

一类扰动海-气耦合振子机理的近似解^{*}

周先春¹⁾ 林万涛²⁾ 林一骅²⁾ 莫嘉琪^{3)†}

1) (南京信息工程大学, 电子与信息工程学院, 南京 210044)

2) (中科院大气物理研究所, 大气科学和地球流体力学数值模拟国家重点实验室, 北京 100029)

3) (安徽师范大学数学系, 芜湖 241000)

(2009 年 6 月 29 日收到; 2009 年 8 月 5 日收到修改稿)

考虑了一个全球气候扰动海-气热盐循环的箱域模型. 利用同伦映射方法, 研究了一类非线性模型. 得到了模型的近似解. 同伦映射求解方法是一个解析方法, 得到的解还能继续进行解析运算. 从而再可研究有关物理量的各种定性、定量的性态.

关键词: 海-气耦合振子, 同伦映射, 近似解, El Niño-南方涛动

PACC: 0230

1. 引言

全球气候是当前学术界备受关注的对象. Rooth^[1]引入了全球气候两半球间海-气热盐循环 (thermohaline circulation, THC) 的一个箱域模型. 近来, Scott 等^[2]用近似解析方法阐述了两半球间 THC 耦合海-气箱域模型在海洋中盐度的时间变化比温度的时间变化更慢的理论^[3]. 本文是进一步用近似解析解来讨论一类全球气候两半球间扰动海-气耦合振子机理的渐近性态.

大气物理问题是描述十分复杂的自然现象, 因此人们常将这类自然现象在一定的条件下把它简化为非线性数学模型, 然后用近似理论去研究它. 近来, 许多近似方法被研究和优化, 例如伸缩变量法、平均化方法, 边界层方法, 匹配法、多尺度法等等. 许多学者用不同方法作了大量的工作, 例如 Hovhannisyan 和 Vulcanovic^[4], Graef 和 Kong^[5], Barbu 和 Cosma^[6] 以及 Ramos^[7]. 莫嘉琪等^[8-15]也用微分不等式等方法研究了非线性问题的激波, 孤波, 激光脉冲^[16,17], 海洋科学^[18-21]和大气物理^[22-25]等问题. 本文是利用一个简单而有效的同伦映射方法^[26,27]来求解一类全球气候海-气耦合振子

的 THC 模型.

2. 非线性海-气耦合振子模型

考虑对应于大西洋、太平洋赤道海域上的影响全球气候海-气耦合 THC 机理. 设定其海域由三个连接的箱域: 一个为赤道箱域和两个相邻纬度箱域组成. 两个相邻纬度箱域为相同的尺度, 赤道箱域的体积与相邻纬度箱域的体积之比为 V . 各海洋箱域的温度和盐度分别为 $T_i, S_i (i = 1, 2, 3)$. 我们得到一个盐度的简化模型的非线性方程^[2,3]

$$\begin{aligned} & \frac{d^2 Z}{dt_1^2} + Z \\ &= \mu^2 K_1 Z' + \mu Z^2 (-1 + M + \mu MZ) \\ &+ \mu Z' \left(2LZ + M \frac{Z' - \mu LZ^2 + \mu^2 K_1 Z}{-1 + \mu MZ} \right) + f(Z), \end{aligned} \quad (1)$$

其中 $Z = (S_s - S_N - 1) / (1 + \eta(1 + \delta mb)\mu)$, 是与海洋箱域相联系的一个函数, 而 $f(Z)$ 为相关的扰动项. 通过对方程的求解, 能引发出我们感兴趣的其它物理量. 为了得到形如方程(1)的简化形式, 我们把 $t_1 = \frac{c \sqrt{(1+2/V)} \eta_t}{\sqrt{A}}$ 看作为独立变量, 与时间 t

^{*} 国家自然科学基金 (批准号: 40876010)、中国科学院知识创新工程重要方向性项目 (批准号: KZCX2-YW-Q03-08)、LASG 国家重点实验室专项经费、公益性行业 (气象) 科研专项 (批准号: GYHY200806010)、浙江省自然科学基金 (批准号: 6090164)、上海市教育委员会 E-研究院建设计划 (批准号: E03004) 和江苏省高校自然科学研究计划项目 (批准号: 08KJB510010) 资助的课题.

