

二维随机介质中柱面波传播及其 局域性的随机泛函分析*

丁 锐¹⁾ 金亚秋^{1)†} 小仓久直²⁾

1) (复旦大学波散射与遥感信息教育部重点实验室, 上海 200433)

2) (京都大学电子工程系, 日本京都 606-01)

(2009 年 7 月 8 日收到; 2009 年 12 月 30 日收到修改稿)

分析了二维各向同性均匀随机介质中柱面波的传播特性及局域化现象. 用随机泛函理论, 在频域内将随机介电起伏展开成柱坐标系下的 Wiener 积分式, 将波场表示为内外行柱面波的线性和, 求解二维 Helmholtz 波动方程, 得到随机介电起伏对柱面波幅度与相位调制的解析表达. 由柱面波能量的空间分布验证了波的局域化现象, 并求解局域化长度. 二维随机介质中平面波按柱面波展开的波转换方程与非随机介质中的情形有相似的表达, 但具有随机介电起伏对幅度和相位的调制, 并给出数值模拟结果.

关键词: 二维随机介质, 柱面波传播, 局域化

PACC: 0350, 0365D, 0365G, 4110H

1. 引 言

波传播的局域化, 是指其能量被集中在空间特定区域内而不再向外传播. 电磁波在散射媒质中经过多次散射, 在一定的条件下会产生局域化现象. Anderson^[1]在研究随机晶体点阵中电流传播时提出了局域化的概念. 随后在完全随机的介质中也发现了局域化现象^[2-10]. Abrahams 等^[11]运用标度理论论证了无量子扩散条件下的局域化现象, 指出电流的局域性是由电子本质上的波动特性所决定, 是在一定条件下由介质的多次散射过程产生. 当介质尺寸大于局域化长度时, 在任意的一维和二维随机介质中都存在波的局域化现象, 而三维介质中只有较强的随机性才会产生局域化现象^[12]. 近年来, 受到广泛关注的光子带隙结构材料以及电磁带隙结构材料均利用了电磁波的局域化特性, 使得材料对于电磁波的传播具有一定的阻断特性^[13-15]. 在实验中通过测量波在随机介质中的传输特性已成功地观测到了声波和电磁波的局域化现象^[2-10]. 波传播的局域性已有不少理论研究, 如求解波场二阶矩的 Bethe-Salpeter 方程以描述波的能量空间分布统

计特性^[16-19], 或者近似求解扩散方程得到扩散常数作为局域化判据^[12, 20, 21], 但是这些工作没有对波传播及其局域化的幅度和相位变化给出解析上的分析.

本文用随机泛函理论解析地讨论二维各向同性均匀无耗随机介质中柱面波的传播特性, 证明介电随机特征产生的波传播的局域化现象.

二维空间 R_2 上柱坐标系中 Helmholtz 波动方程写为

$$[\nabla^2 + k^2(1 + \varepsilon(\mathbf{r}, \omega))] \psi(\mathbf{r}, \omega) = 0, \quad (1)$$

其中 $\mathbf{r} = (r, \phi)$, 随机介质介电常数为 $\varepsilon_0[1 + \varepsilon(\mathbf{r}, \omega)]$, $\varepsilon(\mathbf{r}, \omega)$ 为各向同性介电常数的随机起伏, 且 $\langle \varepsilon(\mathbf{r}, \omega) \rangle = 0$, $\omega \in \Omega$ 表示随机介质的一个取样或实现, Ω 为概率样本空间, $\psi(\mathbf{r}, \omega)$ 既是介质场的随机泛函, 又是 $\mathbf{r} \in R_2$ 上的函数. 为表达简单, 表示随机取样的参数 ω 在本文中有时会被略去.

2. 随机介质在极坐标系下的谱展开式

2.1. 相关函数与 Gauss 型谱密度

各向同性无耗随机介质 $\varepsilon(\mathbf{r}, \omega)$ 的谱密度为

* 国家自然科学基金 (批准号: 60971091, 40637033) 和复旦大学研究生创新基金资助的课题.

† 通讯联系人. E-mail: yqjin@fudan.ac.cn

$G^2(\mathbf{K})$, 其相关函数利用 Hankel 变换写为

$$\begin{aligned} R(|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|) &= \langle \varepsilon(\mathbf{r}) \varepsilon^*(\mathbf{r}') \rangle \\ &= \int_{K_2} \exp[\mathrm{i} \mathbf{K} \cdot (\mathbf{r}-\mathbf{r}')] G^2(\mathbf{K}) \mathrm{d} \mathbf{K} \\ &= 2 \pi \int_0^\infty J_0(K|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|) G^2(K) K \mathrm{d} K, \end{aligned} \tag{2}$$

其介电起伏方差为

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= R(0) \\ &= 2 \pi \int_0^\infty G^2(K) K \mathrm{d} K. \end{aligned} \tag{3}$$

这里 J_0 为第一类零阶 Bessel 函数, $K=|\mathbf{K}|$. 特别地, 当 $G^2(K)=1$ 时, 介质 $\varepsilon(\mathbf{r}, \omega)$ 退化为白噪声场. 假定介质具有如下形式的各向同性 Gauss 型谱:

$$G^2(K, K_B) = A \exp[-l^2(K-K_B)^2], \tag{4}$$

其中 l 为介质相关长度, 谱密度中心位于 K_B . 由 (2), (3) 式易得到对应的相关函数和方差分别为

$$R(r) = \sigma^2 \exp(\mathrm{i} K_B r) \exp(-r^2/(4l^2)), \tag{5}$$
$$\sigma^2 = \frac{\pi A}{l^2} (1 + K_B l / \sqrt{\pi}). \tag{6}$$

容易看出, (4) 式的谱密度中心偏移量 K_B 在 (5) 式中反映了随机介电起伏的周期性. 当 $K_B \neq 0$ 时, 随机介质即为空间频率为 K_B 的随机 Bragg 光栅, $K_B=0$ 即退化为经典 Gauss 随机介质.

2.2. 介电随机起伏的谱展开式

各向同性的均匀随机场 $\varepsilon(\mathbf{r}, \omega)$ 在极坐标系下展开为 Wiener 积分式^[22], 即

$$\begin{aligned} \varepsilon(\mathbf{r}, \omega) &= \sum_{n=-\infty}^\infty \exp(\mathrm{i} n \phi) \\ &\times \int_0^\infty J_n(Kr) G(K, K_B) \mathrm{d} B_n(K, \omega), \end{aligned} \tag{7}$$

其中 $J_n(Kr)$ 为第一类 n 阶 Bessel 函数, $\mathrm{d} B_n(K, \omega)$ 为 Gauss 随机谱测度, 满足正交性

$$\begin{aligned} \langle \mathrm{d} B_n^*(K) \mathrm{d} B_m(K') \rangle &= \delta(n-m) \delta(K-K') \\ &\times 2 \pi K \mathrm{d} K \mathrm{d} K', \end{aligned} \tag{8}$$
$$\mathrm{d} B_n(K, \omega) = (-1)^n \mathrm{d} B_{-n}^*(K, \omega), \tag{9}$$

且 $\langle \mathrm{d} B_n(K, \omega) \rangle = 0$, 其中 $\langle \cdot \rangle$ 表示在概率空间 Ω 上的统计平均值. 利用 $\mathrm{d} B_n(K, \omega)$ 的正交性、Bessel 函数的奇偶性以及可加性, 由 (7) 式计算相关函数 $\langle \varepsilon(\mathbf{r}) \varepsilon^*(\mathbf{r}') \rangle$ 可以得到 (2) 式. 对于各向同性的均匀介质 $\varepsilon(r, \phi; \omega)$, 将 (7) 式积分区域进行条带分割, 可重新写为

$$\varepsilon(r, \phi; \omega) = \sum_{n=-\infty}^\infty \exp(\mathrm{i} n \phi) \sum_{m=0}^\infty \int_0^k J_n[(K+mk)r]$$

$$\begin{aligned} &\times G(K+mk, K_B) \mathrm{d} B_n(K+mk, \omega) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^\infty \exp(\mathrm{i} n \phi) \sum_{m=0}^\infty \int_0^k \{ H_n^{(1)}[(K+mk)r] \\ &+ H_n^{(2)}[(K+mk)r] \} G(K+mk, K_B) \\ &\times \mathrm{d} B_n(K+mk, \omega), \end{aligned} \tag{10}$$

