

不同超混沌系统的自适应修正函数投影^{*}

王健安[†] 刘贺平

(北京科技大学信息工程学院, 北京 100083)

(2009 年 6 月 14 日收到; 2009 年 8 月 11 日收到修改稿)

研究了具有未知参数的 Lorenz-Stenflo (LS) 系统和一种新型超混沌系统以及 LS 系统和超混沌 Chen 系统的修正函数投影同步问题. 利用 Lyapunov 稳定性理论和主动控制方法, 设计自适应控制器和参数更新规则, 实现不同超混沌系统的修正函数投影同步, 同时估计出系统的未知参数. 数值仿真验证了该自适应控制器的有效性.

关键词: 修正函数投影同步, 超混沌系统, Lyapunov 稳定理论, 自适应控制

PACC: 0545

1. 引 言

自 Pecora 和 Carrol^[1] 实现混沌同步以来, 由于其在通信保密等领域的潜在应用价值而受到人们的广泛关注, 获得了大量的研究成果^[2-13]. 同时, 各种同步方案相继提出, 如: 完全同步、反同步、相同步、滞后同步、广义同步、投影同步、修正投影同步等. 最近有学者提出了新的同步方案, 即函数投影同步和修正函数投影同步^[14, 15]. 较之投影同步, 函数投影同步意味着驱动响应系统按照函数比例关系进行同步, 这种特性在进行数字信号保密通信中具有更加安全的特点.

超混沌系统是指具有两个以上正的 Lyapunov 指数的动力学系统, 它比弱混沌系统具有更加复杂的动力学行为. 由于其在非线性电路、保密通信等领域具有重要的应用价值, 因此超混沌系统的同步是一个热点问题. 文献[16, 17] 基于 Lyapunov 稳定理论分别研究了超混沌 Rössler 和超混沌 Chen 系统自适应同步问题. 文献[18, 19] 研究了两个不同超混沌系统的自适应反同步问题. 文献[20] 研究了超混沌系统的广义同步问题. 然而, 对于一些具有复杂动力学行为的超混沌系统的函数投影同步, 尤其是不同结构超混沌系统的研究却未见报道. 如能实现不同结构超混沌系统的函数投影同步, 将会扩大混沌同步的通信范围和保密效果, 从而使混沌同步

具有更加广阔的应用前景.

利用 Lyapunov 稳定理论和主动控制思想, 本文分别研究了具有未知参数的 Lorenz-Stenflo (LS) 系统^[21] 和一个新型超混沌 (CYQY) 系统^[22] 以及 LS 系统和超混沌 Chen 系统^[23] 的修正函数投影同步问题, 提出可实现不同超混沌系统修正函数投影同步的控制器和参数更新规则. 该规则可将系统中的未知参数估计至真值. 数值仿真表明了该方法的有效性.

2. 问题描述及基本假设

考虑如下耦合的两个非线性混沌系统:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= f(\mathbf{x}), \\ \dot{\mathbf{y}} &= g(\mathbf{y}) + u(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \end{aligned} \quad (1)$$

其中, $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in R^n$ 是状态向量, $f, g: R^n \rightarrow R^n$ 是连续可微函数, $u(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ 是控制输入. 第一个式子为驱动系统, 第二个式子为响应系统. 定义如下的误差系统:

$$\mathbf{e} = \mathbf{x} - \mathbf{A}(t)\mathbf{y}, \quad (2)$$

其中, $\mathbf{A}(t) = \text{diag}\{\Lambda_1(t), \Lambda_2(t), \dots, \Lambda_n(t)\}$, $\Lambda_i(t)$ 是连续可微的有界函数. 对于 $\forall t$, 假设 $\Lambda_i(t) \neq 0$. 我们称 $\mathbf{A}(t)$ 为比例函数矩阵, $\Lambda_i(t)$ 为比例函数. 对于系统(1)和给定的 $\mathbf{A}(t)$, 设计 $u(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, 如能使得在任意初始条件下满足 $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{e}\| = 0$, 那么, 我们称系统(1)是修正函数投影同步. 当 $\Lambda_1(t) = \Lambda_2(t) = \dots = \Lambda_n(t) = \phi(t)$ 时, 称其为函数投影同步. 很明显, 文献[11—19, 24] 所研究的同步问题

^{*} 北京市教委重点学科共建项目(批准号: XK100080537)资助的课题.

[†] E-mail: wangjianan588@sohu.com

都属于修正函数投影同步的特殊情况.

超混沌 LS 系统是瑞典物理学家 Lennart Stenflo 利用低频率和短波长近似地研究大气波时将 Lorenz 系统推广后所得到的一个四维非线性系统,其数学模型描述为

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \alpha(y - x) + \gamma w, \\ \dot{y} &= x(r - z) - y, \\ \dot{z} &= xy - \beta z, \\ \dot{w} &= -x - \alpha w.\end{aligned}\quad (3)$$

当参数 $\alpha = 1, \beta = 0.7, \gamma = 1.5, r = 26$ 时,系统(3)处于超混沌状态.

