1^*\beta_2 \\ & + \alpha_1^*\alpha_2\beta_1\beta_2^*)(|\alpha_2|^2 - |\beta_2|^2) \\ & + \frac{1}{4}\mu\delta^2(\alpha_1^*\alpha_2^*\beta_1\beta_2 \\ & + \alpha_1\alpha_2\beta_1^*\beta_2^*)(|\alpha_2|^2 - |\beta_2|^2) \\ & + (2 + \frac{1}{4}\mu^2\delta^2) |\alpha_2\beta_2|^2 \\ & - \frac{1}{2}\mu\delta[(\alpha_2^*\beta_2)^2 + (\alpha_2\beta_2^*)^2]; \\ Q = & \frac{1}{2} (|\alpha_1\alpha_2|^2 - |\alpha_1\beta_2|^2 + |\beta_2|^4)\mu^2 \\ & - \frac{1}{2}(\mu^2\delta\alpha_1\alpha_2^*\beta_1^*\beta_2 \\ & + \mu\delta^2\alpha_1^*\alpha_2^*\beta_1\beta_2)(|\alpha_2|^2 - |\beta_2|^2) \\ & - \frac{1}{4}\mu^2\delta^2 |\alpha_2\beta_2|^2 + \mu\delta(\alpha_2^*\beta_2)^2. \end{aligned} \tag{12}$$

4. 计算结果讨论

显然, 当 $\delta, \mu \neq 0$ 时, 无论是 $p_{\min}$ 还是 $p_{\max}$ 都与 $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ 的相位有关, 这不方便给出直观图像, 讨论两种特殊情况.

1) 均匀磁场 B 很大或者 x, y 方向耦合相差很小, 也即 $\mu \rightarrow 0$, 可以得到

$$\begin{aligned} p = p_{\max} = p_{\min} = & 1 - (|\alpha_2^2\beta_1|^2 + |\alpha_1\beta_2^2|^2)\delta^2; \\ \Delta = 1 - p = & (|\alpha_1|^2 - 2|\alpha_1|^2|\alpha_2|^2 \\ & + |\alpha_2|^4)\delta^2. \end{aligned} \tag{13}$$

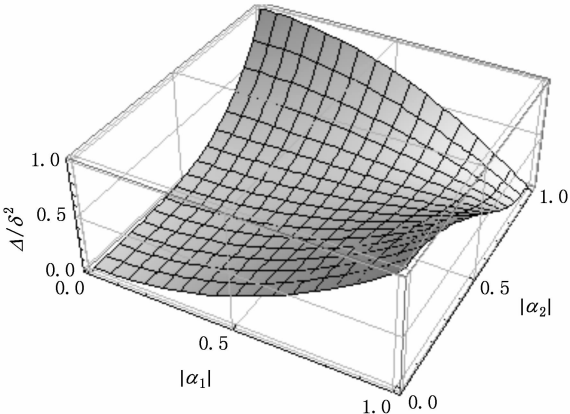


图 1 均匀磁场 B 很大或者 x, y 方向耦合相差很小时 swap 操作的误差

从图 1 可以看出, 当 $(|\alpha_1|, |\alpha_2|) = (0, 0)$ 或 $(1, 1)$ 附近时, swap 的误差达到最小; 当 $(|\alpha_1|, |\alpha_2|) = (0, 1)$ 或 $(1, 0)$ 附近时, 交换门的误差达到最大, 值为 δ^2 由非均匀磁场 b 和 J 共同决定, 而与磁场的均匀部分没有关系.