其中 $H_n^{(1)}$ 和 $H_n^{(2)}$ 分别为第一类和第二类 Hankel 函数. 考虑到 Hankel 函数 $H_n^{(1,2)}$ 在 $kr \rightarrow \infty$ 的渐近式^[23], 由 (10) 式得到 $\varepsilon(r, \phi; \omega)$ 在极坐标系下的渐近表达式为

$$\begin{aligned} \varepsilon(r, \phi; \omega) &= \varepsilon_0^{(0)} + \sum_{m=1}^\infty \exp(\mathrm{i} mkr) \varepsilon_m^{(+)} \\ &+ \sum_{m=1}^\infty \exp(-\mathrm{i} mkr) \varepsilon_m^{(-)}. \end{aligned} \tag{11}$$

(11) 式中各项分别为

$$\begin{aligned} \varepsilon_0^{(0)} &= \sum_{n=-\infty}^\infty \exp(\mathrm{i} n \phi) \int_0^k \sqrt{\frac{2}{\pi K r}} \cos\left(Kr - \frac{2n+1}{4}\pi\right) \\ &\times G(K, K_B) \mathrm{d} B_n(K, \omega), \end{aligned} \tag{12}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_m^{(+)} &= \sum_{n=-\infty}^\infty \exp\left[\mathrm{i}\left(n\phi - \frac{2n+1}{4}\pi\right)\right] \\ &\times \int_0^k \sqrt{\frac{1}{2\pi(K+mk)r}} \exp(\mathrm{i} Kr) \\ &\times G(K+mk, K_B) \mathrm{d} B_n(K+mk, \omega), \end{aligned} \tag{13}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_m^{(-)} &= \sum_{n=-\infty}^\infty \exp\left[-\mathrm{i}\left(n\phi - \frac{2n+1}{4}\pi\right)\right] \\ &\times \int_0^k \sqrt{\frac{1}{2\pi(K+mk)r}} \exp(-\mathrm{i} Kr) \\ &\times G(K+mk, K_B) \mathrm{d} B_n^*(K+mk, \omega). \end{aligned} \tag{14}$$

易知 $\varepsilon_0^{(0)}$ 为实数. 本文中上标星号表示共轭. 注意到 $\langle \mathrm{d} B_n(K, \omega) \rangle = 0$, 因此有 $\langle \varepsilon_0^{(0)} \rangle = 0$.

3. 二维随机介质中波的远场表达式

3.1. 二维随机介质中波的一般表达式

满足波动方程 (1) 式的二维随机介质中的波可写为角量子数为 m 的随机柱面波的线性和, 即

$$\begin{aligned} \psi(r, \phi; \omega) &= \sum_{m=-\infty}^\infty \exp(\mathrm{i} m \phi) \psi_m(kr, \omega) \\ &= \sum_{m=-\infty}^\infty \exp(\mathrm{i} m \phi) [C_m(kr, \omega) H_m^{(1)}(kr) \\ &+ D_m(kr, \omega) H_m^{(2)}(kr)], \end{aligned} \tag{15}$$

其中 C_m 和 D_m 为待定权重系数. Hankel 函数 $H_m^{(1)}$ 和

$H_m^{(2)}$ 分别表示外行和内行柱面波. 由 Hankel 函数 $H_n^{(1,2)}$ 在 $kr \rightarrow \infty$ 的渐近式易得到随机波场的远场表达式为

$$\psi(r, \phi; \omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} [\exp(ikr) C(kr, \phi; \omega) + \exp(-ikr) D(kr, \phi; \omega)], \quad (16)$$

其中

$$C(kr, \phi; \omega) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \exp(im\phi) \exp \left[i \left(\frac{m^2}{2kr} - \frac{(2m+1)}{4} \pi \right) \right] C_m(kr; \omega), \quad (17)$$

$$D(kr, \phi; \omega) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \exp(im\phi) \exp \left[-i \left(\frac{m^2}{2kr} - \frac{(2m+1)}{4} \pi \right) \right] D_m(kr; \omega). \quad (18)$$

物理意义上, $C(kr, \phi; \omega)$ 和 $D(kr, \phi; \omega)$ 分别代表外行和内行柱面波. 当介质为无源场时, 空间任一点处内外行柱面波能流密度相同, 即 $|C|^2 = |D|^2$.

3.2. $C(kr, \phi; \omega)$ 和 $D(kr, \phi; \omega)$ 的耦合微分方程组

将(11)–(14), (16)–(18)式代入(1)式, 以寻求满足方程式的 C 和 D 的解. 忽略 r 的二阶微分项, 令 $t = kr$, 得到 C 和 D 的耦合线性微分方程组 (推导过程见附录 A)

$$\frac{dC}{dt} - \frac{i}{2} (\varepsilon_0^{(0)} C + \varepsilon_2^{(+)} D) = 0, \quad (19)$$

$$\frac{dD}{dt} + \frac{i}{2} (\varepsilon_0^{(0)} D + \varepsilon_2^{(-)} C) = 0. \quad (20)$$

在(19), (20)式中没有关于 ϕ 的微分项, 不妨令 $\phi = 0$, 最终可以从(17), (18)式中恢复 ϕ , 即 $C(t, \phi; \omega)$, $D(t, \phi; \omega)$ 分别记为 $C(t; \omega)$, $D(t; \omega)$. 注意到对(19), (20)式分别取共轭可得到 $|C|^2 = |D|^2$ 为常数. 满足(19), (20)式线性微分方程组的 C 和 D 的解具有如下形式:

$$C(t, \omega) = \exp \left[\int^t \Gamma(\tau, \omega) d\tau \right] u(t, \omega), \quad (21)$$

$$D(t, \omega) = \exp \left[\int^t \Gamma(\tau, \omega) d\tau \right] v(t, \omega), \quad (22)$$

其中 $\Gamma(\tau, \omega)$, $u(t, \omega)$ 和 $v(t, \omega)$ 为待求解的随机函数. 将(21), (22)式代入(19), (20)式即得到

$$\Gamma u + \frac{du}{dt} - \frac{i}{2} (\varepsilon_0^{(0)} u + \varepsilon_2^{(+)} v) = 0, \quad (23)$$

$$\Gamma v + \frac{dv}{dt} + \frac{i}{2} (\varepsilon_0^{(0)} v + \varepsilon_2^{(-)} u) = 0. \quad (24)$$

注意到对(23), (24)式两端取共轭可以得到 $|u| = |v|$. 由于 $u, v \neq 0$, 令 $\Gamma_1 = \Gamma + u'/u$, $v_1 = v/u$, (23), (24)式变为

$$\Gamma_1 - \frac{i}{2} (\varepsilon_0^{(0)} + \varepsilon_2^{(+)} v_1) = 0, \quad (25)$$

$$\frac{dv_1}{dt} + \left(\Gamma_1 + \frac{i}{2} \varepsilon_0^{(0)} \right) v_1 + \frac{i}{2} \varepsilon_2^{(-)} = 0. \quad (26)$$

此时(21), (22)式中的 C, D 则相应地变为

$$C(t, \omega) = \exp \left[\int^t \Gamma_1(\tau, \omega) d\tau \right], \quad (27)$$

$$D(t, \omega) = \exp \left[\int^t \Gamma_1(\tau, \omega) d\tau \right] v_1(t, \omega). \quad (28)$$

显然有 $|v_1| = 1$. 由于 $\langle \varepsilon_0^{(0)} \rangle = 0$, 对(25)式两端取统计平均, 且令 $\Gamma_0 = \langle \Gamma_1 \rangle$, 得到

$$\Gamma_0 = \frac{i}{2} \langle \varepsilon_2^{(+)} v_1 \rangle, \quad (29)$$

其中 Γ_0 为平均指数系数. 将 Γ_0 代入(26)式取代 Γ_1 以寻求 v_1 的一阶近似解. 注意到 $\langle \varepsilon \rangle^2$ 为 σ^2 量级^[24], 因此 $\Gamma_0 v_1$, dv_1/dt 和 $\varepsilon_2^{(-)}$ 都是 σ 量级, 而 $\varepsilon_0^{(0)} v_1$ 则为 σ^2 量级, 略去(26)式中的 $\varepsilon_0^{(0)} v_1$ 项即得到

$$\frac{dv_1}{dt} + \Gamma_0 v_1 + \frac{i}{2} \varepsilon_2^{(-)} = 0. \quad (30)$$

(29), (30)式即构成了关于 Γ_0 和 v_1 的耦合方程组.

