

多种确定性广义 Farey 组织的网络金字塔^{*}

李 永 方锦清[†] 刘 强

(中国原子能科学研究院,核技术应用研究所,北京 102413)

(2009 年 8 月 26 日收到;2009 年 9 月 23 日收到修改稿)

提出复杂网络的另一类家族的确定性金字塔,它是由确定性的不同连接方式构造的广义 Farey 组织的网络金字塔(GFONP),理论推导了该类金字塔网络的拓扑性质及其转变特点,发现三种 GFONP 网络的度分布都服从指数分布形式,随着时间 t 的不断演化网络金字塔群聚系数不断减小并趋于一个常数,同时网络金字塔从异配向同配转变,度-度相关系数也趋于一个正的常数. 结果显示这类型网络的新特性具有应用潜力.

关键词: 广义 Farey 组织网络金字塔,复杂网络,网络特性

PACC: 0520, 0590, 0290

1. 引 言

现代科学具有高度分化与高度综合的特点,各门学科的相互渗透不断地产生出新的边缘学科和交叉学科. 最近十年由于小世界网络^[1]和无标度网络^[2]的发现激起了国内外复杂网络的研究热潮,由此诞生了一门广泛交叉科学——网络科学^[3-8]. 网络无处不在,网络科学研究很快与自然科学、社会科学及技术工程等众多科学融合在一起,迅速遍及各个领域.

历史上网络科学发展经历了三个里程碑^[3-6],每个里程碑都是从网络的理论模型首先取得突破的:1) Euler 图论;2) ER 随机图;3) 小世界模型和无标度模型. 迄今已经提出和积累了许多有价值的理论模型^[9-11],我们小组在深入探索和全面分析了网络科学模型及其特性的基础上,近年提出了统一混合网络理论体系^[12-23],包括理论模型三部曲,并构建和描述网络模型复杂性金字塔^[24-27]. 这个金字塔可以揭开复杂网络模型的复杂性—多样性与简单性—普适性之间相互转变的错综复杂关系.

真实世界的网络结构建筑风格各异,丰富多彩,如何把从大量已有实际数据转换到模型一直是网络科学极富挑战性课题^[28]. 从上个世纪 80 年代起,广义 Farey 树及其组织金字塔已应用于描述复

杂的非线性系统的多周期态及其层次结构^[29-33]. Kim 和 Ostlund^[29]根据非线性系统中的启示而建造了 Farey 三角关系,把无理数用一对有理数表示. Maselko 和 Swinney^[30]利用 Farey 三角形自然简洁描述实验里 Belousov-Zhabotinskii 反应中观察到的多周期态和自相似;发现映射中的锁频能用 Farey 算法表示,且可以用广义 Farey 算法来表示一个三维环面中对应的周期同步. Fang^[31]应用广义 Farey 树、Farey 三角形和 Farey 金字塔很好地描述了一类非线性动力学中的复杂的多周期性、准周期及其相似性. Calvo 及其合作者^[32]研究了非线性中的三周期共振中的层次结构,发现应用广义 Farey 序列可以简洁表示这种层次结构的复杂性,并且揭示了非线性动力学中的自相似结构. Buchleitner 及其合作者^[33]发现 Farey 有理数的分层组织形式可以和实验观察到的量子加速模式参数值相匹配,说明这种 Farey 有理数表示形式是在耗散系统中观察到的锁频现象的一种普遍特性. 上述研究表明:应用 Farey 及其广义 Farey 序列能够简洁而巧妙地刻画和组织非线性(混沌)系统中周期加倍分岔的对称性特性,以及具有分数与分维之间联系.

于是,本课题提出的问题是:如何拓广 Farey 及其广义 Farey 序列来探索复杂网络的奥妙,怎么把广义 Farey 序列与统一混合网络理论体系中的多个混合比联系起来寻找和揭示新一类复杂网络特性?

^{*} 国家自然科学基金(批准号:70431002,60874087 和 10647001)资助的课题.

[†] 通讯联系人. E-mail: fjq96@126.com

为此,我们引入复杂网络的另一类家族——广义 Farey 组织的树形网络及其金字塔网络^[34,35],从网络科学模型的角度对其展开相关特性研究. 该系列模型最重要的特色是巧妙结合了前面提到的统一混合网络理论体系中的多混合比作为控制参数,与广义 Farey 序列架起了桥梁,这方面涉及加权复杂网络,我们将在后继文章^[36]中逐一报道. 本文首先提出确定性的 Farey 金字塔网络 (Generalized Farey Organized Network Pyramid, GFONP) 的多种组织方式,随着时间的演化,该类型网络呈现几何级数增长,可以用来描述和揭示一些复杂网络的特性. 通过理论分析推导,我们研究了不同类型广义 Farey 组织的金字塔的主要拓扑特性,包括度分布、群聚系数和度-度相关系数(相称系数);并且用数值模拟确认了理论结果的正确性.