[†] 通讯联系人. E-mail: mojqiaqi@mail.ahnu.edu.cn

直接关联, μ 为相应的系数, 而

$$\begin{aligned} S_s &= \frac{S_2 - S_1}{\Delta S}, \\ S_n &= \frac{S_2 - S_3}{\Delta S}, \\ L &= -\frac{1 + 2V}{\sqrt{V(2 + V)A\eta}}, \\ M &= -\frac{1}{A\eta}, \\ \mu^2 K_1 &= K = -\frac{\sqrt{A}}{\sqrt{(1 + 2/V)\eta}}P, \\ A &= \frac{1}{1 + \eta(1 + \delta mb)}, \\ \eta &= \frac{(\lambda + \chi/\varepsilon)(\lambda + n\chi/\varepsilon + k\alpha\Delta T)}{(\lambda + n\chi/\varepsilon)(\lambda + \chi/\varepsilon + k\alpha\Delta T)}, \\ P &= 1 + (2 + \frac{1}{V})\eta - (1 - \delta_1)\frac{\gamma_n}{\gamma_s} \\ &\quad - m\delta\eta\left(\frac{\gamma_n}{\gamma_s} + \frac{c\gamma_n}{\gamma_s} - c\right), \\ \gamma_n &= \frac{1}{\varepsilon_{WN}}\frac{S_0\gamma_1\Delta T}{D}, \\ \gamma_s &= \frac{1}{\varepsilon_{WS}}\frac{S_0\gamma_1\Delta T}{D}, \\ \delta &= k\beta\Delta S/(\lambda + \chi_1^n/\varepsilon + k\alpha\Delta T), \\ \delta_1 &= k\beta\Delta S/(\lambda + \chi_1/\varepsilon + k\alpha\Delta T), \\ b &= A/V(\lambda + n\chi_1(1 + 2/V)/\varepsilon), \\ c &= (\lambda + n\chi_1/\varepsilon)\delta/(\lambda + \chi_n/\varepsilon + k\alpha\Delta T), \\ \Delta S &= S_1 - S_3, \Delta T = T_2 - T_1, \end{aligned}$$

且 α, β 为热、盐水膨胀系数, k 为一个相应参数, λ 为关系到全球的平均温度, n 和 m 为热量和湿度传播指数, χ_n 和 γ_m 为北半球相应的的功效, D 为海洋深度, S_0 为参照盐度, ε_{WN} 和 ε_{WS} 分别为北、南半球由海域到盆地的变率, ε 为在相同的箱域下海域与总区域的变率. 方程(1)的详细推导可参见文献[2, 3]. 在本文中从略.

3. 模型解的同伦映射法

引入一个同伦映射^[26, 27] $H(Z, p): X \times I \rightarrow R$:

$$\begin{aligned} H(Z, p) &= L(Z) - L(z_0) + p(L(z_0) \\ &\quad - F(Z, Z')), \end{aligned} \quad (2)$$

其中 $Z \in [0, \infty)$, $I \in [0, 1]$, $R \in (-\infty, +\infty)$, 线

性算子 $L(Z) = \frac{d^2 Z}{dt_1^2} - \mu^2 K_1 \frac{dZ}{dt_1} + Z$, z_0 为原方程(1)

的零次近似, 而

$$\begin{aligned} &F(Z, Z') \\ &= \mu Z^2(-1 + M + \mu MZ) \\ &\quad + \mu Z' \left(2LZ + M \frac{Z' - \mu LZ^2 + \mu^2 K_1 Z}{-1 + \mu MZ} \right) + f(Z). \end{aligned}$$

显然, 由(2)式知, $H(Z, 1) = 0$ 就是方程(1). 故方程(1)的解 $Z(t_1)$ 就是 $H(Z, p) = 0$ 的解当 $p \rightarrow 1$ 的极限情形.

