

尘埃等离子体中非线性波的叠加 效应及稳定性问题

仲生仁[†]

(武威职业学院工程技术系, 武威 733000)

(2009 年 7 月 19 日收到; 2009 年 8 月 17 日收到修改稿)

研究了小的有限振幅的无磁场尘埃等离子体中的非线性波. 在一维情况下由 Korteweg de Vries (KdV) 方程来描述, 考虑了二维情况下尘埃等离子体中尘埃颗粒上电荷的变化效应以及双温度离子效应后, 尘埃等离子体受到横向高阶扰动后动力学方程由 Kadomtsev-Petviashvili (KP) 方程来描述. 在此基础上, 研究了以任意夹角传播的两个及三个孤立子的相互作用问题, 考虑非线性效应后振幅相等的双孤立子在相互作用区域内振幅最大值是单个孤立子振幅的 4 倍, 振幅相等的三孤立子在相互作用区域内振幅最大值是单个孤立子振幅的 9 倍. 研究还表明波的传播方向受到横向高阶扰动后是稳定的.

关键词: 尘埃等离子体, 稳定性, Kadomtsev-Petviashvili 方程

PACC: 0340K, 5235S, 4735

1. 引言

近年来, 对于尘埃等离子体中的低频振动进行了大量的研究^[1-3], 尘埃等离子体中尘埃颗粒的质量远大于电子与离子的质量, 尘埃等离子体已经在空间与实验室中分别被观察到^[4]. 最近, 关于尘埃等离子体的研究发展很快, 特别是自 Shukla 等发现尘埃等离子体中尘埃声波与尘埃离子声波并被实验验证后^[5-9], 许多学者进行了关于尘埃等离子体中性性与非线性波的研究^[10], 这些工作中有尘埃包络孤立波^[11], 尘埃孤立波的调制不稳定性^[12], 尘埃颗粒大小及尘埃荷电量对尘埃等离子体中各种线性与非线性波的影响^[13-15], 弱二维尘埃等离子体中尘埃声波在受到高阶横向扰动时是否稳定^[12]等问题. 在无磁场一维尘埃等离子体中有限小振幅的非线性波可以由著名的 Korteweg de Vries (KdV) 方程来描述. 如果在横向方向非线性波受到高阶扰动, 这种有限小振幅的非线性波可以由 Kadomtsev-Petviashvili (KP) 方程来描述. 一维 KdV 方程描述的孤立子的碰撞问题已经进行了大量的研究^[15], 包括孤立子的正碰 (head-on collision) 与追碰 (overtaking collision)^[15]. 最近一些学者对二维 Bose-Einstein 凝

聚系统^[16]、等离子体系统^[17-20]及非线性晶格^[21]系统以任意夹角传播的孤立子的碰撞问题做了很多的研究工作. 本文在前人工作的基础上, 针对由两种离子温度的尘埃等离子体, 研究了以任意夹角传播的两个及三个孤立子的相互作用问题. 我们发现, 考虑了非线性效应以后在特定的条件下振幅相等的双孤立子在相互作用区域内振幅的最大值是单个孤立子振幅的 4 倍, 振幅相等的三孤立子在相互作用区域内振幅的最大值是单个孤立子振幅的 9 倍, 可以猜测, 如果有 N 个孤立子发生相互作用在特殊的条件下, 在相互作用区域振幅的最大值可能会达到 N^2 倍. 如果在等离子体中出现这种情况由于出现超高密度电荷的聚集可能会导致放电击穿等现象. 这种波一旦产生将会对系统产生无法预料的后果. 同时还发现, 在横向方向受到高阶扰动时非线性波是稳定的.

2. KP 方程的推导

下面考虑尘埃等离子体中的二维非线性波问题. 为能简要说明问题, 我们不考虑外磁场, 并假设波沿 x 方向传播, 高阶扰动在 y 方向. 尘埃等离子体中尘埃颗粒的质量远大于电子与离子质量. 我们考

[†] E-mail: zhongsr2009@126.com

虑的尘埃等离子体有三种成分, 分别是: 质量很大并带有大量负电荷的尘埃颗粒、电子与离子. 处于热力学平衡的电中性条件为 $n_{i0} + n_{ih0} = Z_{d0} n_{d0} + n_{e0}$, 这里 n_{ih0} (n_{i0}), n_{e0} 与 n_{d0} 分别是未受扰动的高(低)温离子、电子与尘埃颗粒的粒子数密度, Z_{d0} 是未受扰动情况下以电子电量为单位的尘埃颗粒的带电量.