2. 广义 Farey 组织

普通的 Farey 树指的是包含在 0/1 和 1/1 之间的所有有理数的一个树状的结构. Farey 序列中相邻的 Farey 有理数称为 Farey 邻居. 把 0/1 和 1/1 作为 $t=0$ 时的起始邻居对,在以后的每一步(t)中两个 Farey 邻居 a/b 和 a'/b' 生成一个 Farey 后代,其 Farey 数满足 Farey 加法

$$a/b \oplus a'/b' = (a + a')/(b + b'). \quad (1)$$

普通的 Farey 树及其生成示于图 1(a). Farey 树序列具有一系列基本性质. 如令 $p/q, p'/q', p''/q''$ 为 Farey 序列的三个邻居,则有下列关系: $qp' - pq' = 1$, $\frac{p'}{q'} = \frac{p+p''}{q+q''}$; 如果 $p/q < p'/q'$, 则两邻两个序列的差为 $p'/q' - p/q = 1/qq'$. 可以导出 Farey 序列 F_n 长度为 $|F_n| = 1 + \sum_{m=1}^n \varphi(m)$, $|F_n|$ 的渐近特性近似为 $\frac{3n^2}{\pi^2}$. 两个序列 F_n 和 F_{n-1} 的长度关系为 $|F_n| = |F_{n-1}| + \varphi(n)$, 其中 φ 为欧拉函数. 对正整数 n , $\varphi(n)$ 是小于或等于 n 的数中与 n 互质的数的数目,此函数又称为欧拉商数 (Euler's quotient function).

最近,我们研究提出了广义 Farey 树网络的构造算法如下:由三个初始(第一代)顶点(0/1, 1/0, 1/1)两两组成三组:(0/1, 1/0), (1/0, 1/1) 和 (1/1, 0/1), 然后从每组节点分别构造出三丛(支) Farey 树:下一代的顶点值为上层相邻两个顶点的分子和分母分别相加,即按照(1)式相加;同时下一代的顶

点分别和上层相邻两个顶点相连接. 如此类推,不断生长下去,便得到三支扩展的 Farey 树网络. 图 1(b)给出了代数为 6 的广义 Farey 树的结构图,其中最下面的那一支即为传统的一维 Farey 树,具有 Farey 树的内在规律,而上面两个树丛网络与传统的一维 Farey 树有所不同,故称整个网络为广义 Farey 树网络. 三个分支树网络不仅具有指数形式的度分布,并且具有小世界特性^[34,35],可以反映一些实际网络的多样性和复杂性.

3. 广义 Farey 组织的网络金字塔 (GFONP)

在上述研究的基础上,我们构造广义 Farey 组织的网络金字塔 (GFONP). 这类金字塔网络结构可以有多种样式,本文中给出一种典型的方式,即具有底边是六边形的金字塔结构网络,称为 GFONP 网络. 采用 3 位 Farey 序列数表示网络中每个节点,在以后的每一步中两个 Farey 数 abc 和 $a'b'c'$ 生成一个 Farey 后代时,后代的 Farey 数按照 Farey 加法计算

$$abc \oplus a'b'c' = (a + a')(b + b')(c + c'). \quad (2)$$

3.1. GFONP-1 模型构造

GFONP-1 网络模型迭代情况如图 2 所示:网络起始于具有底边是六边形的金字塔结构,顶层顶点和底边六边形的六个节点构成六组广义 Farey 组织;每个时间步,每组按照 Farey 树的构造加入新节点. 同样地,把 t 时刻时的网络表示为 G_t .

1) 当时刻 $t=0$ 时,网络 G_0 由 7 个节点 12 条边构成,其中 6 个节点在底部构成一个六边形,一个节点在顶端同时连接底部六边形的六个节点,节点为 3 位数(可以表示权值),分别采用 7 个三位的 Farey 数: 010, 001, 110, 011, 101, 111, 100 表示;这样,就形成了六组初始的 Farey 组织 (100, 010), (100, 001), (100, 110), (100, 011), (100, 101), (100, 111).

2) 当 $t \geq 1$ 时,在六组 Farey 组织中逐步加入新节点,即 $t-1$ 时刻各组 Farey 组织的每两个相邻节点之间在 t 时刻加入一个新的节点(子节点),新子节点分别和生成该子节点的两个节点相连,这样这三个节点就形成了一个三角形,新子节点利用(2)式进行表示;同时六组 Farey 组织在同一水平层面