考虑

$$H(Z, p) = 0. \quad (3)$$

设

$$Z = \sum_{i=0}^{\infty} Z_i(t) p^i. \quad (4)$$

将(4)式代入(3)式, 展开非线性项为 p 的幂级数, 比较等式两边 p 的同次幂的系数. 由 p 的零次幂的系数, 可得 $L(Z_0) = L(z_0)$. 这时我们可取 $Z_0 = z_0$

为 $L(Z) = \frac{d^2 Z}{dt_1^2} - \mu^2 K_1 \frac{dZ}{dt_1} + Z = 0$ 的解.

$$\begin{aligned} Z_0(t_1) &= \exp(\mu^2 K_1 t_1 / 2) (C_1 \cos \sqrt{1 - (\mu^2 K_1 / 2)^2} t_1 \\ &\quad + C_2 \sin \sqrt{1 - (\mu^2 K_1 / 2)^2} t_1), \end{aligned} \quad (5)$$

其中 $C_i (i = 1, 2)$ 为任意常数.

由 p 的一次幂的系数, 可得

$$LZ_1 = F_1(t_1). \quad (6)$$

其中

$$\begin{aligned} F_1(t_1) &= \mu Z_0^2(-1 + M + \mu MZ_0) + \mu dZ_0/dt_1 \left(2LZ_0 \right. \\ &\quad \left. + M \frac{dZ_0/dt_1 - \mu LZ_0^2 + \mu^2 K_1 Z_0}{-1 + \mu MZ_0} \right) \\ &\quad + f(Z_0). \end{aligned} \quad (7)$$

(7)式中的 $Z_0(t_1)$ 由(5)式决定. 不难得到方程(6)的解为

$$\begin{aligned} Z_1(t_1) &= \exp(\mu^2 K_1 t_1 / 2) [\cos \sqrt{1 - (\mu^2 K_1 / 2)^2} t_1 \\ &\quad + \sin \sqrt{1 - (\mu^2 K_1 / 2)^2} t_1] \\ &\quad \times \left[\int_0^{t_1} -\frac{F_1(\xi) \sin \sqrt{1 - (\mu^2 K_1 / 2)^2} \xi}{\sqrt{1 - (\mu^2 K_1 / 2)^2} \exp(\mu^2 K_1 \xi / 2)} d\xi \right]. \end{aligned} \quad (8)$$

由 p 的二次幂的系数, 可得

$$LZ_2 = F_2(t_1). \quad (9)$$

其中

$$\begin{aligned} F_2(t_1) &= 3\mu^2 MZ_0^2 Z_1 + 2\mu(-1 + M)Z_0 Z_1 \\ &\quad + 2\mu L \left(\frac{dZ_0}{dt_1} Z_1 + Z_0 \frac{dZ_1}{dt_1} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & + \frac{\mu M}{(-1 + \mu M Z_0)^2} \left[(-1 + \mu M Z_0) \right. \\ & \times \left[\left(\frac{dZ_0}{dt_1} - \mu L Z_0^2 + \mu^2 K_1 Z_0 \right) \frac{dZ_1}{dt_1} \right. \\ & + \left(\frac{dZ_1}{dt_1} - 2\mu L Z_0 Z_1 + \mu^2 K_1 Z_1 \right) \frac{dZ_0}{dt_1} \\ & - \mu M Z_1 \left(\frac{dZ_0}{dt_1} - \mu L Z_0^2 + \mu^2 K_1 Z_0 \right) \frac{dZ_0}{dt_1} \\ & \left. \left. + f_Z(Z_0) Z_1 \right] \right] \end{aligned} \tag{10}$$

(10) 式中的 $Z_0(t_1)$ 和 $Z_1(t_1)$ 分别由 (5) 和 (8) 式决定. 不难得到方程 (9) 的解为

$$\begin{aligned} Z_2(t_1) = & \exp(\mu^2 K_1 t_1 / 2) \\ & \times [\cos \sqrt{1 - (\mu^2 K_1 / 2)^2} t_1 \\ & + \sin \sqrt{1 - (\mu^2 K_1 / 2)^2} t_1] \\ & \times \left[\int_0^t \frac{F_2(\xi) \cos \sqrt{1 - (\mu^2 K_1 / 2)^2} \xi}{\sqrt{1 - (\mu^2 K_1 / 2)^2} \exp(\mu^2 K_1 \xi / 2)} d\xi \right]. \end{aligned} \tag{11}$$