2) $\delta = 0$, 或者说 $\delta \ll \mu$, 即非均匀磁场很小时,

$$\begin{aligned} p_{\min} &= 1 - (1 - |\alpha_1|^2 - 2|\alpha_2|^2 \\ &\quad + 2|\alpha_1|^2|\alpha_2|^2 + |\alpha_2|^4)\mu^2; \\ p_{\max} &= 1; \\ \Delta_{\min} &= 1 - p_{\max} = 0; \\ \Delta_{\max} &= 1 - p_{\min} = (1 - |\alpha_1|^2 - 2|\alpha_2|^2 \\ &\quad + 2|\alpha_1|^2|\alpha_2|^2 + |\alpha_2|^4)\mu^2. \end{aligned} \quad (14)$$

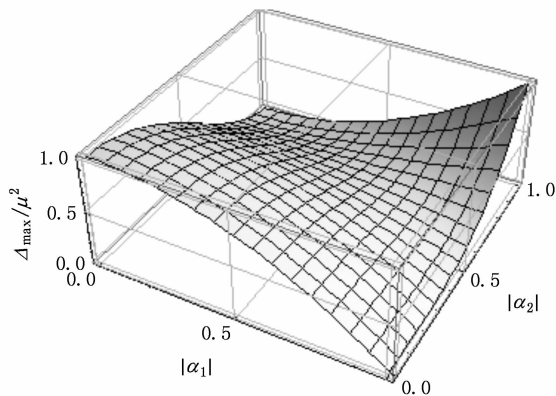


图 2 $\delta = 0$, 或者说 $\delta \ll \mu$, 时 swap 的最大误差

由图 2 可以很明显地看出, 在靠近 $(|\alpha_1|, |\alpha_2|) = (0, 1)$ 或者 $(1, 0)$ 处 swap 门的最大误差 $\Delta_{\max}$ 最小值为 0; 而在 $(|\alpha_1|, |\alpha_2|) = (0, 0)$ 或者 $(1, 1)$ 处 swap 门的最大误差最大, 值为 μ^2 , 由均匀磁场 B, J 和 ν 共同决定, 而与磁场的非均匀部分没有关系.

3) δ 与 μ 为任意值时, swap 门的误差不仅与初始态的幅度有关, 而且也与初始态的相位有关系. 误差的最大值为 $\Delta_{\max} = X + Y$, 最小值为 $\Delta_{\min} = X - Y$ 其中

$$\begin{aligned} X &= \frac{1}{2}\mu^2(|\alpha_1\alpha_2|^2 + |\beta_1\beta_2|^2) \\ &\quad + \delta^2(|\alpha_2\beta_1|^2 + |\alpha_1\beta_2|^2) \\ &\quad - \frac{1}{4}\mu^2\delta(\alpha_1\alpha_2^* \beta_1^* \beta_2 \\ &\quad + \alpha_1^* \alpha_2 \beta_1 \beta_2^*)(|\alpha_2|^2 - |\beta_2|^2) \\ &\quad - \frac{1}{4}\mu\delta^2(\alpha_1^* \alpha_2^* \beta_1 \beta_2 \\ &\quad + \alpha_1 \alpha_2 \beta_1^* \beta_2^*)(|\alpha_2|^2 - |\beta_2|^2) \\ &\quad - \frac{1}{4}\mu^2\delta^2|\alpha_2\beta_2|^2 + \frac{1}{2}\mu\delta[(\alpha_2^* \beta_2)^2 \\ &\quad + (\alpha_2 \beta_2^*)^2]; \\ Y &= \left| \frac{1}{2}(|\alpha_1\alpha_2|^2 - |\alpha_1\beta_2|^2 + |\beta_2|^4)\mu^2 \right. \\ &\quad - \frac{1}{2}(\mu^2\delta\alpha_1\alpha_2^* \beta_1^* \beta_2 \\ &\quad + \mu\delta^2\alpha_1^* \alpha_2^* \beta_1 \beta_2)(|\alpha_2|^2 - |\beta_2|^2) \\ &\quad \left. - \frac{1}{4}\mu^2\delta^2|\alpha_2\beta_2|^2 + \mu\delta(\alpha_2^* \beta_2)^2 \right|. \end{aligned} \quad (15)$$