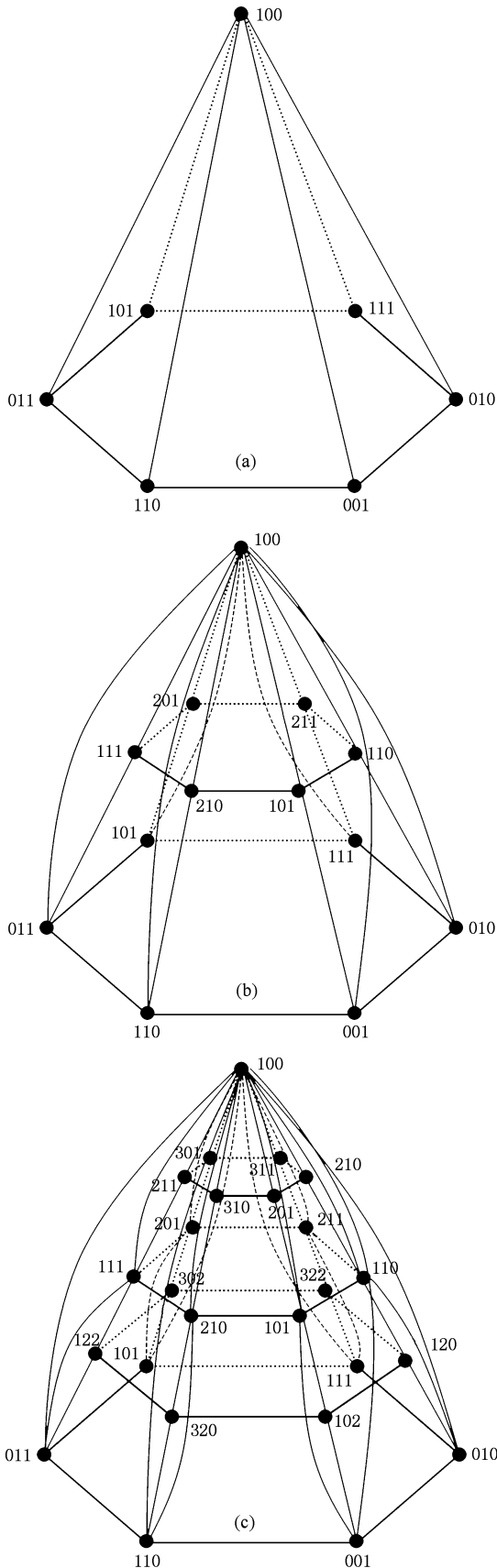


图2 GFONP-1 网络构造过程(网络图的前3步迭代情况)
(a) $t=0$; (b) $t=1$; (c) $t=2$

于 $6m + 1$ 个节点,每个节点的 Farey 数表示方法和 GFONP - 1 网络模型一致,其中图示以 $m = 2$ 为例.

1) 当 $t=0$ 时的初始网络可以分两步生成,即图 3(a)和(b)所示,其中图 3(a)与 GFONP-1 网络模型初始时刻一致;图 3(b)是在图 3(a)的基础上,底层面上六边形中每条边上取中点作为新的节点(去掉了原来的边,而生成两条新边),六个新节点顺序相连成新的一个六边形,在新的六边形上继续取中点顺序相连可形成第 3 个六边形,依次类推,直到有 m 个六边形;各个六边形顶点和最顶层顶点构成不同的 Farey 组织,共同相连成一个金字塔结构.新六边形节点的 Farey 利用生成该节点的两个节点 Farey 数按照(2)式计算表示.

2) 当 $t \geq 1$ 时,在 $t - 1$ 步中生成的每个 Farey 组织按照 GFONP-1 网络模型的方式增加子节点和边.如当 $m=2$ 时,图 3(c)和(d)分别是图 3(a)和(b)在时刻 $t=1$ 的增长结果;图 3(d)是 GFONP-2 网络模型在时刻 $t=1$ 的最终网络图.

3) 这样,可以迭代的方式不断生成任意规模的网络金字塔,图 3 给出了前 2 步网络结构示意图,图 3(d)称为 GFONP-2 网络金字塔.

根据网络构造规则,GFONP-2 网络在 t 时刻节点数总节点数目 n_t 和总的边数 e_t 为

$$n_t = 6m \cdot 2^t + 1, \tag{4a}$$

$$e_t = (24m - 6) \cdot 2^t - 6m. \tag{4b}$$

3.3. GFONP-3 模型构造

GFONP-3 网络模型是在 GFONP-2 网络模型的基础上增加了边的连接,即在生成 GFONP-2 网络每一步中,每层面上六边形中每条边上取中点作为新的节点时保留原来该边,而非去掉.图 4(a)和(b)分别以最底层面为例示出了每一层面上 GFONP-2 和 GFONP-3 网络的结构,图 4(c)则给出了时刻 $t=1$ 时的 GFONP-3 网络,其中 $m=2$. 这样,可以迭代的方式不断生成任意规模的网络金字塔.根据网络构造规则,GFONP-3 网络在 t 时刻节点数总节点数目 n_t 和总的边数 e_t 为