3.3. 平均指数系数 Γ_0 的近似解

由(18), (28)式可以得到

$$v_1(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \exp \left[-i \left(\frac{m^2}{2t} - \frac{2m+1}{4} \pi \right) \right] v_m(t), \quad (31)$$

其中

$$v_m(t) = \exp \left[- \int^t \Gamma_1(\tau, \omega) d\tau \right] D_m(t). \quad (32)$$

又由(30)式可以看出, v_1 是 $\varepsilon_2^{(-)}$ 的一阶(线性)泛函, 对应(14)式的谱展开式, 将 v_1 展开为

$$v_1(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \exp \left(i \frac{2m+1}{4} \pi \right) \int_0^1 \exp(-i\Lambda t) \times F_m(\Lambda, t) dB_m^*(k\Lambda + 2k), \quad (33)$$

其中 $\Lambda = K/k$. 将(31)与(33)式对比后可知

$$v_m(t) = \int_0^1 \exp \left(-i\Lambda t + i \frac{m^2}{2t} \right) \times F_m(\Lambda, t) dB_m^*(k\Lambda + 2k). \quad (34)$$

将(34)式代入(31)式求导后可得(推导过程见附录 A)

$$\begin{aligned} \frac{dv_1(t)}{dt} &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \exp\left[-i\left(\frac{m^2}{2t} - \frac{2m+1}{4}\pi\right)\right] \\ &\times \int_0^1 \exp\left(-i\Lambda t + i\frac{m^2}{2t}\right) \left(-i\Lambda - i\frac{m^2}{2t^2}\right) \\ &\times F_m(\Lambda, t) dB_m^*(k\Lambda + 2k). \end{aligned} \quad (35)$$

将 (14), (33) 以及 (35) 式代入 (30) 式, 最终可得

$$\begin{aligned} F_m(\Lambda, t) &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2\pi(\Lambda + 2)t}} \\ &\times \frac{G(k\Lambda + 2k, K_B)}{\Lambda + m^2/(2t^2) + i\Gamma_0}. \end{aligned} \quad (36)$$

一旦得到 v_1 之后, 便可以由 (29) 式求解平均指数系数 Γ_0 . 将 (13), (33) 及 (36) 式代入 (29) 式可得

$$\begin{aligned} \Gamma_0 &\equiv \alpha + i\beta \\ &= \frac{i}{2} \langle \varepsilon_2^{(+)} v_1 \rangle \\ &= \frac{i k^2}{4t} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_0^1 \frac{G^2(k\Lambda + 2k, K_B)}{[\Lambda + m^2/(2t^2) + i\Gamma_0](\Lambda + 2)} \\ &\times \Lambda d\Lambda, \end{aligned} \quad (37)$$

其中 $\alpha = \text{Re}(\Gamma_0)$ 为平均幅度衰减系数, $\beta = \text{Im}(\Gamma_0)$ 为平均波数调制因子. 在远场近似下, t 足够大时可以用积分代替 m 项的求和, 即令 $d\chi = 1/t$, $\chi = m/t$. 不失一般性, 当 $K_B = nk (n \geq 0)$ 时, (37) 式即为

$$\begin{aligned} \Gamma_0 &= \alpha + i\beta \\ &= \frac{\sigma^2 (kl)^2}{4\pi(1 + nkl/\pi)} \\ &\times \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^1 \frac{\exp[-(kl)^2(\Lambda + 2 - n)^2]}{[\Gamma_0 - i(\Lambda + \chi^2/2)](\Lambda + 2)} \\ &\times \Lambda d\Lambda d\chi. \end{aligned} \quad (38)$$

(38) 式为求解平均指数系数 Γ_0 的方程.

与一维随机介质的结果相比^[25], (38) 式具有两重积分. 用数值迭代方法求解 (38) 式, 结果表明 Γ_0 正比于介电起伏方差 σ^2 , 与二维随机介质平面波的结果是一致的^[24].

3.4. 随机波场的远场表达式

将 (27), (28) 及 (31) 式代入 (16) 式, 得到随机波场的远场表达式 (推导过程见附录 B)

$$\begin{aligned} \psi(r, \phi; \omega) &\equiv \exp(im\phi) \psi(r, \omega) \\ &= \exp\left[\int_0^{t=krcos\phi} \Gamma_1(\tau; \omega) d\tau\right] \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} \sum_m c_m \\ &\times \cos\left[kr - \frac{2m+1}{4}\pi\right] \exp(im\phi), \end{aligned} \quad (39)$$

其中 c_m 即为 Helmholtz 方程 (1) 的元波解的线性叠加系数.

与二维确定性非随机介质 Helmholtz 方程的远场解对比可以发现, 随机波场表达式中多出了一个指数因子项 $\exp\left[\int_0^{t=krcos\phi} \Gamma_1(\tau; \omega) d\tau\right]$, 这正是反映了随机介质对波的幅度和相位的调制作用, 对幅度的调制使幅度呈指数衰减, 而对相位的调制则体现为波数的随机起伏.

3.5. 二维随机介质中平面波按柱面波展开的波转换方程

由 (39) 式可知, 满足二维 Helmholtz 方程 (1) 的远场元波解记为

$$\begin{aligned} \psi_m(r, \phi; \omega) &= \exp\left[\int_0^{t=krcos\phi} \Gamma_1(\tau; \omega) d\tau\right] \\ &\times \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} \cos\left[kr - \frac{2m+1}{4}\pi\right] \\ &\times \exp(im\phi). \end{aligned} \quad (40)$$

在各向同性的随机介质中, 将柱面波 ψ_m 视为具有角量子数 m 的随机角模式; 在非随机的自由空间中, 随机角模式即退化成 m 阶 Bessel 函数表示的柱面波.

对于二维随机介质中的平面波, 根据介质的均匀特性将其用一维平移算子表示, 并将介质在波矢量方向上条带谱分割, 代入波动方程并运用随机泛函理论求解, 最终得到波的远场表达式为^[24]

$$\begin{aligned} \psi(r, \phi; \omega) &= \exp\left[\int_0^{t=krcos\phi} \Gamma_1(\tau, \omega) d\tau\right] \\ &\times \exp(ikrcos\phi). \end{aligned} \quad (41)$$

计算结果表明, 对于方差、相关长度和 K_B 取值都相同的随机介质, (40), (41) 式中的平均指数系数 $\Gamma_0 = \langle \Gamma_1 \rangle$ 是相同的^[22], 即二维随机介质对于其中的平面波和柱面波具有同样的幅度和波数调制作用. 不同之处在于由于柱面波的波阵面为圆形, 因此其能流密度除了和平面波一样被指数调制外, 还与 $1/r$ 成正比, 会随传播距离更快地衰减.