基于著名的 Lorenz 混沌系统,Chen 等提出一个新的超混沌系统,命名为 CYQY 系统,其动力学方程为

$$\begin{aligned}\dot{x} &= l(y - x) + ky_2z_2, \\ \dot{y} &= nx - jxz + y + w, \\ \dot{z} &= xy - mz, \\ \dot{w} &= -sy.\end{aligned}\quad (4)$$

当参数 $l = 35, m = 4.9, n = 25, j = 5, k = 35, s = 100$ 时,系统(4)是超混沌的.

超混沌 Chen 系统具有如下的数学模型:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= a(y - x) + w, \\ \dot{y} &= dx - xz + cy, \\ \dot{z} &= xy - bz, \\ \dot{w} &= yz + hw.\end{aligned}\quad (5)$$

该系统随着参数的改变产生复杂的动力学行为,当 $a = 35, b = 3, c = 12, d = 7, h \in (0.085, 0.798]$ 时,系统将出现超混沌行为.

注 1 上述三个超混沌系统的混沌吸引子及其性质可参见文献[21—23].文献[24]研究了上述超混沌系统的自适应同步问题,我们在此基础上研究更为复杂的函数投影同步问题.

3. LS 系统和 CYQY 系统的自适应修正函数投影同步

假设 LS 系统为驱动系统, CYQY 系统为响应系统,则驱动响应系统方程如下所示:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= \alpha(y_1 - x_1) + \gamma_1 w_1, \\ \dot{y}_1 &= x_1(r - z_1) - y_1, \\ \dot{z}_1 &= x_1 y_1 - \beta z_1,\end{aligned}\quad (6)$$

$$\begin{aligned}\dot{w}_1 &= -x_1 - \alpha w_1, \\ \dot{x}_2 &= l(y_2 - x_2) + ky_2 z_2; \\ \dot{y}_2 &= nx_2 - jx_2 z_2 + y_2 + w_2, \\ \dot{z}_2 &= x_2 y_2 - mz_2, \\ \dot{w}_2 &= -sy_2,\end{aligned}\quad (7)$$

这里, α, β, γ, r 和 l, m, n, j, k, s 是未知参数, u_1, u_2, u_3, u_4 是所需要设计的同步控制器. 定义如下的修正函数投影同步误差为

$$\begin{aligned}e_1 &= x_1 - \Lambda_1(t)x_2, \\ e_2 &= y_1 - \Lambda_2(t)y_2, \\ e_3 &= z_1 - \Lambda_3(t)z_2, \\ e_4 &= w_1 - \Lambda_4(t)w_2.\end{aligned}\quad (8)$$

我们的目标是设计合适的控制器,使得响应系统(7)能全局渐近修正函数投影同步驱动系统(6),即 $\lim_{t \rightarrow \infty} \|e\| = 0$, 其中, $e = (e_1, e_2, e_3, e_4)^T$.

由(6)和(7)式可得误差动态方程为

$$\begin{aligned}\dot{e}_1 &= \alpha(y_1 - x_1) + \gamma w_1 \\ &\quad - \Lambda_1(t)(l(y_2 - x_2) + ky_2 z_2) \\ &\quad - \dot{\Lambda}_1(t)x_2 - \Lambda_1(t)u_1, \\ \dot{e}_2 &= x_1(r - z_1) - y_1 - \Lambda_2(t) \\ &\quad \times (nx_2 - jx_2 z_2 + y_2 + w_2) \\ &\quad - \dot{\Lambda}_2(t)y_2 - \Lambda_2(t)u_2, \\ \dot{e}_3 &= x_1 y_1 - \beta z_1 - \Lambda_3(t)(x_2 y_2 - mz_2) \\ &\quad - \dot{\Lambda}_3(t)z_2 - \Lambda_3(t)u_3, \\ \dot{e}_4 &= -x_1 - \alpha w_1 + \Lambda_4(t)sy_2 \\ &\quad - \dot{\Lambda}_4(t)w_2 - \Lambda_4(t)u_4.\end{aligned}\quad (9)$$