$$n_t = 6m \cdot 2^t + 1, \tag{5a}$$

$$e_t = (30m - 12) \cdot 2^t - 6m. \tag{5b}$$

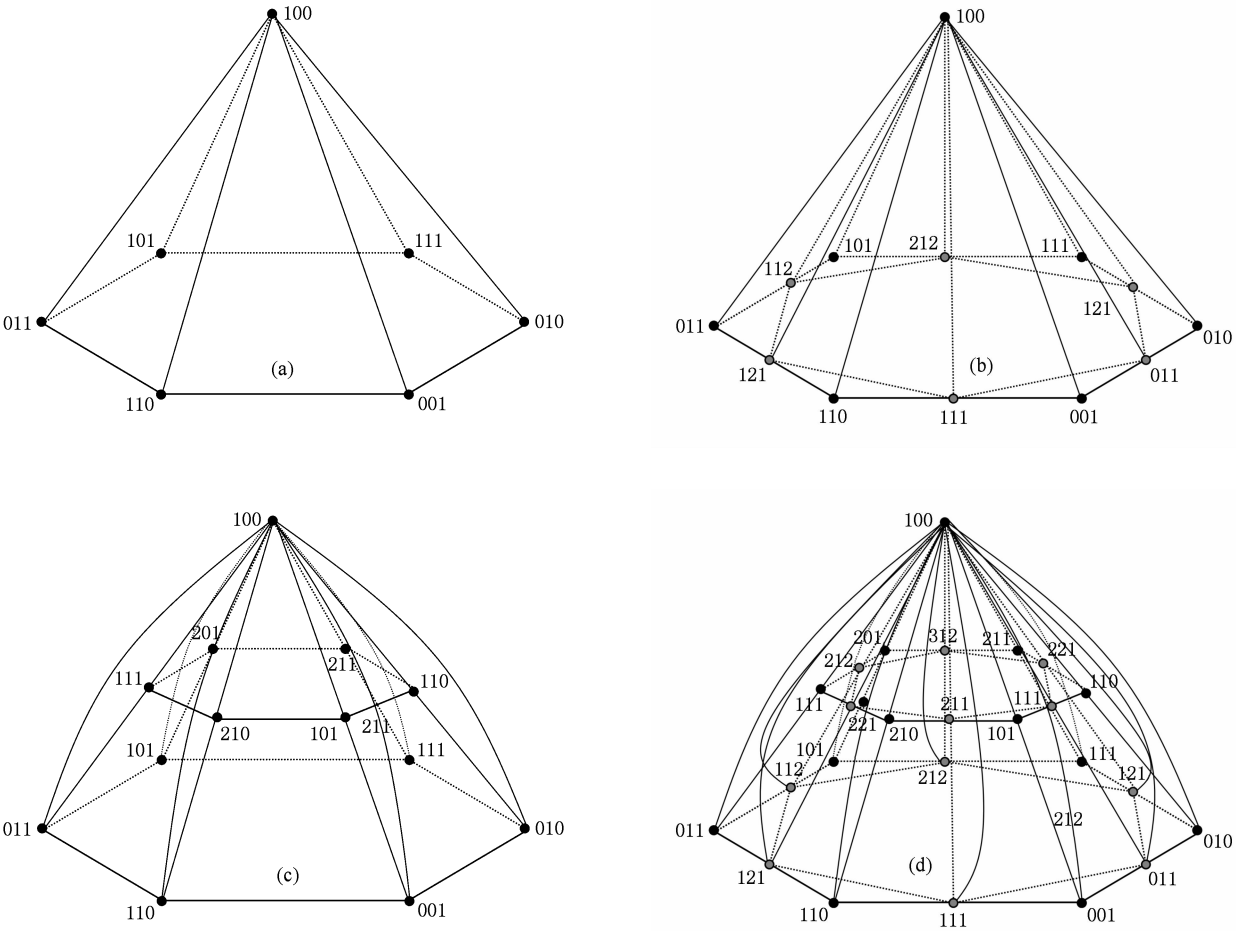


图3 GFONP-2 网络构造过程(其中 $m=2$) (a),(b) 为 $t=0$; (c),(d) 为 $t=1$

4. GFONP 的网络特性

4.1. 度分布

网络中节点 i 的度定义为该节点拥有的连边数. 根据(3)—(5)式,可以得到 GFONP-1, GFONP-2, GFONP-3 网络的平均度 $\bar{k}$,即

$$\bar{k} = \frac{2e_t}{n_t} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \begin{cases} 6, & \text{GFONP-1,} \\ 8, & \text{GFONP-2,} \\ 10, & \text{GFONP-3.} \end{cases} \quad (6)$$

度越大,节点越重要. 度分布 $P(k)$ 指在网络中随机选择一个节点时,它的度为 k 的概率,度分布是网络基本拓扑特性之一. 在文献[34,35]中我们已经详细推导出了 GFONP-1 和 GFONP-2 网络的度分布,同样的方法,我们可以得到 GFONP-3 网络的度分布,其中 t 时步 GFONP-3 网络中节点的度 k 及其个数 N_k 参见表 1.

三种网络的度分布都为离散分布,近似如下:
 $P(k)$

$$\sim \begin{cases} 2^{-(\frac{k}{2}-1)}, & k = 4,6,\cdots,2t+2, \text{GFONP-1,} \\ \frac{2m-1}{m} 2^{-(\frac{k}{2}-1)}, & k = 6,8,\cdots,2t+2 \text{GFONP-2,} \\ \frac{2m-2}{m} 2^{-(\frac{k}{2}-2)}, & k = 8,10,\cdots,2t+4, \text{GFONP-3.} \end{cases} \quad (7)$$

可见,三种网络度分布全部满足指数分布,理论推导结果参见图 5,可见,GFONP-1 和 GFONP-2 度分布一致;GFONP-2 和 GFONP-3 度分布指数相差为 1.

4.2. 群聚系数 C

聚类属性是网络特性研究的另外一个重要特征. 网络中节点 i 的群聚系数 C_i 是节点 i 的邻居中实际存在的连边数 E_i 与 i 的邻居中能够存在的最大连边数的比值