考虑到 Bessel 函数积分表达式的渐近形式, (41) 式的平面波可以表示成 (40) 式的随机柱面波的线性叠加, 并且利用 $\exp(im\phi)$ 因子在 $[0, 2\pi]$ 区间内积分的正交性确定叠加的权重系数为 $\exp(im\pi/2)$, 最终得到二维随机介质中平面波按柱面波展开的波转换方程为

$$\exp\left[\int_0^{t=krcos\phi} \Gamma_1(\tau, \omega) d\tau\right] \exp(ikrcos\phi)$$

$$\begin{aligned} &= \exp\left[\int_0^{t=krcos\phi} \Gamma_1(\tau;\omega) d\tau\right] \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} \\ &\times \sum_m \cos\left[kr - \frac{2m+1}{4}\pi\right] \exp(im\phi) \\ &\times \exp(im\pi/2). \end{aligned} \tag{42}$$

令 $\Gamma_1 = 0$, (42) 式即退化为确定介质中平面波按柱面波展开的波转换方程的远场形式

$$\begin{aligned} \exp(ikrcos\phi) &= \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} \sum_m \cos\left[kr - \frac{2m+1}{4}\pi\right] \\ &\times \exp(im\phi) \exp(im\pi/2). \end{aligned} \tag{43}$$

4. 数值模拟

由 (38) 式用数值迭代方法计算积分求解 Γ_0 , 取 $\sigma^2 = 0.1$. 图 1 给出平均幅度指数衰减系数 α 和平均波数调制因子 β 在不同归一化相关长度 kl 下随 Gauss 谱密度中心 $K_B = nk$ 的变化.

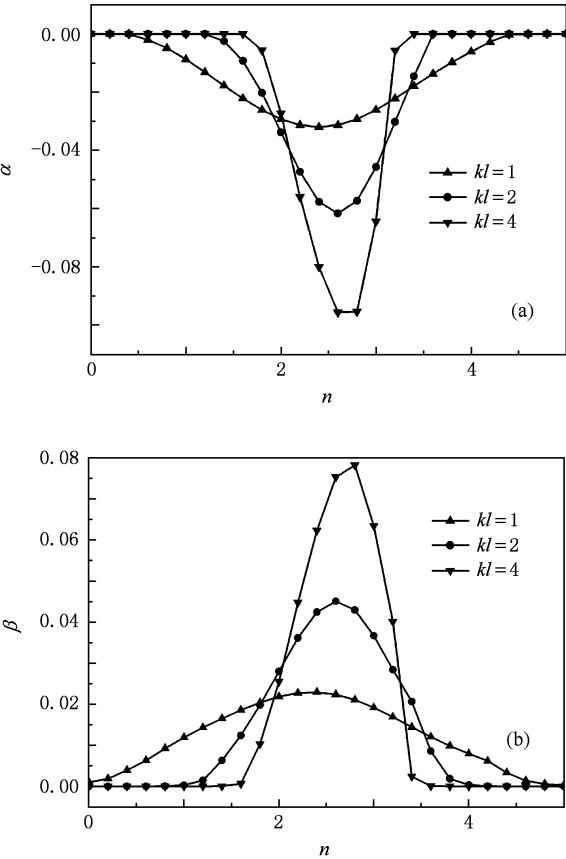


图 1 Γ_0 随 n 的变化 (a) α 随 n 的变化, (b) β 随 n 的变化

由图 1(a) 可以看出, α 随 n 的变化存在一个极小值点, 其对应的 n 一般位于 $[2, 3]$ 区间, 且 kl 越

大, 对应的极值点越小, 即波的局域化现象最为明显. 图 1(b) 的 β 具有类似的变化规律, 在极值点处波数的振荡现象最为显著.

图 2 给出不同 kl 与 $K_B = nk$ 下的 α 和 β . 从图 2 可以看出, α 和 β 的非零取值基本处在 $n \in [2, 3]$ 区间内, 且随 kl 增大而增大. 这说明波的局域化现象和波数振荡主要发生在谱密度中心 K_B 位于 $[2k, 3k]$ 区间内, 且在介质方差一定时, 归一化相关长度 kl 越大, 这些现象越明显. 特别是当 $kl = 0$ 时, 随机介质为白噪声场, 此时局域化现象最微弱.

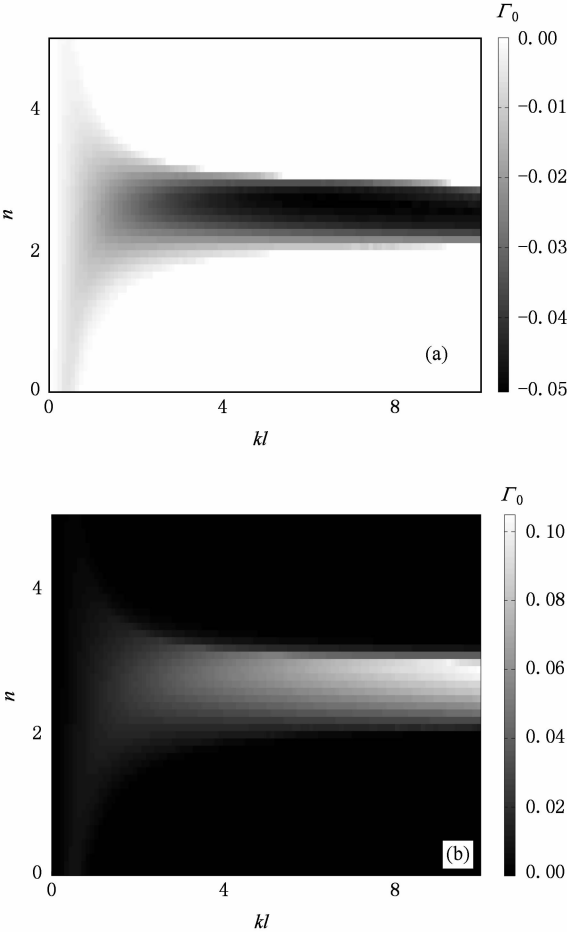


图 2 Γ_0 随 n 及 kl 的变化 (a) α 随 n 及 kl 的变化, (b) β 随 n 及 kl 的变化

进一步, 注意到在 (38) 式中令 $n = 0$, 仍然有 $\alpha \neq 0$, 表明在完全随机的非周期介质中尽管局域化现象较之 $n \in [2, 3]$ 的情形更微弱, 但仍然存在. 另一方面, 当 n 取值较大时, 由图 2 可以看出局域化现象反而变得不明显. 因此, 局域化现象是由介质的随机性产生的, 而介质的周期性则会对其产生影响.

图 3 给出 α 和 β 与 σ^2 的正比关系.

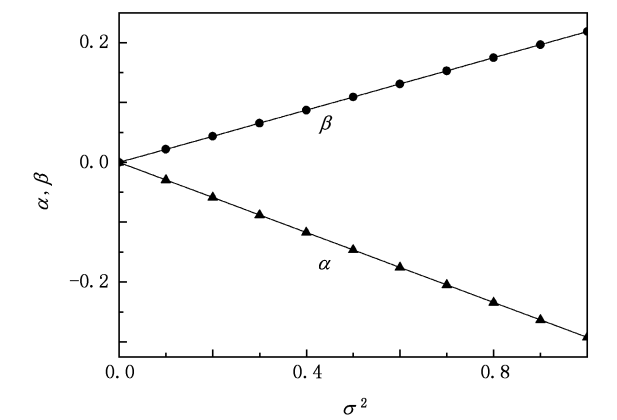


图3 Γ_0 随介质方差 σ^2 的变化 $n = 2, kl = 1$

在空间 $200\lambda \times 200\lambda$ 范围内用 Monte Carlo 方法产生 200 个 Gauss 随机介质 $\varepsilon(\mathbf{r}, \omega)$ 的物理实现, 空间分辨率为波长 λ , 即像素点个数为 4×10^4 , 且令 $\langle \varepsilon(\mathbf{r}, \omega) \rangle = 0$, 方差 $\sigma^2 = 0.1$, 归一化相关长度 $kl = 1$. 将每次 $\varepsilon(\mathbf{r}, \omega)$ 物理实现的数值代入 Helmholtz 方程 (1) 并求解. 为了叙述方便且不失一般性, 以沿 x 轴正方向传播的平面波为例进行数值验证. 在 (41) 式随机平面波的表达式中, 令 $\phi = 0$, 得到

$$\begin{aligned} \psi(r, \phi; \omega) \big|_{\phi=0} &\equiv \psi(r, \omega) \\ &= \exp \left[\int_0^{t=kx} \Gamma_1(\tau, \omega) d\tau \right] \exp(ikx) \\ &= \exp \left(\int_0^{t=kx} \text{Re}(\Gamma_1) d\tau \right) \\ &\quad \times \exp \left[i \left(kx + \int_0^{t=kx} \text{Im}(\Gamma_1) d\tau \right) \right]. \end{aligned} \quad (44)$$

为书写简单, 令 $\psi(r, \omega) = |\psi| \exp(i\Theta)$, 则有

$$|\psi| = \exp \left(\int_0^{t=kx} \text{Re}(\Gamma_1) d\tau \right), \quad (45)$$

$$\Theta = kx + \int_0^{t=kx} \text{Im}(\Gamma_1) d\tau. \quad (46)$$

由于 $\langle \Gamma_1 \rangle = \alpha + i\beta$, 于是 Monte Carlo 方法得到的平均对数幅度和平均相位浮动分别为

$$\langle \ln |\psi| \rangle = \alpha kx, \quad (47)$$

$$\langle \Theta - kx \rangle = \beta kx. \quad (48)$$

$\langle \ln |\psi| \rangle$ 和 $\langle \Theta - kx \rangle$ 随传播距离 x 的变化示于图 4, 其中直线为 (38) 式的 $\Gamma_0 = \alpha + i\beta$ 的理论结果, 数据点为 Monte Carlo 方法所得数值结果. 由图 4 可以看出, 数值结果和理论值符合较好.