5. 结 论

本文详细研究了自旋间相互作用的各向异性以及外磁场对实现 swap 门的影响. 给出了一般情况下实际 swap 与理想 swap 门之间的误差表达式, 并对特殊情况给予了直观描述: 在均匀磁场 B 很大或者 x, y 方向耦合相差很小时, swap 门的误差为 $\Delta = (|\alpha_1|^2 - 2|\alpha_1|^2|\alpha_2|^2 + |\alpha_2|^4)\delta^2$, 其幅度由非均匀磁场 b 和 J 共同决定, 而与磁场的均匀部分没有关系. 此结论与参考文献[10]中得到的结论是一致的; 在外加非均匀磁场比较小时 swap 门实现的最大误差为 $\Delta_{\max} = (1 - |\alpha_1|^2 - 2|\alpha_2|^2 + 2|\alpha_1|^2|\alpha_2|^2 + |\alpha_2|^4)\mu^2$, 其幅度由均匀磁场 B, J 和 ν 共同决定, 而与磁场的非均匀部分没有关系; 一般情形下误差介于 $\Delta_{\min}$ 与 $\Delta_{\max}$ 之间, 不仅依赖于外加磁场和自旋间耦合作用强度, 还与初始态的幅值和相位都有关系.

[1] Brassard G, Braunstein S L, Cleve R 1998 *Physica D* **120** 43
[2] Loss D, DiVincenzo D P 1998 *Phys. Rev. A* **57** 120
[3] Zhang G F, Li S S 2006 *Optics Communications* **260** 347
Zhang G F, Li S S 2006 *Eur. Phys. J. D* **37** 123

[4] Cai Z, Lu W B, Liu Y J 2008 *Acta. Phys. Sin.* **57** 7267 (in Chinese) [蔡 卓、陆文彬、刘拥军 2008 物理学报 **57** 7267]
[5] Qin M, Tian D P, Tao Y J 2008 *Acta. Phys. Sin.* **57** 5395 (in Chinese) [秦 猛、田东平、陶应娟 2008 物理学报 **57** 5395]

- [6] Shan C J, Chen W W, Liu T K, Huang Y X, Li H 2008 *Chin. Phys. B* **17** 4002
- [7] Huang L Y, Fang M F 2008 *Chin. Phys. B* **17** 2339
- [8] Xi X Q, Liu W M 2007 *Chin. Phys.* **16** 1858
- [9] Zhang G F 2007 *J. Phys. : Cond. Matter* **19** 456205
- [10] Zhou Y, Zhang G F, Yang F H, Feng S L 2007 *Phys. Rev. A* **75** 062304
- [11] Yan X B, Wang S J 2006 *Acta. Phys. Sin.* **55** 1591 (in Chinese) [严晓波、王顺金 2006 物理学报 **55** 1591]
- [12] Zhang G F, Li S S 2005 *Phys. Rev. A* **72** 034302

Swap operation in a two-qubit anisotropy XYZ model in the presence of an inhomogeneous magnetic field^{*}

Zhang Guo-Feng[†] Xing Zhao

(Department of Physics, School of Physics and Nuclear Energy Engineering, Beijing University of Aeronautics & Astronautics, Beijing 100191, China)

(Received 13 June 2009; revised manuscript received 18 June 2009)

Abstract

Spin model plays an important role in the realization of quantum information processing. Quantum entanglement can be constructed, also (swap)ⁿ quantum logic gate is available if anisotropy is ignored, when Heisenberg interaction between spins is used; thus a complete quantum computing gate will be realized by combining single-qubit rotation gate. To study the influence of anisotropy on logic gate has high academic value since anisotropy is inevitable in any solid material. In this paper, swap operation in a two-qubit anisotropy XYZ model in the presence of an inhomogeneous magnetic field is discussed. The swap errors caused by the anisotropy parameter ν of the exchange interaction between spins and the inhomogeneous field δ are evaluated. We can see clearly when the swap operation can be approximately used as an ideal swap gate.

Keywords: XYZ model, swap operation, inhomogeneous, anisotropy

PACC: 0365, 7510

^{*} Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 10604053 and 10874013).

[†] E-mail: gfl978zhang@buaa.edu.cn