现在系统(6)和(7)的修正函数投影同步问题转化为(9)式的稳定性问题. 只要(9)式在原点处全局渐近稳定,即获得同步. 基于主动控制思想,设计如下的同步控制器和参数更新规则:

$$\begin{aligned}u_1 &= \frac{1}{\Lambda_1(t)}(\alpha_1(y_1 - x_1) + \gamma_1 w_1 \\ &\quad - \Lambda_1(t)(l_1(y_2 - x_2) + k_1 y_2 z_2) \\ &\quad - \dot{\Lambda}_1(t)x_2 + e_1), \\ u_2 &= \frac{1}{\Lambda_2(t)}(-y_1 - \Lambda_2(t)(n_1 x_2 - j_1 x_2 z_2 + y_2 + w_2)\end{aligned}$$

$$+ x_1(r_1 - z_1) - \dot{\Lambda}_2(t)y_2 + e_2), \quad (10)$$

$$u_3 = \frac{1}{\Lambda_3(t)}(x_1y_1 - \beta_1z_1 - \Lambda_3(t)(x_2y_2 - m_1z_2) - \dot{\Lambda}_3(t)z_2 + e_3),$$

$$u_4 = \frac{1}{\Lambda_4(t)}(-x_1 - \alpha_1w_1 + \Lambda_4(t)s_1y_2 - \dot{\Lambda}_4(t)w_2 + e_4);$$

$$\dot{\alpha}_1 = (y_1 - x_1)e_1 - w_1e_4 + \tilde{\alpha},$$

$$\dot{\beta}_1 = -z_1e_3 + \tilde{\beta},$$

$$\dot{\gamma}_1 = w_1e_1 + \tilde{\gamma},$$

$$\dot{r}_1 = x_1e_2 + \tilde{r},$$

$$\dot{l}_1 = -\Lambda_1(t)(y_2 - x_2)e_1 + \tilde{l}, \quad (11)$$

$$\dot{m}_1 = \Lambda_3(t)z_2e_3 + \tilde{m},$$

$$\dot{n}_1 = -\Lambda_2(t)x_2e_2 + \tilde{n},$$

$$\dot{j}_1 = \Lambda_2(t)x_2z_2e_2 + \tilde{j},$$

$$\dot{k}_1 = -\Lambda_1(t)y_2z_2e_1 + \tilde{k},$$

$$\dot{s}_1 = \Lambda_4(t)y_2e_4 + \tilde{s},$$

其中, $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, r_1, l_1, m_1, n_1, j_1, k_1, s_1$ 分别用来估计未知参数 $\alpha, \beta, \gamma, r, l, m, n, j, k, s$, $\tilde{\alpha} = \alpha - \alpha_1, \tilde{\beta} = \beta - \beta_1, \tilde{\gamma} = \gamma - \gamma_1, \tilde{r} = r - r_1, \tilde{l} = l - l_1, \tilde{m} = m - m_1, \tilde{n} = n - n_1, \tilde{j} = j - j_1, \tilde{k} = k - k_1, \tilde{s} = s - s_1$.

定理 1 对于任意给定的比例函数矩阵 $\Lambda(t)$ 和初始条件, 在同步控制器(10)和参数更新规则(11)的作用下, 可实现 LS 系统(6)和 CYQY 系统(7)的修正函数投影同步, 且未知参数可估计至真值.

证明 将同步控制器(10)代入误差方程(9)式, 得

$$\begin{aligned} \dot{e}_1 &= (y_1 - x_1)\tilde{\alpha} + w_1\tilde{\gamma} - \Lambda_1(t)((y_2 - x_2)\tilde{l} \\ &\quad + y_2z_2\tilde{k}) - e_1, \\ \dot{e}_2 &= x_1\tilde{r} - \Lambda_2(t)(x_2\tilde{n} - x_2z_2\tilde{j}) - e_2, \\ \dot{e}_3 &= -z_1\tilde{\beta} + \Lambda_3(t)z_2\tilde{m} - e_3, \\ \dot{e}_4 &= -w_1\tilde{\alpha} + \Lambda_4(t)y_2\tilde{s} - e_4. \end{aligned} \quad (12)$$

选取 Lyapunov 函数

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{2}(e^T e + \tilde{\alpha}^2 + \tilde{\beta}^2 + \tilde{\gamma}^2 + \tilde{r}^2 + \tilde{l}^2 \\ &\quad + \tilde{m}^2 + \tilde{n}^2 + \tilde{j}^2 + \tilde{k}^2 + \tilde{s}^2), \end{aligned} \quad (13)$$