(40) 式给出随机介质中角量子数为 m 的柱面

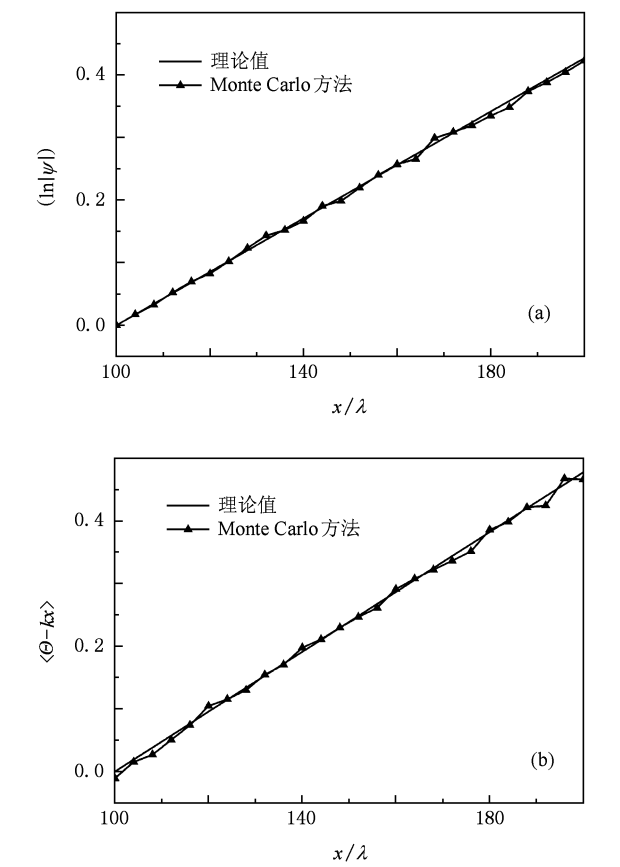


图4 Monte Carlo 方法验证 Γ_0 $kl = 1, \sigma^2 = 0.1$. (a) $\langle \ln |\psi| \rangle$ 随传播距离 x 的变化, (b) $\langle \Theta - kx \rangle$ 随传播距离 x 的变化

波 ψ_m , 对于确定介质有 $\psi_{Dm} = J_m(kr) \exp(im\phi)$, 其中下标 D 表示确定介质. 图 5(a) — (d) 为确定介质中不同角量子数柱面波 ψ_{Dm} 的波阵面, 为了简单, 此处仅示出 $m = 0, 1, 2, 3$ 的情形, 其余情形以此类推. 图 6(a) — (d) 则为对应的随机柱面波 ψ_m . 为了清楚地观察随机介质对波数的调制作用, 图 5(e) 和图 6(e) 分别示出了角量子数 $m = 0$ 的确定柱面波及随机柱面波的远场, 图中选取 $10\lambda \times 10\lambda$ 的正方形区域. 确定介质中的波数为 k , 随机介质中的波数则被线性调制为 $[1 + \text{Im}(\Gamma_1)]k$. 由 (38) 式的数值积分结果可知, Γ_0 的数值正比于 σ^2 , 因此当介质方差不太大时, 有 $\text{Im}(\Gamma_0) \ll 1$, 此时波数的调制作用对波的相位影响不大, 仅仅反映为波阵面的微小扰动, 如图 6(e) 所示.

(43) 式为确定介质中平面波与柱面波之间的波转换方程, 这说明将不同角量子数的柱面波按照权重系数 $\exp(im\pi/2)$ 叠加起来, 即可得到确定介质中的平面波, 如图 7(a) 所示. 为了简单, 此处仍以沿 x 正方向传播的平面波为例. 图 7(b) 则为对应的

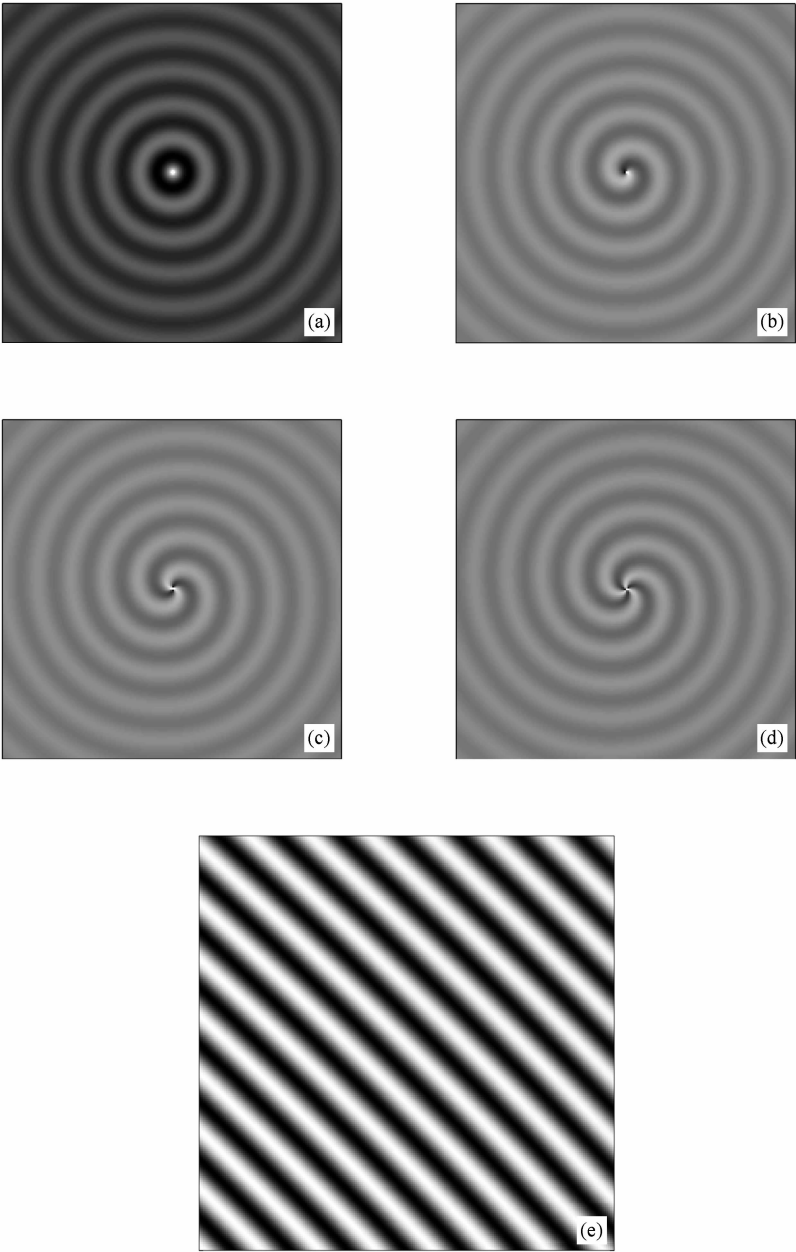


图 5 确定介质中不同角量子数的柱面波及 $m = 0$ 情形的远场 (a) $m = 0$, (b) $m = 1$, (c) $m = 2$, (d) $m = 3$, (e) $m = 0$ 情形的远场

随机介质中的柱面波叠加而成的平面波,同样地,可以由随机介质中平面波和柱面波的波转换方程(42)式解释.由图7(b)可以看出,随机介质中平面波的幅度随传播距离是衰减的,具有局域化现象,这与之之前所得结果相符^[24].