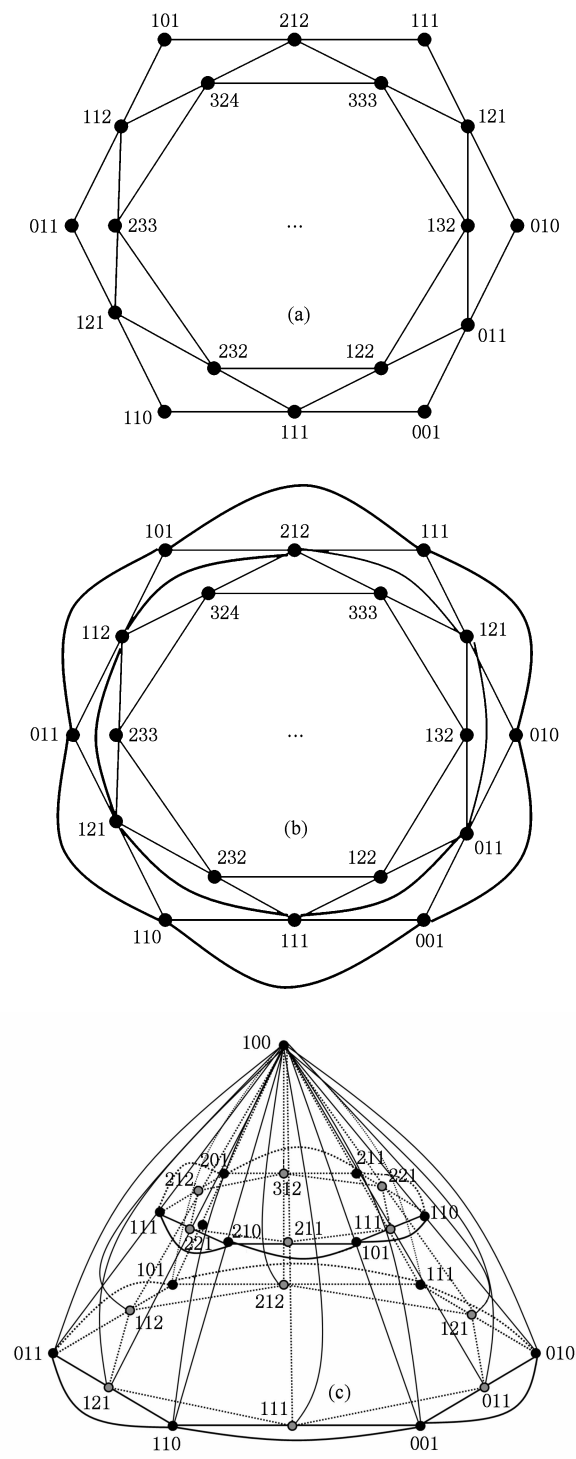


图4 网络每层面结构以及 GFONP-3 网络示意图 (a) GFONP-2 网络每层面示意图; (b) GFONP-3 网络每层面示意图; (c) GFONP-3 网络,其中 $t = 1, m = 2$

$$C_i = \frac{2E_i}{k_i(k_i - 1)}, \tag{8}$$

网络的群聚系数 C 是所有节点群聚系数 C_i 的平

表1 t 时步 GFONP-3 网络中节点的度 k 及其个数 N_k

k	N_k	参数取值
$6m(t+1)$	1	—
$t+5$	12	—
$t+7$	$6(m-2)$	—
$6+2(t-i)$	$3 \cdot 2^{i+1}$	$i = 1, 2, \dots, t$
$8+2(t-i)$	$3(m-2) \cdot 2^{i+1}$	$i = 1, 2, \dots, t$

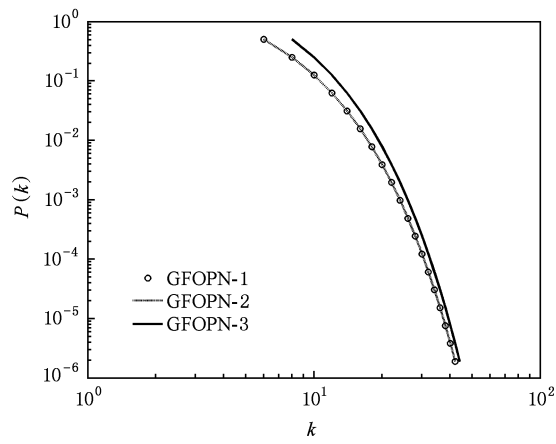


图5 三种不同网络的度分布($t = 20, m = 3$)

均值

$$C = \frac{1}{n_t} \sum_{i \in G_t} C_i = \frac{1}{n_t} \sum_{k_i} N_{k_i} C_{i,t}. \tag{9}$$

根据模型的演化,可得到 t 时刻不同网络的相关数值,参见表2,从而计算得到 C .

图6给出了三种网络群聚系数理论计算图. 可以看出,当演化时刻 t 趋于无穷时,三种网络的 C 趋于一个常数,只是数值不同,它们之间的大小关系为 $C_{\text{GFONP-3}} > C_{\text{GFONP-1}} > C_{\text{GFONP-2}}$.

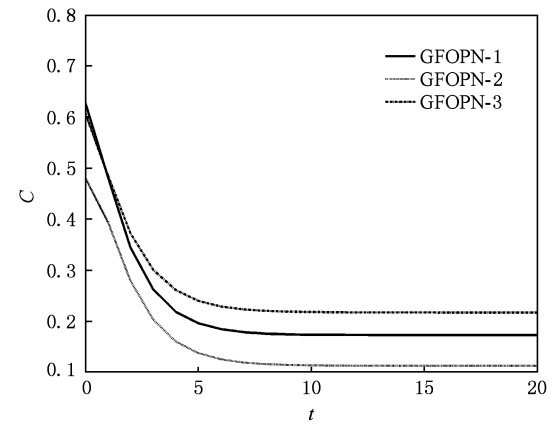


图6 群聚系数理论计算和数值模拟对照图($m = 5$)

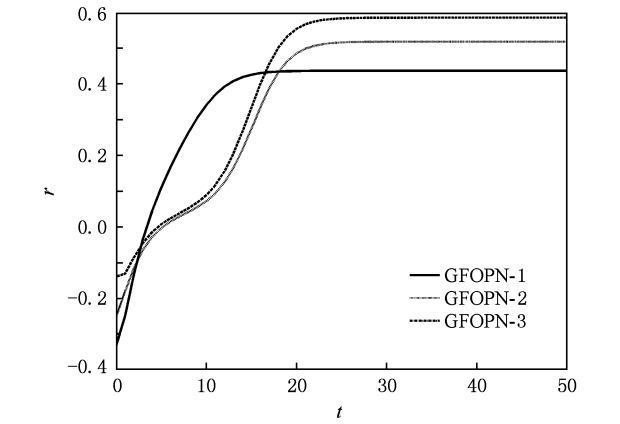


图7 网络在不同时刻的度-度关联性($m=5$)

4.3. 度-度关联性 r

另外一个描述复杂网络中不同节点之间连接关系的特征量是度-度关联性. 目前数值计算中经常使用的计算公式是 Newman 给出的根据节点度的 Pearson 关联系数 r 就可以描述网络的度-度关联性.

$$r = \frac{e_t^{-1} \sum_i p_i q_i - [e_t^{-1} \sum_i \frac{1}{2} (p_i + q_i)]^2}{e_t^{-1} \sum_i \frac{1}{2} (p_i^2 + q_i^2) - [e_t^{-1} \sum_i \frac{1}{2} (p_i + q_i)]^2},$$