对于二维低频尘埃声波, 冷尘埃等离子体满足的无量纲化的流体力学方程组为

$$\frac{\partial n_d}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(n_d u_x) + \frac{\partial}{\partial y}(n_d u_y) = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} = Z_d \frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial u_y}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_y}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_y}{\partial y} = Z_d \frac{\partial \phi}{\partial y}, \quad (3)$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = Z_d n_d + n_e - n_{il} - n_{ih}, \quad (4)$$

$$n_e = A_{e0} e^{\beta_{1s}\phi}, \quad (5)$$

$$n_{il} = A_{i10} e^{-s\phi}, \quad (6)$$

$$n_{ih} = A_{ih0} e^{-\beta_{3s}\phi}. \quad (7)$$

这里 u_x 与 u_y 分别是尘埃流体在 x 与 y 的速度分量, n_d 与 m_d 分别是尘埃颗粒的密度和质量, $Q_d = eZ_d$ 是尘埃颗粒上的荷电量, $A_{e0} = \frac{n_{e0}}{Z_{d0} n_{d0}}$, $A_{i10} = \frac{n_{i10}}{Z_{d0} n_{d0}}$, $A_{ih0} = \frac{n_{ih0}}{Z_{d0} n_{d0}}$, $\beta_1 = \frac{T_{il}}{T_e}$, $\beta_2 = \frac{T_{ih}}{T_e}$, $\beta = \frac{\beta_1}{\beta_2} = \frac{T_{il}}{T_{ih}}$, $s = \frac{Z_{d0} n_{d0} T_e T_{ih}}{n_{e0} T_{ih} T_{il} + n_{i10} T_e T_{ih} + n_{ih0} T_e T_{il}}$, T_e, T_{il} 与 T_{ih} 分别表示电子、低温离子与高温离子的温度.

为对所有变量归一化, 定义 $\delta_1 = \frac{n_{i10}}{n_e}$, $\delta_2 = \frac{n_{ih0}}{n_e}$, 并定义一个有效温度 T_{eff} , 表示如下:

$$\frac{1}{T_{eff}} = \frac{1}{Z_{d0} n_{d0}} \left(\frac{n_{e0}}{T_e} + \frac{n_{i10}}{T_{il}} + \frac{n_{ih0}}{T_{ih}} \right). \quad (8)$$

尘埃密度用 n_{d0} 归一化, Z_d 用 Z_{d0} 归一化, 空间坐标 x, y , 时间 t , 速度和电势 ϕ 分别用 Debye 长度 $\lambda_{Dd} = \left(\frac{T_{eff}}{4\pi Z_{d0} n_{d0} e} \right)^{\frac{1}{2}}$ 、尘埃等离子体频率的倒数 $\omega_{pd}^{-1} = \left(\frac{m_d}{4\pi n_{d0} Z_{d0}^2 e^2} \right)^{\frac{1}{2}}$ 、尘埃声波波速 $c_d = \left(\frac{Z_{d0} T_{eff}}{m_d} \right)^{\frac{1}{2}}$ 及 $\frac{T_{eff}}{e}$ 归一化.

尘埃流运动的特征时间为毫秒量级^[16]. 然而, 这种由流向尘埃颗粒表面的电子和离子引起的尘

埃充电的特征时间为毫微秒量级^[16]. 所以, 尘埃颗粒的充电过程可以很快达到平衡状态, 这样尘埃颗粒的电流方程可以写成^[16]

$$I_e + I_{il} + I_{ih} = 0. \quad (9)$$

假设电子和离子的流动速度小于它们的热运动速度. 根据著名的有限轨道运动探测 (orbit-motion-limited probe, OMLP) 模型, 为了研究尘埃声波在受到横向高阶扰动时是否稳定, 我们将用传统的摄动方法来获得 KP 方程, 做如下的变换:

$$\xi = \varepsilon(x - ct), \quad (10)$$

$$Y = \varepsilon^2 y, \quad (11)$$

$$T = \varepsilon^3 t, \quad (12)$$

这里 c 是线性尘埃声波的传播速度, ε 是一个表示非线性强度的小参量.