于是由 (4) 式, 令 $p = 1$, 并由 (5), (8) 和 (11) 式, 便得到了方程 (1) 的二次近似的解:

$$\begin{aligned} Z_{\text{hom}}(t_1) \approx & \exp(\mu^2 K_1 t_1 / 2) \\ & \times (C_1 \cos \sqrt{1 - (\mu^2 K_1 / 2)^2} t_1 \\ & + C_2 \sin \sqrt{1 - (\mu^2 K_1 / 2)^2} t_1 \\ & + \exp(\mu^2 K_1 t_1 / 2) [\cos \sqrt{1 - (\mu^2 K_1 / 2)^2} t_1 \\ & + \sin \sqrt{1 - (\mu^2 K_1 / 2)^2} t_1] \\ & \times \int_0^t \frac{\cos \sqrt{1 - (\mu^2 K_1 / 2)^2} \xi}{\sqrt{1 - (\mu^2 K_1 / 2)^2} \exp(\mu^2 K_1 \xi / 2)} \\ & \times \left[\mu Z_0^2 (-1 + M + \mu M Z_0) + \mu dZ_0 / d\xi \right. \\ & \times \left(2LZ_0 + M \frac{dZ_0 / d\xi - \mu L Z_0^2 + \mu^2 K_1 Z_0}{-1 + \mu M Z_0} \right) \\ & + f(Z_0) + 3\mu^2 M Z_0^2 Z_1 + 2\mu(-1 + M) Z_0 Z_1 \\ & + 2\mu L \left(\frac{dZ_0}{d\xi} Z_1 + Z_0 \frac{dZ_1}{d\xi} \right) \\ & + \frac{\mu M}{(-1 + \mu M Z_0)^2} \left[(-1 + \mu M Z_0) \right. \\ & \times \left[\left(\frac{dZ_0}{d\xi} - \mu L Z_0^2 + \mu^2 K_1 Z_0 \right) \frac{dZ_1}{d\xi} \right. \\ & + \left. \left. \left(\frac{dZ_1}{d\xi} - 2\mu L Z_0 Z_1 + \mu^2 K_1 Z_1 \right) \frac{dZ_0}{d\xi} \right] \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & - \mu M Z_1 \left(\frac{dZ_0}{d\xi} - \mu L Z_0^2 + \mu^2 K_1 Z_0 \right) \frac{dZ_0}{d\xi} \\ & \left. + f_Z(Z_0) Z_1 \right] d\xi. \end{aligned} \tag{12}$$

同理, 可以得到模型 (1) 的更高次的近似解.

4. 解的精度比较

我们来研究用同伦映射方法得到的近似解的精度. 为了避免繁杂的计算, 下面仅考虑模型 (1) 在微扰情形下的解, 并设 $f(u) = \mu \exp u$, $0 < \mu \ll 1$.

首先, 我们能用摄动方法^[28]来得到微扰情形非线性海-气振子 THC 模型 (1) 的摄动解. 可以通过计算 (详细计算过程从略), 得到方程 (1) 的摄动渐近解 Z_{asy} 的表示式为

$$\begin{aligned} Z_{\text{asy}}(t_1) = & a \sin(\tau + \phi) \\ & + \left[a^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{1 - 2M}{6} \cos 2(t_1 + \phi) - \frac{L}{3} \sin 2(t_1 + \phi) \right) \right. \\ & \left. + \int_0^t \exp(a \sin(\tau + \phi)) \sin(t_1 - \tau) d\tau \right] \mu + O(\mu^2) \end{aligned}$$

$$t_1 \in [0, t_0], 0 < \mu \ll 1, \tag{13}$$

其中 a, ϕ 为任意常数, t_0 为足够大的正常数.