(10)

表2 t 时步 3 种网络中节点 i 的度 k, E_i 及其个数 N_k

GFONP-1			GFONP-2			GFONP-3		
k	N_k	E_i	k	N_k	E_i	k	N_k	E_i
$6(t+1)$	1	$6(2t+1)$	$6m(t+1)$	1	$12m-6+(18m-6)t$	$6m(t+1)$	1	$18m-12+(24m-12)t$
$3+t$	6	$t+2$	$t+3$	6	$t+2$	$t+5$	6	$t+7$
$4+2(t-t_u)$	6	$3+2(t-t_u)$	$t+5$	$6(m-3)$	$t+4$	$t+7$	$6(m-3)$	$t+12$
$4+2(t-t_v)$	$6(2^{t_v-1}-1)$	$1+2(t-t_v)$	$t+5$	6	$t+5$	$t+7$	6	$t+12$
			$t+6$	6	$t+2$	$t+5$	6	$t+7$
			$4+2(t-t_u)$	6	$3+2(t-t_u)$	$6+2(t-t_u)$	6	$8+2(t-t_u)$
			$6+2(t-t_u)$	$6(m-3)$	$5+2(t-t_u)$	$8+2(t-t_u)$	$6(m-3)$	$13+2(t-t_u)$
			$6+2(t-t_u)$	6	$6+2(t-t_u)$	$8+2(t-t_u)$	6	$13+2(t-t_u)$
			$6+2(t-t_u)$	6	$7+2(t-t_u)$	$6+2(t-t_u)$	6	$8+2(t-t_u)$
			$4+2(t-t_v)$	$6(2^{t_v-1}-1)$	$1+2(t-t_v)$	$6+2(t-t_v)$	$6(2^{t_v-1}-1)$	$4+2(t-t_v)$
			$6+2(t-t_v)$	$6(m-3) \cdot (2^{t_v-1}-1)$	$3+2(t-t_v)$	$8+2(t-t_v)$	$6(m-3) \cdot (2^{t_v-1}-1)$	$7+2(t-t_v)$
			$6+2(t-t_v)$	$6(2^{t_v-1}-1)$	$2+2(t-t_v)$	$8+2(t-t_v)$	$6(2^{t_v-1}-1)$	$7+2(t-t_v)$
			$6+2(t-t_u)$	$6(2^{t_v-1}-1)$	$1+2(t-t_v)$	$6+2(t-t_u)$	$6(2^{t_v-1}-1)$	$4+2(t-t_v)$

注: 参数 $1 \leq t_u \leq t, 2 \leq t_v \leq t$.

其中 p_i, q_i 分别表示连接第 i 条边的两个节点 p, q 的度, e_t 为网络的总边数. 此方法给出的是一个唯一数, 它在同类混合网络下为正, 在异类混合网络下为负. r 的取值范围为 $-1 \leq r \leq 1$, 当 $r > 0$ 时, 网络是正相关的, 称为同类(正)匹配, 度大的节点倾向于连接度大的节点; 当 $r < 0$ 时, 网络是负关联的, 称为异类(负)匹配, 度大的节点倾向于和度小的节点连接; 当 $r = 0$ 时, 网络是不关联的.

根据演化规则, 各种 GFONP 网络可以看作是多个六边形组成, 并且六边形之间互有连接. 网络中连接节点 p 和节点 q 的边 e_i 能分为两部分: 一部分为在同一个六边形内部的边, 另一部分为不同六边形之间的边. 对 t 时刻网络中已有的边分批研究, 找出连接度为 k_p 和 k_q 的两个度节点的边 e_i 的数目 $N_{k_p k_q}$, 满足 $e_t = \sum N_{k_p k_q}$, 然后代入(10)式进行计算, 即可计算出时刻 t 时不同网络的 r 为

$$r = \begin{cases} \frac{\frac{-918-402t+1080\cdot 2^t+6\cdot t^2+18\cdot t^3}{18\cdot 2^t-6}-\left(\frac{-87-18t+132\cdot 2^t+9\cdot t^2}{18\cdot 2^t-6}\right)^2}{\frac{-1035-387t+135\cdot t^2+87\cdot t^3+1224\cdot 2^t}{18\cdot 2^t-6}-\left(\frac{-87-18t+132\cdot 2^t+9\cdot t^2}{18\cdot 2^t-6}\right)^2}, & \text{GFOPN-1,} \\ \frac{\frac{A_1}{(24m-6)2^t-6m}-\left(\frac{A_2}{(24m-6)2^t-6m}\right)^2}{\frac{A_3}{(24m-6)2^t-6m}-\left(\frac{A_2}{(24m-6)2^t-6m}\right)^2}, & m \geq 1, \text{GFOPN-2,} \\ \frac{\frac{A_4}{(30m-12)2^t-6m}-\left(\frac{A_5}{(30m-12)2^t-6m}\right)^2}{\frac{A_6}{(30m-12)2^t-6m}-\left(\frac{A_5}{(30m-12)2^t-6m}\right)^2}, & m > 1, \text{GFOPN-3,} \end{cases}$$

(11)