5. 局域化

图 8 给出 $\phi = 0$ 时波的能流密度随传播距离的变化.从图 8 可以看出,随机介质柱面波的能流密度

随传播距离的衰减要远远快于确定(非随机)介质的情形.二维确定介质中柱面波的一般表达式为^[26] $\psi_m(r,\phi) = J_m(kr)\exp(im\phi)$,根据 Bessel 函数的渐近形式可知,远场近似下其幅度随传播距离以 $1/\sqrt{r}$ 衰减,即能流密度与 r 成反比,又考虑到圆柱的侧面积与 r 成正比,所以单位时间内流过每个圆柱面的总能量恒定.由(40)式可知,随机介质柱面波的幅度除了与 $1/\sqrt{r}$ 成正比以外,还被指数因子调制,因此波的能流密度也被指数调制,进而使得能量的空间分布出现局域化现象,如图 9 所示.

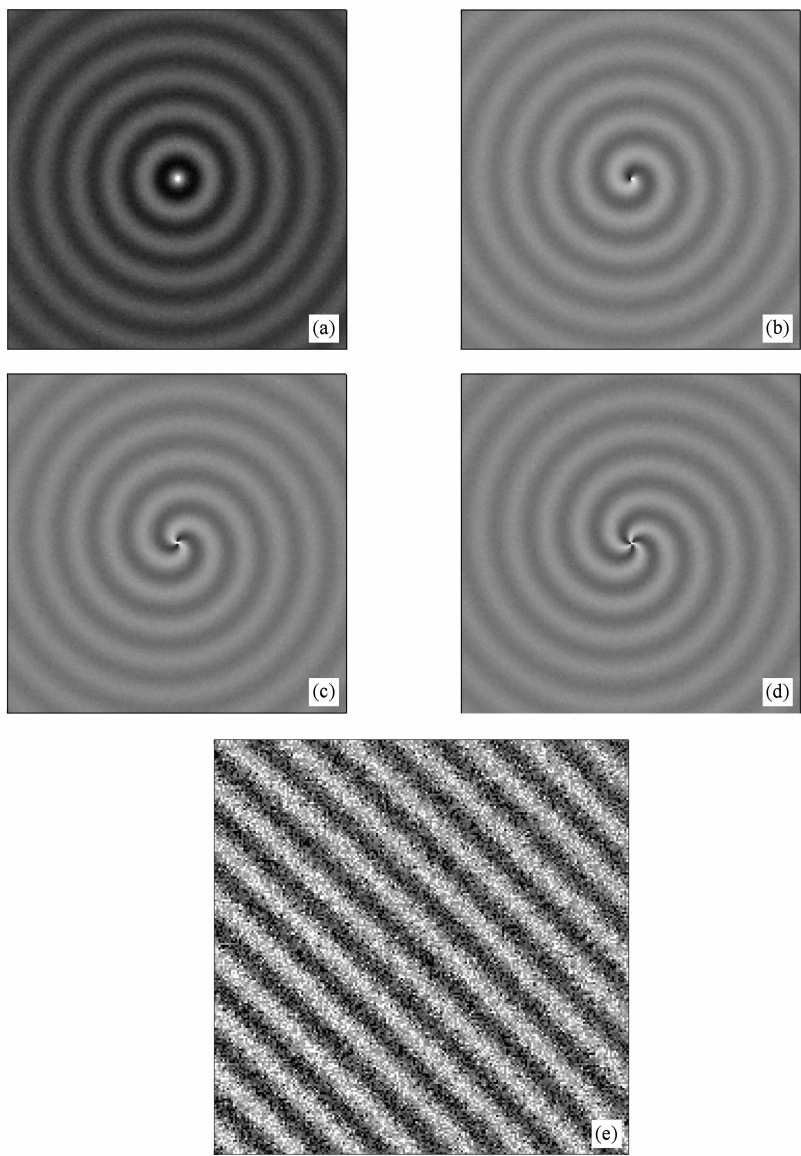


图 6 随机介质中不同角量子数的柱面波及 $m = 0$ 情形的远场 (a) $m = 0$, (b) $m = 1$, (c) $m = 2$, (d) $m = 3$, (e) $m = 0$ 情形的远场