做如下的展开:

$$n = 1 + \varepsilon^2 n_1 + \varepsilon^4 n_2 + \cdots, \quad (13)$$

$$u_x = \varepsilon^2 u_{x1} + \varepsilon^4 u_{x2} + \cdots, \quad (14)$$

$$u_y = \varepsilon^3 u_{y1} + \varepsilon^5 u_{y2} + \cdots, \quad (15)$$

$$\phi = \varepsilon^2 \phi_1 + \varepsilon^4 \phi^2 + \cdots, \quad (16)$$

$$Z_d = 1 + \varepsilon^2 Z_{d1} + \varepsilon^4 Z_{d2} + \cdots, \quad (17)$$

运用文献[16]中的方法, 比较 ε 的同次幂, 分别得到关于 ε 的各级项后最终得到著名的 KP 方程

$$[A(\phi_1)_\tau + B\phi_1(\phi_1)_\xi + C(\phi_1)_{\xi\xi\xi}]_\xi - (\phi_1)_{YY} = 0. \quad (18)$$

这里

$$A = -\frac{2}{c}, \quad (19)$$

$$B = \frac{3}{c^2} - 3\gamma_1 + 2c^2\gamma_2 + c^2\beta_1^2 s^2 A_{e0} - s^2 c^2 A_{i10} - \beta^2 s^2 c^2 A_{ih0}, \quad (20)$$

$$C = -c^2. \quad (21)$$

关于 KP 方程(18)已经有了大量的研究工作, KP 方程有一维的孤立波解, 孤立波解有重要的性质. 如果在此一维孤立波的垂直方向施加一个高阶扰动, 孤立波是否稳定也是一个很重要的问题. 下面我们将重点讨论这些问题.

3. 弱二维孤立波及其特性

对 KP 方程(18)做变换, 我们得到如下的 KP 方程:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial u}{\partial t} - 6u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right] + 3 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. \quad (22)$$

设方程(22)有解 $u = -2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\ln v)$, 我们设 $v = 1 + e^{kx+ly-\omega t}$, 则可以得到单孤立子解为

$$u = -\frac{k^2}{2} \operatorname{sech}^2 \left[\frac{kx + ly - \omega t}{2} \right], \quad (23)$$

单孤立子的振幅为 $-\frac{k^2}{2}$.

如果设 $v = 1 + v_1 + v_2 + Av_1v_2$, 其中 $v_j = e^{k_jx+l_jy-\omega_jt-\delta_j}$, $\omega_j = k_j^3 + 3l_j^2/k_j$, $j = 1, 2$, 我们就得到双孤立子解, 该双孤立子传播方向的夹角为 $\cos\alpha = \frac{k_1k_2 + l_1l_2}{\sqrt{(k_1^2 + l_1^2)(k_2^2 + l_2^2)}}$, 通过求极大值可以得到双孤立子在相互作用区域取得的最大值为 $u_{\max} = -\frac{(k_1 + k_2)^2}{2}$, 如果 $k_1 = k_2$, 发现振幅相等的两个孤

立子在相互作用区域振幅的最大值可以是单个孤立子振幅的 4 倍. 同理, 我们可以求得 3 个振幅相等的孤立子在相互作用区域内的最大振幅为 $u_{\max} = -\frac{9k^2}{2}$, 可以看出最大值是单个孤立子振幅的 9 倍.

此结论和线性结果完全不同, 因为线性结论认为: 振幅相等的双孤立子在相互作用区域内振幅的最大值应该是单个孤立子振幅的 2 倍, 振幅相等的三孤立子在相互作用区域内振幅的最大值应该是单个孤立子振幅的 3 倍. 然而, 我们发现: 考虑了非线性效应以后振幅相等的双孤立子在相互作用区域内振幅的最大值是单个孤立子振幅的 4 倍, 振幅相等的三孤立子在相互作用区域内振幅的最大值是单个孤立子振幅的 9 倍, 可以想象, 如果有 N 个孤立子发生相互作用在特殊的条件下, 在相互作用区域振幅的最大值是否会达到 N^2 倍? 这将有待于我们做进一步的理论与实验研究. 这种波一旦产生将会对我们的系统产生什么后果? 在固体中如果出现这种情况有可能会使其断裂; 在流体中如果出现此情况可能会产生巨大振幅的波浪, 在等离子体中如果出现这种情况由于出现超高密度电荷的聚集可能会导致放电击穿现象等.

4. 弱二维孤立波的稳定性问题

KP 方程(22)有如下形式的二维孤立子解:

$$(24)$$

其中 $w = A^2$, $V = A^2$.

解(24)又称为 Lump 解, 同时有正负振幅. 其总质量定义为

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u dx dy = 0. \quad (25)$$

方程的 Lump 孤立子解的质量和能量都守恒, 在二维空间中为了研究孤立子在受到横向长波近似的小扰动以后孤立波是否稳定, 做如下的变换:

$$\zeta = kx - \omega t - x_0, \quad (26)$$

$$\xi = ly, \quad (27)$$

$$\tau = k^2 t, \quad (28)$$

$$u = \phi(\zeta) + e^{\lambda\tau + i\nu\xi} v(\zeta). \quad (29)$$

这里 $\phi(\zeta)$ 是单孤立子解. 由 KP 方程我们得到

$$v''' - 4[(1 - 3\operatorname{sech}^2\zeta)v]'' + 4\lambda v' + 3\nu^2 v = 0. \quad (30)$$

如果存在复数 λ 和实数 ν 并且 $\operatorname{Re}\lambda > 0$, 则存在不稳定的解. 进一步的分析告诉我们, KP 方程的孤立子解在长波极限扰动的情况下是稳定的.