将其沿(12)式求导, 并将更新规则(11)式代入, 得

$$\begin{aligned} \dot{V} &= e^T \dot{e} + \tilde{\alpha} \dot{\tilde{\alpha}} + \tilde{\beta} \dot{\tilde{\beta}} + \tilde{\gamma} \dot{\tilde{\gamma}} + \tilde{r} \dot{\tilde{r}} + \tilde{l} \dot{\tilde{l}} \\ &\quad + \tilde{m} \dot{\tilde{m}} + \tilde{n} \dot{\tilde{n}} + \tilde{j} \dot{\tilde{j}} + \tilde{k} \dot{\tilde{k}} + \tilde{s} \dot{\tilde{s}} \\ &= e_1 \dot{e}_1 + e_2 \dot{e}_2 + e_3 \dot{e}_3 + e_4 \dot{e}_4 - \tilde{\alpha} \dot{\tilde{\alpha}}_1 - \tilde{\beta} \dot{\tilde{\beta}}_1 - \tilde{\gamma} \dot{\tilde{\gamma}}_1 \\ &\quad - \tilde{r} \dot{\tilde{r}}_1 - \tilde{l} \dot{\tilde{l}}_1 - \tilde{m} \dot{\tilde{m}}_1 - \tilde{n} \dot{\tilde{n}}_1 - \tilde{j} \dot{\tilde{j}}_1 - \tilde{k} \dot{\tilde{k}}_1 - \tilde{s} \dot{\tilde{s}}_1 \\ &= -e_1^2 - e_2^2 - e_3^2 - e_4^2 - \tilde{\alpha}^2 - \tilde{\beta}^2 - \tilde{\gamma}^2 - \tilde{r}^2 \\ &\quad - \tilde{l}^2 - \tilde{m}^2 - \tilde{n}^2 - \tilde{j}^2 - \tilde{k}^2 - \tilde{s}^2 \\ &= -2V \leq 0. \end{aligned} \quad (14)$$

根据(14)式可知 \dot{V} 是半负定的, 因此 $e_1, e_2, e_3, e_4 \in L_\infty, \tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \tilde{\gamma}, \tilde{r} \in L_\infty, \tilde{l}, \tilde{m}, \tilde{n}, \tilde{j}, \tilde{k}, \tilde{s} \in L_\infty$. 由(9), (11)和(12)式可知, $\dot{e}_1, \dot{e}_2, \dot{e}_3, \dot{e}_4 \in L_\infty, \dot{\tilde{\alpha}}, \dot{\tilde{\beta}}, \dot{\tilde{\gamma}}, \dot{\tilde{r}} \in L_\infty, \dot{\tilde{l}}, \dot{\tilde{m}}, \dot{\tilde{n}}, \dot{\tilde{j}}, \dot{\tilde{k}}, \dot{\tilde{s}} \in L_\infty$. 又因 $\int_0^t V dt = 2(V(0) - V(t)) \leq 2V(0)$, 所以 $e_1, e_2, e_3, e_4 \in L_2, \tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \tilde{\gamma}, \tilde{r} \in L_2, \tilde{l}, \tilde{m}, \tilde{n}, \tilde{j}, \tilde{k}, \tilde{s} \in L_2$. 根据 Barbalat 引理可知, 当 $t \rightarrow \infty$ 时, $e_1, e_2, e_3, e_4 \rightarrow 0, \tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \tilde{\gamma}, \tilde{r} \rightarrow 0, \tilde{l}, \tilde{m}, \tilde{n}, \tilde{j}, \tilde{k}, \tilde{s} \rightarrow 0$. 从而, LS 系统(6)和 CYQY 系统(7)实现了修正函数投影同步, 且未知参数可估计至真值. 证毕.

注 2 如果 LS 系统(6)或 CYQY 系统(7)的参数是已知的, 运用上述控制策略, 去掉其中相应的参数更新规则, 即可实现函数投影同步.

4. LS 系统和超混沌 Chen 系统的自适应修正函数投影同步

假设 LS 系统为驱动系统, 超混沌 Chen 系统为响应系统, 则驱动系统方程如(6)式, 响应系统方程如下所示:

$$\begin{aligned} \dot{x}_2 &= a(y_2 - x_2) + w_2 + u_1, \\ \dot{y}_2 &= dx_2 - x_2z_2 + cy_2 + u_2, \\ \dot{z}_2 &= x_2y_2 - bz_2 + u_3, \end{aligned} \quad (15)$$

$$\dot{w}_2 = y_2 z_2 + h w_2 + u_4,$$

这里, a, b, c, d, h 是未知参数, u_1, u_2, u_3, u_4 是所需要设计的同步控制器. 定义如同(8)式同步误差, 我们的目标是设计合适的控制器, 使得响应系统(15)能全局渐近修正函数投影同步驱动系统(6), 即 $\lim_{t \rightarrow \infty} \|e\| = 0$.