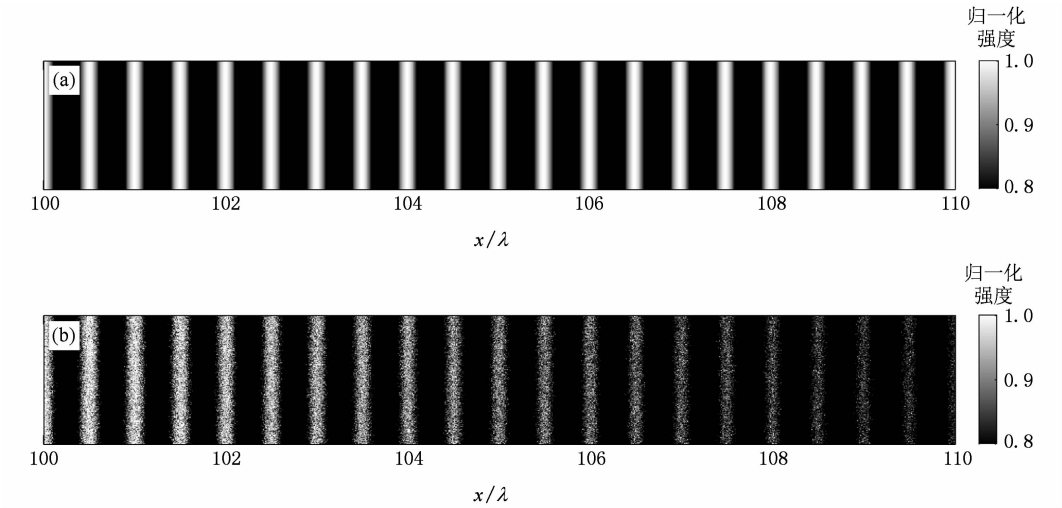


图 7 柱面波叠加而成的平面波远场强度 (a) 确定介质, (b) 随机介质

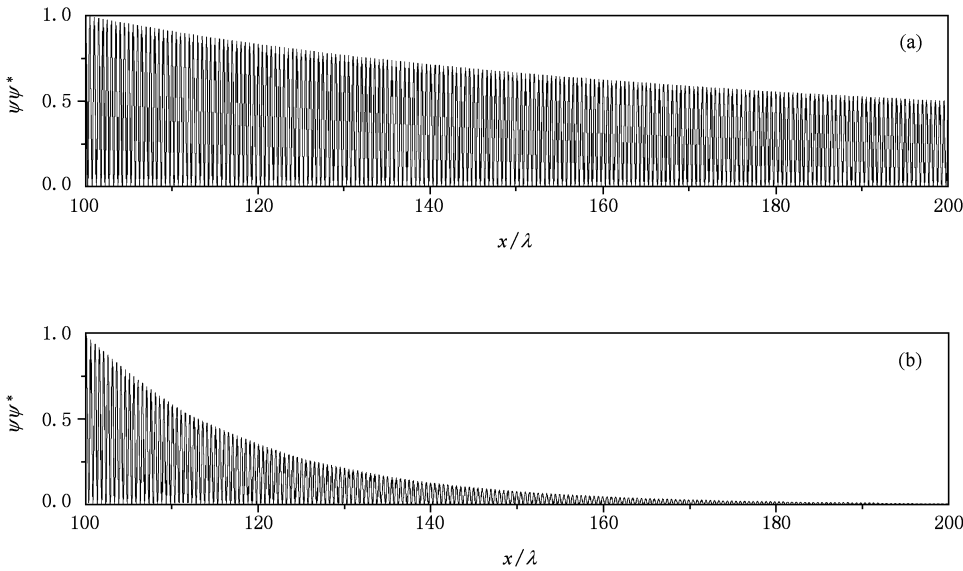


图 8 $\phi = 0$ 截面柱面波的能量密度随传播距离的变化 (a) 确定介质, (b) 随机介质

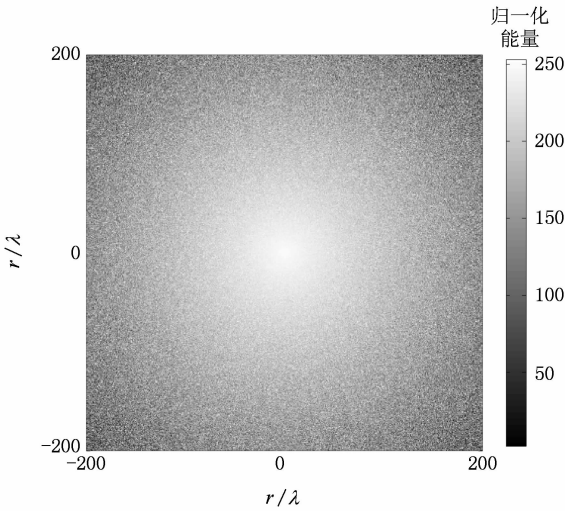


图 9 二维随机介质中柱面波的空间能量分布及局域化现象

如图 8 所示,波在本文数值模拟所采用的随机介质中传播时,经过大约 180λ 的传播距离之后,能流密度基本衰减为零,此时柱面波实质上以包络指数衰减的驻波形式存在.由上述 Γ_0 的数值结果讨论可知,这个衰减长度和介电起伏方差 σ^2 以及归一化相关长度 kl 成反比. σ^2 越大, kl 越大,能流密度衰减越快.用局域化长度 L 来描述波的能量衰减速度, L 定义为能量衰减系数的倒数^[12],由 (39) 式易得

$$L = -\frac{1}{2\text{Re}(\Gamma_1)}.$$

6. 结 论

本文用随机泛函理论,在频域内将随机介电起伏展开成柱坐标系下的 Wiener 积分式,将波场用 Hankel 函数表示为内外行柱面波的线性和,假设介质具有各向同性的均匀 Gauss 谱,求解二维 Helmholtz 波动方程,得到了二维随机介质中柱面波的解析表达式,验证了波的局域化现象并求解局域化长度.由于二维随机介质对其中的平面波和柱面波具有相同的调制作用,本文给出随机平面波按随机柱面波展开的波转换方程,给出数值模拟结果验证了本文结论.

本文在研究波的局域性时,并没有求解波的能量密度空间分布统计特性 $\langle \psi\psi^* \rangle$,而是根据 $\psi\psi^*$ 的指数衰减特性判断了波的局域化现象的产生. $\langle \psi\psi^* \rangle$ 是从集平均的角度上描述波的能量密度,并不能反映任意随机介质中波的能量密度特性,而本文的 $\psi\psi^*$ 表明在任意的二维随机介质中都存在波的局域化现象.

附录 A $dv_1(t)/dt$ 的推导

波函数 $U(r, \phi)$ 在远场情形下 ($kr \rightarrow \infty$) 有

$$\begin{aligned} & \left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + k^2 \right] \frac{\exp(ikr)}{\sqrt{kr}} U(r, \phi) \\ &= \frac{\exp(ikr)}{\sqrt{kr}} \left[\frac{1}{4r^2} + 2ik \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} \right] U(r, \phi) \end{aligned}$$

$$\approx \frac{\exp(ikr)}{kr} \left[2ik \frac{\partial}{\partial r} \right] U(r, \phi). \quad (A1)$$

对于(17), (18)式,有

$$\left[2ik \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right] C(kr, \phi; \omega) = 2ik^2 \frac{dC(kr, \phi; \omega)}{dt}, \quad (A2)$$

$$\left[-2ik \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right] D(kr, \phi; \omega) = -2ik^2 \frac{dD(kr, \phi; \omega)}{dt}, \quad (A3)$$

其中 $t = kr$. (A2), (A3) 式中 C, D 的微分分别表示为

$$\frac{dC(kr, \phi; \omega)}{dt} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \exp(im\phi) \exp \left[i \left(\frac{m^2}{2kr} - \frac{2m+1}{4}\pi \right) \right] \times \frac{dC_m(kr; \omega)}{dt}, \quad (A4)$$

$$\frac{dD(kr, \phi; \omega)}{dt} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \exp(im\phi) \exp \left[-i \left(\frac{m^2}{2kr} - \frac{2m+1}{4}\pi \right) \right] \times \frac{dD_m(kr; \omega)}{dt}. \quad (A5)$$

将(11)–(14)式, (16)–(18)式代入 Helmholtz 方程(1)可以得到

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + k^2 \right) \\ & \times \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} [\exp(ikr) C(kr, \phi) + \exp(-ikr) D(kr, \phi)] \\ & + k^2 \left[\varepsilon_0^{(0)} + \sum_{m=1}^{\infty} \exp(imkr) \varepsilon_m^{(+)} + \sum_{m=1}^{\infty} \exp(-imkr) \varepsilon_m^{(-)} \right] \\ & \times \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} [\exp(ikr) C(kr, \phi) + \exp(-ikr) D(kr, \phi)] = 0. \end{aligned} \quad (A6)$$

由鞍点法略去 $\exp(imkr)$ 的高阶项, 根据相位匹配即可得到关于 C, D 的耦合方程组(19), (20).

将(28), (32)式代入(A5)式得到

$$\Gamma_1 v_1 + \frac{dv_1}{dt} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \exp \left[-i \left(\frac{m^2}{2kr} - \frac{2m+1}{4}\pi \right) \right] \times \left(\Gamma_1 v_m + \frac{dv_m}{dt} \right). \quad (A7)$$

结合(31)式, 易得到

$$\frac{dv_1(t)}{dt} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \exp \left[-i \left(\frac{m^2}{2t} - \frac{2m+1}{4}\pi \right) \right] \times \frac{dv_m(t)}{dt}. \quad (A8)$$

对(34)式中的 $v_m(t)$ 求导, 由(14)式可知, $F_m(\Lambda, t)$ 中含有 $1/\sqrt{[2\pi(\Lambda+m)t]}$ 因子, 因此令 $dF_m(\Lambda, t)/dt \approx 0$, 得到

$$\begin{aligned} \frac{dv_1(t)}{dt} &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \exp \left[-i \left(\frac{m^2}{2t} - \frac{2m+1}{4}\pi \right) \right] \\ &\times \int_0^1 \exp \left(-i\Lambda t + i \frac{m^2}{2t} \right) \left(-i\Lambda - i \frac{m^2}{2t^2} \right) \\ &\times F_m(\Lambda, t) dB_m^*(k\Lambda + 2k). \end{aligned} \quad (A9)$$

附录 B 随机波场远场表达式的推导

将(27), (28)及(31)式代入(16)式, 得到

$$\begin{aligned} \psi(r, \omega) &= \exp \left[\int_{t=kr\cos\phi}^t \Gamma_1(\tau, \omega) d\tau \right] \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} \\ &\times [\exp(ikr) + \exp(-ikr)] \\ &\times v_1(kr, \omega). \end{aligned} \quad (B1)$$

考虑到 $|v_1(kr, \omega)| = 1$, 不妨令

$$v_1(kr, \omega) = \exp[i2\theta(kr, \omega)]. \quad (B2)$$

同时为了书写简单, 令 $v_m(kr, \omega) = |v_m(kr, \omega)| \exp[i\theta_m(kr, \omega)]$. 由(31)式可知

$$\begin{aligned} & v_1(kr, \omega) \exp[-i\theta(kr, \omega)] \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \exp \left[-i \left(\frac{m^2}{2kr} - \frac{2m+1}{4}\pi + \theta(kr, \omega) \right) \right] v_m(kr, \omega) \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} |v_m(kr, \omega)| \exp \left[-i \left(\frac{m^2}{2kr} - \frac{2m+1}{4}\pi \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \theta(kr, \omega) - \theta_m(kr, \omega) \right) \right]. \end{aligned} \quad (B3)$$