5. 结 论

考虑了非线性效应以后振幅相等的双孤立子在相互作用区域内振幅的最大值是单个孤立子振幅的 4 倍, 振幅相等的三孤立子在相互作用区域内振幅的最大值是单个孤立子振幅的 9 倍. 这种非线性波的叠加性质是非常重要的. 例如: 如果在固体中出现这种情况有可能会使其断裂, 如果在流体中出现此情况可能会产生巨大振幅的波浪, 如果在等离子体中出现这种情况由于出现超高密度电荷的聚集可能会导致放电击穿现象等. 无法预料一旦产生这种波将会对系统产生何种后果. 我们也可以利用波的这种非线性叠加性质, 同时尽量避免这种非线性叠加带来的不利现象. 另外还发现, 孤立波在横向受到长波近似的小扰动后波是稳定的.

[1] Rao N N, Shukla P K, Yu M Y 1990 *Planet. Space Sci.* **38** 543

[2] Shukla P K, Silin V P 1992 *Phys. Script.* **45** 508

[3] D'Angelo N 1990 *Planet. Space Sci.* **38** 1143

[4] Goertz C K 1989 *Rev. Geophys.* **27** 271

[5] Verheest F 1996 *Space Sci. Rev.* **77** 267

[6] Chu J H, Du J B, Lin I H 1994 *J. Phys. D* **27** 296

[7] D'Angelo N 1995 *J. Phys. D* **28** 1009

[8] Barkan A, Merlino R L, D'Angelo N 1995 *Phys. Plasma.* **2** 3563

[9] Barkan A, Merlino R L, D'Angelo N 1996 *Planet. Space Sci.* **44** 239

[10] Duan W S, Shi Y R 2003 *Chaos, Solitons Fract.* **18** 321

[11] Duan W S, Parkes J, Lin M M 2005 *Phys. Plasmas* **12** 022106

[12] Chen J H, Duan W S 2007 *Phys. Plasmas* **14** 083702

[13] Meuris P 1997 *Planet. Space Sci.* **45** 449

[14] Meuris P 1997 *Space Sci.* **45** 1171

[15] Han J N, Yang X X, Tiao T X, Duan WS 2008 *Phys. Lett. A* **372** 4817

[16] Li S C, Han J N, Duan WS 2009 *Physica B* **404** 1235

[17] Han J N, Du S L, Duan W S 2008 *Phys. Plasmas* **15** 112104

[18] Han J N, Duan W S, Li S C, Wang C L 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 6068 (in Chinese) [韩久宁、段文山、栗生长、王苍龙 2008 物理学报 **57** 6068]

[19] He G J, Tian D X, Lin M M, Duan W S 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 2320 (in Chinese) [何广军、田多祥、林麦麦、段文山 2008 物理学报 **57** 2320]

[20] Jiang X, Gao Y X, Li S C, Shi Y R, Duan WS 2009 *Appl. Math. Comp.* **214** 60

[21] Yang X X, Duan W S, Han J N, Li S C 2008 *Chin. Phys. B* **17** 2985

Instability and interaction of the nonlinear solitary waves in two-temperature-ion dusty plasma

Zhong Sheng-Ren[†]

(Department of Engineering Technology, Wuwei Occupational College, Wuwei 733000, China)

(Received 19 July 2009; revised manuscript received 17 August 2009)

Abstract

For nonlinear dust acoustic waves in unmagnetized dusty plasma containing cold dust grains and isothermal electrons and ions, small but finite amplitude nonlinear waves are governed by the Korteweg de Veries (KdV) equation. For weakly two-dimensional dust acoustic solitary waves in a dusty plasma with variable dust charge and two-temperature ions, we obtain a Kadomtsev-Petviashvili equation under higher order transverse disturbances for this system. The interactions between two solitons and three solitons propagating in arbitrary directions are investigated. It is found that the maximum amplitude in the interaction region between two same—amplitude solitons is about four times that of a single soliton, while for three solitons the maximum amplitude is nine times that of a single soliton. It suggests that the transverse perturbations for the weakly nonlinear solitary waves in dusty plasma with variable dust charge and two-temperature ions are stable.

Keywords: dusty plasmas, instability, Kadomtsev-Petviashvili equation

PACC: 0340K, 5235S, 4735

[†] E-mail: zhongsr2009@126.com