由(6)和(15)式可得误差动态方程为

$$\begin{aligned} \dot{e}_1 &= \alpha(y_1 - x_1) + \gamma w_1 \\ &\quad - \Lambda_1(t)(a(y_2 - x_2) + w_2) \\ &\quad - \dot{\Lambda}_1(t)x_2 - \Lambda_1(t)u_1, \\ \dot{e}_2 &= x_1(r - z_1) - y_1 \\ &\quad - \Lambda_2(t)(dx_2 - x_2 z_2 + cy_2) \\ &\quad - \dot{\Lambda}_2(t)y_2 - \Lambda_2(t)u_2, \\ \dot{e}_3 &= x_1 y_1 - \beta z_1 - \Lambda_3(t)(x_2 y_2 - bz_2) \\ &\quad - \dot{\Lambda}_3(t)z_2 - \Lambda_3(t)u_3, \\ \dot{e}_4 &= -x_1 - \alpha w_1 - \Lambda_4(t)(y_2 z_2 + h w_2) \\ &\quad - \dot{\Lambda}_4(t)w_2 - \Lambda_4(t)u_4. \end{aligned} \quad (16)$$

基于主动控制思想, 设计如下的同步控制器和参数更新规则:

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{1}{\Lambda_1(t)}(\alpha_1(y_1 - x_1) \\ &\quad - \Lambda_1(t)(a_1(y_2 - x_2) + w_2) \\ &\quad + \gamma_1 w_1 - \dot{\Lambda}_1(t)x_2 + e_1), \\ u_2 &= \frac{1}{\Lambda_2(t)}(x_1(r_1 - z_1) - \Lambda_2(t) \\ &\quad \times (d_1 x_2 - x_2 z_2 + c_1 y_2) \\ &\quad - y_1 - \dot{\Lambda}_2(t)y_2 + e_2), \\ u_3 &= \frac{1}{\Lambda_3(t)}(x_1 y_1 - \beta_1 z_1 \\ &\quad - \Lambda_3(t)(x_2 y_2 - b_1 z_2) \\ &\quad - \dot{\Lambda}_3(t)z_2 + e_3), \\ u_4 &= \frac{1}{\Lambda_4(t)}(-x_1 - \alpha_1 w_1 \\ &\quad - \Lambda_4(t)(y_2 z_2 + h_1 w_2) \\ &\quad - \dot{\Lambda}_4(t)w_2 + e_4); \\ \dot{\alpha}_1 &= (y_1 - x_1)e_1 - w_1 e_4 + \tilde{\alpha}, \\ \dot{\beta}_1 &= -z_1 e_3 + \tilde{\beta}, \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \dot{\gamma}_1 &= w_1 e_1 + \tilde{\gamma}, \\ \dot{r}_1 &= x_1 e_2 + \tilde{r}, \\ \dot{a}_1 &= -\Lambda_1(t)(y_2 - x_2)e_1 + \tilde{a}, \\ \dot{b}_1 &= \Lambda_3(t)z_2 e_3 + \tilde{b}, \\ \dot{c}_1 &= -\Lambda_2(t)y_2 e_2 + \tilde{c}, \\ \dot{d}_1 &= -\Lambda_2(t)x_2 e_2 + \tilde{d}, \\ \dot{h}_1 &= -\Lambda_4(t)w_2 e_4 + \tilde{h}, \end{aligned} \quad (18)$$

其中, $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, r_1, a_1, b_1, c_1, d_1, h_1$ 分别用来估计未知参数 $\alpha, \beta, \gamma, r, a, b, c, d, h$, $\tilde{\alpha} = \alpha - \alpha_1, \tilde{\beta} = \beta - \beta_1, \tilde{\gamma} = \gamma - \gamma_1, \tilde{r} = r - r_1, \tilde{a} = a - a_1, \tilde{b} = b - b_1, \tilde{c} = c - c_1, \tilde{d} = d - d_1, \tilde{h} = h - h_1$.

定理 2 对于任意给定的比例函数矩阵 $\Lambda(t)$ 和初始条件, 在同步控制器(17)和参数更新规则(18)的作用下, 可实现 LS 系统(6)和超混沌 Chen 系统(15)的修正函数投影同步, 且未知参数可估计至真值.

证明 将同步控制器(17)代入误差方程(16)式, 得

$$\begin{aligned} \dot{e}_1 &= (y_1 - x_1)\tilde{\alpha} + w_1 \tilde{\gamma} - \Lambda_1(t)(y_2 - x_2)\tilde{a} - e_1, \\ \dot{e}_2 &= x_1 \tilde{r} - \Lambda_2(t)(x_2 \tilde{d} + y_2 \tilde{c}) - e_2, \\ \dot{e}_3 &= -z_1 \tilde{\beta} + \Lambda_3(t)z_2 \tilde{b} - e_3, \\ \dot{e}_4 &= -w_1 \tilde{\alpha} - \Lambda_4(t)w_2 \tilde{h} - e_4. \end{aligned} \quad (19)$$

选取 Lyapunov 函数

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{2}(e^T e + \tilde{\alpha}^2 + \tilde{\beta}^2 + \tilde{\gamma}^2 + \tilde{r}^2 \\ &\quad + \tilde{a}^2 + \tilde{b}^2 + \tilde{c}^2 + \tilde{d}^2 + \tilde{h}^2), \end{aligned} \quad (20)$$