其次, 我们再来考虑用前面同伦映射方法得到的近似解. 根据前面的计算结果, 方程 (1) 的同伦映射解 Z_{hom} 的表示式由 (12) 决定. 将 (12) 式按 μ 渐近展开, 得到解的渐近表示式

$$\begin{aligned} Z_{\text{hom}}(t_1) = & a \sin(t_1 + \phi) \\ & + \left[a^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{1 - 2M}{6} \cos 2(t_1 + \phi) \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{L}{3} \sin 2(t_1 + \phi) \right) \right. \\ & \left. + \int_0^t \exp(a \sin(\tau + \phi)) \sin(t_1 - \tau) d\tau \right] \mu \\ & + O(\mu^2) \quad t_1 \in [0, \tau_0], 0 < \mu \ll 1, \end{aligned} \tag{14}$$

其中, $a = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$, $\phi = \text{atan} \frac{C_1}{C_2}$ 为任意常数.

比较两种方法得到的近似解 (13) 和 (14) 式, 它们完全相同. 由此说明, 用同伦映射方法得到的近似解具有较高的精度.

从另一角度来看, 给定扰动耦合海-气振子非线性方程的无量纲参数为 $K_1 = M = L = 1$, $\mu = 0.2$. 我们能够得到方程 (1) 在初始值和扰动项为别为

$Z(0) = 1, Z'(0) = 0, f(Z) = \mu \exp Z$ 时在 (t_1, Z) 平面上, 用同伦映射方法得到的近似解与模拟精确解分别对应的曲线图(见图 1 所示).

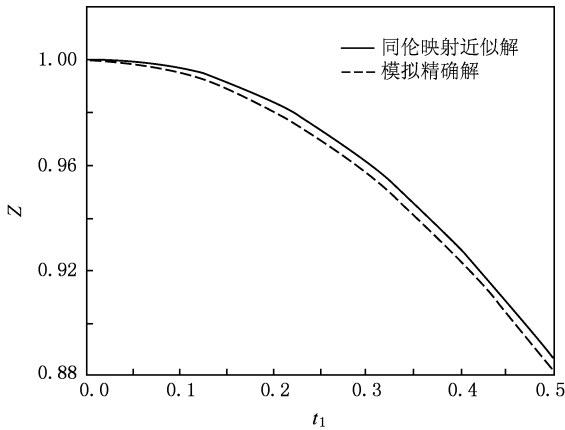


图 1 同伦映射近似解和模拟精确解

从图 1 也可看出, 用同伦映射方法得到的近似解与方程的精确解具有较小的误差.

5. 结 论

大气物理全球气候自然现象所涉及的面很广. 通常通过一些主要的影响因素把它归化为某类非线性数学模型, 然后用特定的方法求出其主要物理量的近似值. 同伦映射方法就是一个较好的近似求解方法. 它不但能有效地得到问题的近似解, 而且它不同于一般的数值模拟方法, 它是一个解析方法. 因此, 通过它得到的近似解析解, 还可进行微分、积分等解析运算. 从而可继续得到其他相关物理量的定量、定性等方面的结果, 并由此讨论大气物理全球气候海-气耦合振子 THC 模型性态的进一步理论.