由于 $v_1(kr, \omega) \exp[-i\theta(kr, \omega)] = \exp[i\theta(kr, \omega)]$ 与 $\exp[-i\theta(kr, \omega)]$ 互为共轭, 于是有

$$\begin{aligned} & \exp[-i\theta(kr, \omega)] \\ &= [v_1(kr, \omega) \exp[-i\theta(kr, \omega)]]^* \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} |v_m(kr, \omega)| \exp \left[i \left(\frac{m^2}{2kr} - \frac{(2m+1)}{4}\pi \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \theta(kr, \omega) - \theta_m(kr, \omega) \right) \right]. \end{aligned} \quad (B4)$$

由(B3), (B4)式可得到(B1)式后面括号中的

$$\begin{aligned} & \exp(ikr) + \exp(-ikr) v_1(kr, \omega) \\ &= [\exp(ikr) \exp[-i\theta(kr, \omega)] + \exp(-ikr) v_1(kr, \omega) \\ &\quad \times \exp[-i\theta(kr, \omega)]] \exp[i\theta(kr, \omega)] \\ &= \exp[i\theta(kr, \omega)] \sum_{m=-\infty}^{\infty} |v_m(kr, \omega)| \\ &\quad \times \cos \left[kr + \frac{m^2}{2kr} - \frac{2m+1}{4}\pi + \theta(kr, \omega) \right. \\ &\quad \left. - \theta_m(kr, \omega) \right]. \end{aligned} \quad (B5)$$

注意到 $\langle dB_n(K, \omega) \rangle = 0$, 由(B2), (35)式容易得到在远场近似下的表达式, 即

$$\left\langle \frac{dv_1(kr, \omega)}{d(kr)} \right\rangle = \left\langle i2\exp[i2\theta(kr, \omega)] \frac{d\theta(kr, \omega)}{d(kr)} \right\rangle = 0. \quad (B6)$$

因此, 可以近似认为 $\theta(kr, \omega)$ 不是 kr 的函数, 将 $\theta(kr, \omega)$ 简记为 $\theta(\omega)$.

同理, 将 $\theta_m(kr, \omega)$ 简记为 $\theta_m(\omega)$. 当 $kr \rightarrow \infty$ 时, 显然有 $\theta(\omega) \ll kr, \theta_m(\omega) \ll kr$. 于是将(B5)式代入到(B1)式,

并恢复 ϕ 变量即得到远场近似下随机波场的表达式

$$\psi(r,\omega) = \exp\left[\int_0^{t=krcos\phi} \Gamma_1(\tau,\omega) d\tau\right] \\ \times \sqrt{\frac{2}{\pi kr}}[\exp(i kr) + \exp(-i kr)v_1(kr,\omega)]$$

$$= \exp\left[\int_0^{t=krcos\phi} \Gamma_1(\tau,\omega) d\tau\right] \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m \\ \times \cos\left[kr - \frac{2m+1}{4}\pi\right] \exp(im\phi), \tag{B7}$$

其中 c_m 即为 Helmholtz 方程(1)的元波解的线性叠加系数.

[1] Anderson P W 1958 *Phys. Rev.* **109** 1492

[2] Genack A Z, Garcia N 1991 *Phys. Rev. Lett.* **66** 2064

[3] Berry M V, Klein S 1997 *Eur. J. Phys.* **18** 222

[4] Wiersma D S, Bartolini P, Lagendijk A, Roghini R 1997 *Nature* **390** 671

[5] Chabanov A A, Stoytchev M, Genack A Z 2000 *Nature* **404** 850

[6] Storze M, Gross P, Aegerter C M, Maret G 2006 *Phys. Rev. Lett.* **96** 063904

[7] Hu H, Strybulevych A, Page J H, Skipetrov S E, Tiggelen B A 2008 *Nat. Phys.* **4** 945

[8] Chabé J, Lemarié G, Grémaud B, Delande D, Szriftgiser P, Garreau J C 2008 *Phys. Rev. Lett.* **101** 255702

[9] Cao Y J, Yang X 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 3620 (in Chinese) [曹永军、杨 旭 2008 物理学报 **57** 3620]

[10] Wang H Q, Liu Z D, Wang B 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 5550 (in Chinese) [王慧琴、刘正东、王 冰 2008 物理学报 **57** 5550]

[11] Abrahams E, Anderson P W, Licciardello D C, Ramakrishnan T V 1979 *Phys. Rev. Lett.* **42** 673

[12] Sheng P, White B, Zhang Z Q, Papanicolaou G 1986 *Phys. Rev. B* **34** 4757

[13] Soukoulis C M, Jiang X, Xu J Y, Cao H 2002 *Phys. Rev. B* **65** 041103

[14] Zhuang F, Shen J Q, Ye J 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 541 (in Chinese) [庄 飞、沈建其、叶 军 2007 物理学报 **56** 541]

[15] Gao X, Yang Z Q, Hou J, Qi L M, Lan F, Shi Z J, Li D Z, Liang Z 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 1105 (in Chinese) [高 喜、杨梓强、侯 钧、亓丽梅、兰 峰、史宗君、李大治、梁 正 2009 物理学报 **58** 1105]

[16] Ye Z, Li S, Sun X 2002 *Phys. Rev. E* **66** 045602

[17] Sigalas M M, Soukoulis C M, Chan C T, Turner D 1996 *Phys. Rev. B* **53** 8340

[18] Asatryan A A, Robinson P A, McPhedran R C, Botten L C, Sterke M, Langtry T L, Nicorovici N A 2003 *Phys. Rev. E* **67** 036605

[19] Rusek M, Orłowski A, Mostowski J 1997 *Phys. Rev. E* **56** 4892

[20] Ziegler K 2003 *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer* **79** 1189

[21] Albada M P, Tiggelen B A, Lagendijk A, Tip A 1991 *Phys. Rev. Lett.* **66** 3132

[22] Ogura H 1966 *J. Phys. Soc. Jpn.* **21** 1370

[23] Spiegel M R 1998 *Mathematical Handbook of Formulas and Tables* (New York: McGraw-Hill)

[24] Ding R, Wang Z L, Ogura H 2008 *Radio Sci.* **43** 2005

[25] Ogura H 1975 *Phys. Rev. A* **11** 942

[26] Jin Y Q 1994 *Electromagnetic Scattering Modeling for Quantitative Remote Sensing* (Singapore: World Scientific) p6

Stochastic functional analysis of propagation and localization of cylindrical wave in a two-dimensional random medium^{*}

Ding Rui¹⁾ Jin Ya-Qiu^{1)†} Ogura Hisanao²⁾

1) (Key Laboratory of Wave Scattering and Remote Sensing Information of Ministry of Education, Fudan University, Shanghai 200433, China)

2) (Department of Electronics, Kyoto University, Kyoto 606-01, Japan)

(Received 8 July 2009; revised manuscript received 30 December 2009)

Abstract

Propagation and localization of cylindrical wave in a two-dimensional isotropic and homogeneous random medium is studied. By expanding the random permittivity fluctuation in the form of a Wiener integral equation in the frequency domain, and representing the wave fields by a linear combination of outgoing and incoming waves, the scalar Helmholtz equation is solved by means of stochastic functional approach to obtain the analytical expression of cylindrical wave. The spatial wave energy distribution is derived to demonstrate the localization phenomenon, and the localization length is also calculated. Compared with the waves in non-random medium, the wave transfer equation between plane wave and cylindrical wave in random medium shows an additional exponential factor to indicate the modulation effects due to the medium randomness in both the amplitude and the phase. Numerical simulations are presented to illustrate the functional dependence of the localization phenomenon.

Keywords: two-dimensional random medium, cylindrical wave propagation, localization

PACC: 0350, 0365D, 0365G, 4110H

^{*} Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 60971091, 40637033) and the Innovation Foundation for Graduate Students of Fudan University, China.

[†] Corresponding author. E-mail: yqjin@fudan.ac.cn