将其沿(19)式求导, 并将更新规则(18)式代入, 得

$$\begin{aligned} \dot{V} &= e^T \dot{e} + \tilde{\alpha} \dot{\tilde{\alpha}} + \tilde{\beta} \dot{\tilde{\beta}} + \tilde{\gamma} \dot{\tilde{\gamma}} + \tilde{r} \dot{\tilde{r}} + \tilde{a} \dot{\tilde{a}} \\ &\quad + \tilde{b} \dot{\tilde{b}} + \tilde{c} \dot{\tilde{c}} + \tilde{d} \dot{\tilde{d}} + \tilde{h} \dot{\tilde{h}} \\ &= e_1 \dot{e}_1 + e_2 \dot{e}_2 + e_3 \dot{e}_3 + e_4 \dot{e}_4 - \tilde{\alpha} \dot{\alpha}_1 - \tilde{\beta} \dot{\beta}_1 - \tilde{\gamma} \dot{\gamma}_1 \\ &\quad - \tilde{r} \dot{r}_1 - \tilde{a} \dot{a}_1 - \tilde{b} \dot{b}_1 - \tilde{c} \dot{c}_1 - \tilde{d} \dot{d}_1 - \tilde{h} \dot{h}_1 \\ &= -e_1^2 - e_2^2 - e_3^2 - e_4^2 - \tilde{\alpha}^2 - \tilde{\beta}^2 - \tilde{\gamma}^2 \\ &\quad - \tilde{r}^2 - \tilde{a}^2 - \tilde{b}^2 - \tilde{c}^2 - \tilde{d}^2 - \tilde{h}^2 \\ &= -2V. \end{aligned} \quad (21)$$

类似于定理 1 的证明, 可知在同步控制器 (17) 和参数更新规则 (18) 的作用下, LS 系统 (6) 和超混沌 Chen 系统 (15) 能实现修正函数投影同步, 且未知参数估计至真值. 证毕.

注 3 如果 LS 系统 (6) 或超混沌 Chen 系统 (15) 的参数是已知的, 运用上述控制策略, 去掉其中相应的参数更新规则, 即可实现函数投影同步.

5. 数值仿真

例 1 考虑由 (6) 式和 (7) 式构成的驱动响应系统, 选择系统参数 $\alpha = 1, \beta = 0.7, \gamma = 1.5, r = 26$ 和 $l = 35, m = 4.9, n = 25, j = 5, k = 35, s = 100$; 系统初始值 $(x_1(0), y_1(0), z_1(0), w_1(0)) = (-1, 1, 2, 0)$ 和 $(x_2(0), y_2(0), z_2(0), w_2(0)) = (2, 3, -2, 2)$; 参数估计初始值 $\alpha_1(0) = \beta_1(0) = \gamma_1(0) = r_1(0) = l_1(0) = m_1(0) = n_1(0) = j_1(0) = k_1(0) = s_1(0) = 0$; 比例函数 $\Lambda_1(t) = \Lambda_3(t) = 2 + \sin(t), \Lambda_2(t) = \Lambda_4(t) = 2 + \cos(t)$. 用四阶 Runge-Kutta 法进行数值仿真, 选取步长为 0.001. 仿真结果如图 1 和图 2 所示. 可见, 随着时间 t 的增长, 误差信号都渐近衰减到零, 表明 LS 系统和超混沌 CYQY 系统的状态按照给点的函数比例趋于同步. 同时, 未知参数收敛到真值 $\alpha = 1, \beta = 0.7, \gamma = 1.5, r = 26$ 和 $l = 35, m = 4.9, n = 25, j = 5, k = 35, s = 100$.

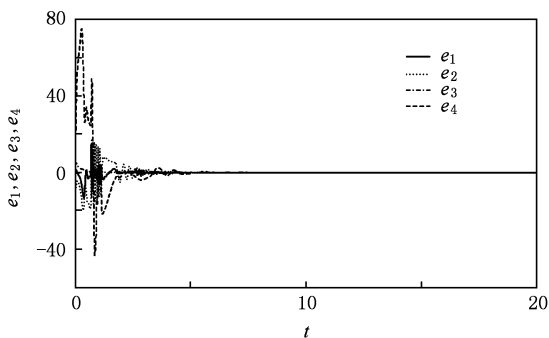


图 1 同步误差曲线

例 2 考虑 (6) 和 (15) 式构成的驱动响应系统, 选择系统参数 $\alpha = 1, \beta = 0.7, \gamma = 1.5, r = 26$ 和 $a = 35, b = 3, c = 12, d = 7, h = 0.6$; 系统初始值 $(x_1(0), y_1(0), z_1(0), w_1(0)) = (-1, 1, 2, 0)$ 和 $(x_2(0), y_2(0), z_2(0), w_2(0)) = (4, 3, -2, 2)$; 参