- [1] Rooth C 1982 *Prog. Oceanogr.* **11** 131
- [2] Scott J R, Marotzke J, Stone R H 1999 *J. Phys. Oceanogr.* **29** 351
- [3] Peter H S, Yuriy P K 1999 *Dynam. Atm. Oc.* **29** 415
- [4] Hovhannisyan G, Vulcanovic R 2008 *Nonl. Stud.* **15** 297
- [5] Graef J R, Kong L 2008 *Math. Proc. Camb. Philos. Soc.* **145** 489
- [6] Barbu L, Cosma E 2009 *J. Math. Anal. Appl.* **351** 392
- [7] Ramos M, 2009 *J. Math. Anal. Appl.* **352** 246
- [8] Mo J Q, Zhu J, Wang H 2003 *Prog. Nat. Sci.* **13** 768
- [9] Mo J Q, Zhang W J, He M 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 1843 (in Chinese) [莫嘉琪、张伟江、何 铭 2007 物理学报 **56** 1843]
- [10] Mo J Q, Zhang W J, Chen X F 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 6169 (in Chinese) [莫嘉琪、张伟江、陈贤峰 2007 物理学报 **56** 6169]
- [11] Mo J Q 2009 *Chin. Phys. Lett.* **26** 010204
- [12] Mo J Q 2009 *Chin. Phys. Lett.* **26** 060202
- [13] Mo J Q, Yao J S 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 7419 (in Chinese) [莫嘉琪、姚静荪 2008 物理学报 **57** 7419]
- [14] Mo J Q 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 695 (in Chinese) [莫嘉琪 2009 物理学报 **58** 695]
- [15] Mo J Q 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 2930 (in Chinese) [莫嘉琪 2009 物理学报 **58** 2930]
- [16] Mo J Q 2009 *Sci. China Ser. G* **52** 1007
- [17] Mo J Q, Zhang W J, He M 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 3233 (in Chinese) [莫嘉琪、张伟江、何 铭 2007 物理学报 **55** 3233]
- [18] Mo J Q, Lin W T, Wang H, 2008 *Chin. Geogr. Sci.* **18** 193
- [19] Mo J Q, Lin W T, Wang H 2007 *Prog. Nat. Sci.* **17** 230
- [20] Mo J Q, Lin W T 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 6689 (in Chinese) [莫嘉琪、林万涛 2008 物理学报 **57** 6689]
- [21] Mo J Q, Lin W T, Lin Y H 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 3127 (in Chinese) [莫嘉琪、林万涛、林一骅 2007 物理学报 **56** 3127]
- [22] Mo J Q, Lin W T 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 6694 (in Chinese) [莫嘉琪、林万涛 2008 物理学报 **57** 6694]
- [23] Mo J Q, Lin W T, Wang H 2007 *Chin. Phys.* **16** 951
- [24] Mo J Q, Lin W T 2008 *Chin. Phys. B* **17** 370
- [25] Mo J Q, Lin W T 2008 *Chin. Phys. B* **17** 743
- [26] Liao S J 2004 *Beyond Perturbation: Introduction to the Homotopy Analysis Method* (New York: CRC Press)
- [27] He J H 2008 *Int. J. Mod. Phys. B* **22** 3487
- [28] De Jager E M, Jiang F R 1996 *The Theory of Singular Perturbation* (Amsterdam: North-Holland Publishing Co.)

Approximation solution of a class of disturbed sea-air coupled oscillator mechanism^{*}

Zhou Xian-Chun¹⁾ Lin Wan-Tao²⁾ Lin Yi-Hua²⁾ Mo Jia-Qi³⁾†

1) (College of Electronic and Information Engineering, Nanjing University of Information Science and Technology, Nanjing 210044, China)

2) (State Key Laboratory of Numerical modeling for Atmospheric and Geophysical Fluid Dynamics, Institute of Atmospheric Physics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100029, China)

3) (Department of Mathematics, Anhui Normal University, Wuhu 241000, China)

(Received 29 June 2009; revised manuscript received 5 August 2009)

Abstract

A box model of the interhemispheric thermohaline circulation in the disturbed sea-air for globe climate is considered. By using the homotopic mapping method, a class of nonlinear model is studied, and the approximate solution is obtained. The homotopic mapping solving method is an analytic method, the solution obtained can be analytically operated sequentially. And then we can also study the diversified qualitative and quantitative behaviors of corresponding physical quantities.

Keywords: sea-air coupled oscillator, approximate solution, homotopic mapping, El Niño-Southern Oscillation

PACC: 0230

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 40876010), the Main Program of Knowledge Innovation of Chinese Academy of Sciences (Grant No. KZCX2-YW-Q03-08), LASG State Key Laboratory Special Fund, the Research and Development Special Fund for Public Welfare Industry (Meteorology) (Grant No. GYHY200806010), the Natural Science Foundation of Zhejiang Province, China (Grant No. Y6090164), the E-Institutes of Shanghai Municipal Education Commission (Grant No. E03004) and the Natural Science Foundation from the Universities of Jingsu Province, China (Grant No. 08KJB510010).

† Corresponding author. E-mail: mojiaqi@mail.ahnu.edu.cn