其中

$$\begin{aligned} A_1 &= 606 + 420t - 1884m - 1056 \cdot 2^t - 1278mt - 324m2^t - 18mt^3 + 2112m2^t \\ &\quad + 180m^2 + 396m^2t + 252m^2t^2 + 78t^2 + 36m^2t^3, \\ A_2 &= 36 + 18t - 84 \cdot 2^t - 141m - 72mt - 9mt^2 + 216m2^t + 18m^2 + 36m^2t + 18m^2t^2, \\ A_3 &= 738 + 408t - 1881m - 1032 \cdot 2^t - 1119mt - 255m2^t - 21mt^3 + 66t^2 \\ &\quad + 2256m2^t + 108m^3 + 324m^3t^2 + 324m^3t, \\ A_4 &= 1524 + 84t^2 + 720t - 2910m + 252m^2 + 3720m2^t - 18mt^3 + 540m^2t \\ &\quad + 324m^2t^2 - 1734mt - 378mt^2 - 2736 \cdot 2^t + 36m^2t^3, \\ A_5 &= 54 + 18t - 177m + 18m^2 + 36m^2t + 18m^2t^2 - 78mt - 9mt^2 - 192 \cdot 2^t + 324m2^t, \\ A_6 &= 1452 + 72t^2 + 636t + 108m^3t^3 + 324m^3t + 324m^3t^2 - 2835m + 108m^3 \\ &\quad - 21mt^3 - 1503mt - 297mt^2 + 3864m2^t - 2688 \cdot 2^t. \end{aligned}$$

对 r 取极限

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} r = \begin{cases} \frac{7}{16}, & \text{GFONP-1,} \\ \frac{28m^2-12m-5}{52m^2-14m-6} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \frac{7}{13}, & \text{GFONP-2,} \\ \frac{23m^2-8m-14}{38m^2-9m-16} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \frac{23}{38}, & \text{GFONP-3.} \end{cases}$$

(12)

选取 $m=5$, 相应的理论结果参见图 7. 当 $t < 4$ 时 $r < 0$, 当 $t \geq 4$ 时 $r > 0$, 当 t 继续增加时 r 单调递增并趋于一个常数, 只是数值不同, 它们之间的大小关系为 $C_{\text{GFONP-3}} > C_{\text{GFONP-2}} > C_{\text{GFONP-1}}$, 网络为正相关.

5. 结 论

总之, 我们引入一类复杂网络的新家族——随时间演化的广义 Farey 网络金字塔 GFONP, 提出和研究了三种典型的确定性 GFONP, 理论推导了网络的度分布、群聚系数、相称性系数等网络特性, 发现

所有网络的具有相似的网络特性. 主要结果包括: 度分布为离散的指数分布; 网络的群聚系数随着时刻 t 的增加而递减, 并最终都各自趋于一个常数; 网络的相称性系数最初都是异类匹配, 而随着 t 的增加, 逐渐递增变为同类匹配, 同时最终趋于一个正的常数.

广义 Farey 树及其金字塔可以刻画非线性系统的许多特性(自相似性、多周期性和分维等), 我组首次从网络科学的角度对其扩展, 引入了另外一大类复杂网络家族, 发现和揭示这类网络及其金字塔的基本特性. 本文是从确定性构造的角度提出了网

络金字塔三种典型的网络构建方式. 此外, 把 Farey 树的节点值(序列)作为点强和边权 GFONP, 我们还构建其他多种方式的加权金字塔, 包括一些简化模型、引入层面内、层面与层面之间的随机与优先连接机理等. 加权 GFONP, 可以与我组先前提出的统一混合网络理论体系中三个混合比联系起来, 这方面相关工作将另作介绍^[35].

这里指出: 目前已经在纳米科学中发现存在纳米网络金字塔结构^[37], 我国在 2005 年第一次成功地制备了大面积高定向的一维纳米金字塔阵列的纳米材料^[38]; 这类纳米金字塔不寻常的拓扑结构可

能改变生物材料的构象, 从而影响了其最终的生物活性. 本文研究的金字塔 GFONP 及其加权类型有可能在实际网络中得到应用, 具有一定的发展前景. 事实上, 本文揭示的 GFONP 的度分布具有指数分布特性比较符合一些实际网络特性(如经济网络、金融网络、人类行为网络等). 上述一些新的结果不仅丰富了已有的网络理论模型, 而且还提供了一条新的途径, 以更好地描述更加复杂性与多样性、简单性和普适性及其之间的关系. 显然, 继续探讨加权广义 Farey 网络金字塔及其实际应用, 这将是下一步值得努力的一个方向.