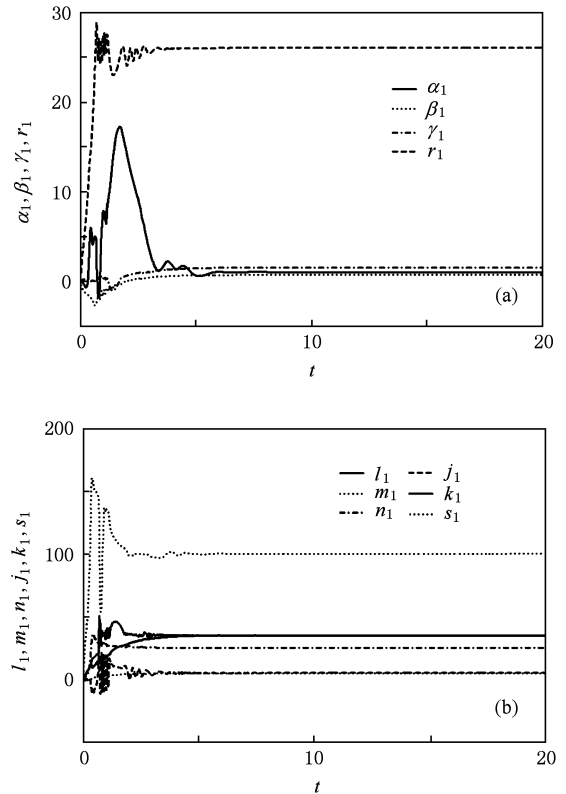


图 2 参数估计变化曲线 (a) $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, r_1$ 变化曲线, (b) $l_1, m_1, n_1, j_1, k_1, s_1$ 变化曲线

数估计初始值 $\alpha_1(0) = \beta_1(0) = \gamma_1(0) = r_1(0) = a_1(0) = b_1(0) = c_1(0) = d_1(0) = h_1(0) = 10$; 比例函数 $\Lambda_1(t) = \Lambda_3(t) = 2 + \sin(t), \Lambda_2(t) = \Lambda_4(t) = 2 + \cos(t)$. 用四阶 Runge-Kutta 法进行数值仿真, 选取步长为 0.001. 仿真结果如图 3 和图 4 所示. 可见, 随着时间 t 的增长, 误差信号都渐近衰减到零, 表明 LS 系统和超混沌 Chen 系统的状态按照给定的函数比例趋于同步. 同时, 未知参数收敛到真值 $\alpha = 1, \beta = 0.7, \gamma = 1.5, r = 26$ 和 $a = 35, b = 3, c = 12, d = 7, h = 0.6$.

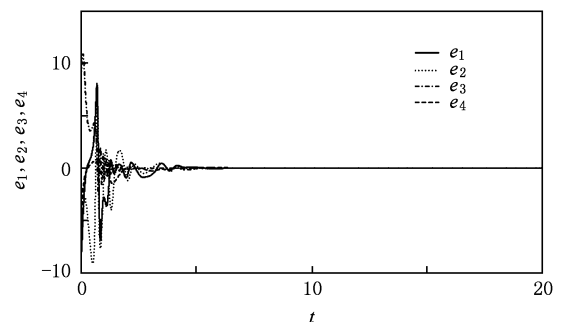


图 3 同步误差曲线

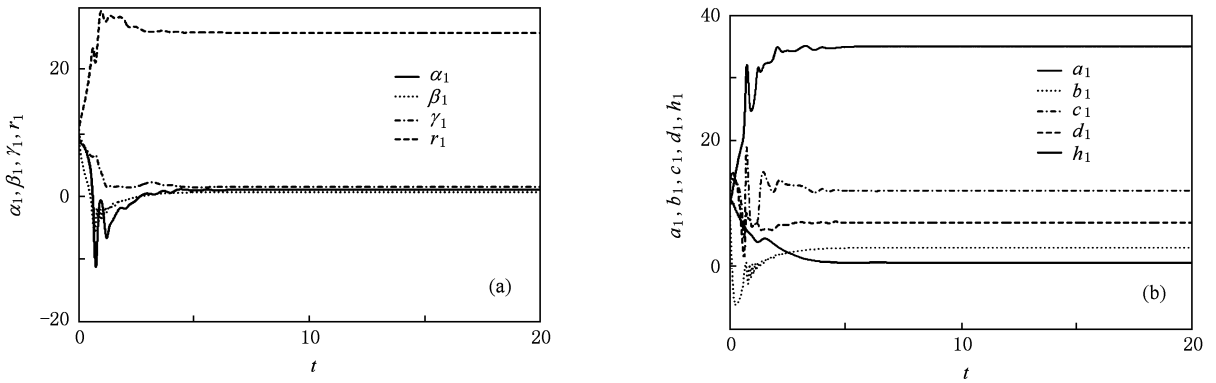


图4 参数估计变化曲线 (a) $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, r_1$ 变化曲线, (b) a_1, b_1, c_1, d_1, h_1 变化曲线

6. 结 论

针对三个超混沌系统,即 LS 系统、超混沌 CYQY 系统和超混沌 Chen 系统,基于 Lyapunov 稳定性理论和主动控制思想,设计合适的非线性同步

控制器以及未知参数的更新规则,实现了 LS 系统和超混沌 CYQY 系统及 LS 系统和超混沌 Chen 系统的修正函数投影同步.而且,所设计的参数更新规则可将未知参数估计至真值.鉴于函数投影同步的特点,将其应用到混沌保密通讯中,具有更强的保密性能.

- [1] Pecora L M, Carroll T L 1990 *Phys. Rev. Lett.* **64** 821
- [2] Chen M, Han Z 2003 *Chaos Soliton. Fract.* **17** 709
- [3] Yan J P, Li C P 2005 *Chaos Soliton. Fract.* **26** 1119
- [4] Li C P, Yan J P 2006 *Chaos Soliton. Fract.* **30** 140
- [5] Li G H 2006 *Chaos Soliton. Fract.* **30** 77
- [6] Li G H 2007 *Chaos Soliton. Fract.* **32** 1786
- [7] Wang F Q, Liu C H 2006 *Chin. Phys.* **15** 963
- [8] Zhang Q J, Lu J A 2008 *Chaos Soliton. Fract.* **37** 175
- [9] Du H Y, Zeng Q S, Wang C H 2009 *Chaos Soliton. Fract.* **42** 2399
- [10] Du H Y, Zeng Q S, Wang C H 2008 *Phys. Lett. A* **372** 5402
- [11] Cai N, Jing Y W, Zhang S Y 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 802 (in Chinese) [蔡娜、井元伟、张嗣瀛 2009 物理学报 **58** 802]
- [12] Wang X Y, Wu X J 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 605 (in Chinese) [王兴元、武相军 2006 物理学报 **55** 605]
- [13] Min F H, Wang Z Q 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 6238 (in Chinese) [闵富红、王执铨 2007 物理学报 **56** 6238]
- [14] Li S, Xu W, Li R H, Li Y P 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 5681 (in Chinese) [李爽、徐伟、李瑞红、李玉鹏 2006 物理学报 **55** 5681]
- [15] Liu Y Z, Jiang C S, Lin C S 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 707 (in Chinese) [刘扬正、姜长生、林长圣 2007 物理学报 **56** 707]
- [16] Park J H 2005 *Chaos Soliton. Fract.* **25** 333
- [17] Park J H 2005 *Chaos Soliton. Fract.* **26** 959
- [18] Ho M C, Hung Y C, Liu Z Y, Jiang I M 2006 *Phys. Lett. A* **348** 251
- [19] Al-sawalha M, Mossa, Noorani M S M 2009 *Commun. Nonlinear. Sci. Numer. Simul.* **15** 1036
- [20] Wang X Y, Meng J 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 0802 (in Chinese) [王兴元、孟娟 2007 物理学报 **56** 6288]
- [21] Stenflo L 1996 *Phys. Scr.* **53** 83
- [22] Chen Z, Yang Y, Qi Q, Yuan Z 2007 *Phys. Lett. A* **360** 696
- [23] Gao T, Chen G, Chen Z, Cang S 2007 *Phys. Lett. A* **361** 78
- [24] Huang J 2008 *Phys. Lett. A* **362** 4799

Adaptive modified function projective synchronization of different hyperchaotic systems *

Wang Jian-An[†] Liu He-Ping

(School of Information Engineering, University of Science and Technology Beijing, Beijing 100083, China)

(Received 14 June 2009; revised manuscript received 11 August 2009)

Abstract

This article treats the modified function projective synchronization between the hyperchaotic Lorenz-Stenflo (LS) system and a novel hyperchaotic CYQY system, and also that between the LS system and hyperchaotic Chen system, which have completely unknown parameters. By utilizing Lyapunov stability theory and active control method, the adaptive controllers and parameter update laws are derived to make the states of different hyperchaotic systems to attain adaptive modified function projective synchronization. The system's unknown parameters can be identified simultaneously. Numerical simulations are presented to demonstrate the effectiveness of the proposed methods.

Keywords: modified function projective synchronization, hyperchaotic system, Lyapunov stability theory, adaptive control

PACC: 0545

* Project supported by Key Discipline Project of Beijing Municipal Commission of Education (Grant No. XK100080537).

[†] E-mail: wangjianan588@sohu.com