- [1] Watts D J, Strogatz S H 1998 *Nature* **393** 440
- [2] Barabási A L, Albert R 1999 *Science* **286** 509
- [3] Fang J Q, Wang X F, Zheng Z G, Bi Q, Di Z R, LI X 2007 *Progress in Physics* **27** 239 (in Chinese) [方锦清、汪小帆、郑志刚、毕 桥、狄增如、李 翔 2007 物理学进展 **27** 239]
- [4] Fang J Q, Wang X F, Zheng Z G, LI X, Di Z R, Bi Q 2007 *Progress in Physics* **27** 361 (in Chinese) [方锦清、汪小帆、郑志刚、李 翔、狄增如、毕 桥 2007 物理学进展 **27** 361]
- [5] Fang J Q 2008 *Mastering Beam Halo and Exploring Network Science* (Beijing: Atomic Energy Press) p57 (in Chinese) [方锦清 2008 驾驭强流束晕与探索网络科学(北京:原子能出版社)第 57 页]
- [6] Chen G R, Xu X M 2008 *Complex Networks Theory and Applications* (Hong Kong: Shanghai Systems Science Press) p1 (in Chinese) [陈关荣、徐晓鸣 2008 复杂网络理论与应用(香港:上海系统科学出版社)第 1 页]
- [7] Wang X F, Li X, Chen G R 2006 *Complex Network theory and Its Application* (Beijing: Tsinghua University Press) p18 (in Chinese) [汪小帆、李 翔、陈关荣 2006 复杂网络理论及其应用(北京:清华大学出版社)第 18 页]
- [8] He D R, Liu Z H, Wang B H 2009 *Complex systems and complex networks* (Beijing: Higher Education Press) p1 (in Chinese) [何大韧、刘宗华、汪秉宏 2009 复杂系统与复杂网络(北京:高等教育出版社)第 1 页]
- [9] He Y, Zhang P P, Xu T, Jiang Y M, He D R 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 1710 (in Chinese) [何阅、张培培、许 田、姜玉梅、何大韧 2004 物理学报 **53** 1710]
- [10] Li J, Wang B H, Jiang P Q, Zhou T, Wang W X 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 4051 (in Chinese) [李 季、汪秉宏、蒋品群、周 涛、王文旭 2006 物理学报 **55** 4051]
- [11] Wang Y, Zheng Z G 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 4421 (in Chinese) [王 延、郑志刚 2009 物理学报 **58** 4421]
- [12] Fang J Q, Liang Y 2005 *Chin. Phys. Lett.* **22** 2719
- [13] Fang J Q, Bi Q, Li Y, Lu X B, Liu Q 2007 *Advances in Complex Systems* **10** 117
- [14] Fang J Q, Li Y, Bi Q 2007 *International Journal of Modern Physics B* **2130** 5121
- [15] Li Y, Fang J Q, Liu Q, Liang Y 2006 *Commun. Theor. Phys.* **45** 67
- [16] Fang J Q, Bi Q, Li Y, Lu X B, Liu Q 2007 *Chin. Phys. Lett.* **24** 279
- [17] Fang J Q, Bi Q, Li Y, Lu X B, Liu Q 2007 *Chinese Science* **50** 379
- [18] Fang J Q, Bi Q, Li Y, Lu X B, Liu Q 2007 *Commun. Theor. Phys.* **48** 377
- [19] Fang J Q, Bi Q, Li Y 2007 *Science Frontiers of Physics in China* **1** 109
- [20] Li Y, Fang J Q, Liu Q 2007 *Entropy* **9** 73
- [21] Li Y, Fang J Q, Liu Q 2007 *Science & Technology Review* **25** 23 (in Chinese) [李 永、方锦清、刘 强 2007 科技导报 **25** 23]
- [22] Fang J Q, Li Y, Bi Q 2008 *Complex Systems and Complexity Science* **5** 56 (in Chinese) [方锦清、李 永、毕 桥 2008 复杂系统与复杂性科学 **5** 56]
- [23] Fang J Q, Li Y 2008 *Advances in Mechanics* **38** 663 (in Chinese) [方锦清、李 永 2008 力学进展 **38** 663]
- [24] Fang J Q 2009 *Int. J. Systems* **1** 453
- [25] Fang J Q, Li Y 2009 *First International Conference, Complex 2009* (Berlin: Springer) p78
- [26] Fang J Q, Wang X F, Zheng Z G 2009 *Progress in Physics* **29** 1 (in Chinese) [方锦清、汪小帆、郑志刚 2009 物理学进展 **29** 1]
- [27] Fang J Q, Li Y 2010 *Commun. Theor. Phys.* **53** 389
- [28] González M C, Barabási A L 2007 *Nature Physics* **3** 224
- [29] Kim S H, Ostlund S 1986 *Phys. Rev. A* **34** 3426
- [30] Maselko J, Swinney H L 1987 *Phys. Lett. A* **119** 403
- [31] Fang J Q 1990 *Phys. Lett. A* **146** 35
- [32] Calvo O, Cartwright J H E, Gonzalez D L, Piro O, Sportolari F 2000 *IEEE Transactions* **47** 491
- [33] Buchleitner A, d'Arcy M B, Fishman S, SA Gardiner, Guarneri I 2006 *Phys. Rev. Lett.* **96** 164101

- [34] Fang J Q, Li Y 2009 *First International Conference, Complex* 2009 (Berlin:Springer) p1678 (Accepted)[刘 强、方锦清、李 永 物理学报(已接受)]
- [35] Li Y, Fang J Q, Liu Q 2009 *Journal of Systems Science and Complexity* (to be published) [37] Amato I <http://www.wtec.org/loyola/nano/IWGN>. Public. Brochure/ [2009-09-21]
- [36] Liu Q, Fang J Q, Li Y *Acta Phys. Sin.* (in Chinese) (in Press) [38] Liu F, Cao P J, Zhang H R, Tian J F, Xiao C W, Shen C M, Li J Q, Gao H J 2005 *Advanced materials* **17** 1893

Determinate generalized Farey organized network pyramid^{*}

Li Yong Fang Jin-Qing[†] Liu Qiang

(China Institute of Atomic Energy, Department of Nuclear Technology Application, Beijing 102413, China)

(Received 26 August 2009; revised manuscript received 23 September 2009)

Abstract

Another family of complex network—the generalized Farey organized network pyramid (GFONP) is introduced. Three typical determinate constructional algorithms are shown, and corresponding topological characteristics are studied by theoretical and numerical analysis. The results show that the three determinate GFONP networks have similar characteristics, i. e. their degree distributions follow exponential distribution in form, the clustering coefficient of the network decreases to a constant value with the step t increasing, the resulting network evolves from one with disassortative to one with assortative coefficient with increasing t , and the degree-degree correlation coefficient tends to a positive constant. This may lead to potential applications of the network of pyramidal structure.

Keywords: generalized Farey organized network pyramid, complex network, network characteristics

PACC: 0520, 0590, 0290

^{*} Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 70431002, 60874087 and 10647001).

[†] Corresponding author. E-mail: fj96@126.com