

含有单相铁芯变压器的铁磁混沌电路的分析及控制

刘崇新[†] 翟笃庆 董子哈 刘 尧

(西安交通大学电气工程学院, 电力设备电气绝缘国家重点实验室, 西安 710049)

(2009 年 6 月 23 日收到; 2009 年 10 月 21 日收到修改稿)

对一个含有单相铁芯变压器的三阶非自治铁磁混沌电路进行了理论研究和计算机仿真分析. 研究表明, 仅由磁通链控制的非线性电感器件的三阶非自治电路可以作为一个四阶自治改进系统来分析. 数值仿真和电路实验证实了此系统确实存在混沌动力学行为. 同时, 还提出了一种通过改变线性电容参数控制混沌的方法.

关键词: 铁磁混沌电路, 非自治系统, 混沌控制

PACC: 0545

1. 引 言

非线性动态电路中的混沌现象及其控制是电力系统、电子技术系统、通信系统等工程领域中的研究热点之一. 多年来, 许多学者对 LC 铁磁混沌电路已进行了卓有成效的研究. 文献[1, 2]先后对 LC 铁磁混沌电路的分岔和混沌动力学行为进行了开拓性的理论研究和实验探索, 在 LC 铁磁混沌电路的分岔和混沌动力学研究方面取得了显著成就.

混沌现象是非线性动力系统中既普遍存在又极其复杂的现象, 它的定常状态是一种始终限于有限区域且轨道永不重复性态复杂的运动. 混沌运动具有通常确定性运动所没有的几何和统计特征, 如局部不稳定而整体稳定、无限自相似结构、连续功率谱、奇怪吸引子分数维、正的 Lyapunov 指数、正测度熵等. 混沌也称为确定论随机性, 随机性则是指人们无法把它的内部运动过程与真正随机过程相区别. 在确定性电路系统中, 混沌运动是在一定的参数条件下产生的随机响应, 混沌运动对于初始值极为敏感, 从任意靠近的两个初始值出发的轨道在一定的时间间隔内将会以指数方式分离, 初始值极其微小的变化将会使振荡的输出波形产生本质的差异. 混沌振荡对应的 Poincaré 映射在 Poincaré 截面上表现为永不重复没有任何规律性的点集合, 混沌状态下的相轨道则是在相平面上既不趋于平衡点又不发散, 而是在一定的有界区域内进行无限的

填充和游荡. 探讨铁磁混沌电路的分岔和混沌动力学行为, 对于电子电气、自动控制、航天航空领域有着极为重要的理论意义和实际意义.

2. 电路及基本分析

在本文中, 我们提出一个如图 1 所示的含有单相铁芯变压器的三阶非自治铁磁混沌电路, 图中 $N_1/N_2 = n$, N_1 为铁芯变压器原边线圈的匝数, N_2 为铁芯变压器副边线圈的匝数, 电路由一个周期性的正弦交流电压源 $u(t)$ 激励, $u(t) = U_m \sin \omega t$, 其中角频率 $\omega = 2\pi f$, $f = 50$ Hz.

在图 1 中, 对于含有铁芯的变压器在一定幅值电压的激励下, 当线圈磁通链饱和时, 我们把含铁芯的电感线圈视为非线性电感元件, 线圈 N_1 中的电流为 $i_3 = a\psi^3 + b\psi$, 其中 ψ 为线圈磁通链, 可见非线性电感是磁通链控制型的非线性器件, 而电容 C_1, C_2 和电阻 R_1, R_2 均为线性器件.

对于图 1, 以线圈磁通链 ψ 、电容电压 u_{c_1} 和 u_{c_2} 为电路状态变量, 应用 Kirchhoff 电流定律和电压定律, 有

$$\begin{aligned} \frac{d\psi}{dt} &= u_{c_1}, \\ C_1 \frac{du_{c_1}}{dt} &= \frac{u_{c_2} - u_{c_1}}{R_2} - (a\psi^3 + b\psi), \\ C_2 \frac{du_{c_2}}{dt} &= \frac{u(t) - u_{c_2}}{R_1} - \frac{u_{c_2} - u_{c_1}}{R_2}. \end{aligned} \quad (1)$$

[†] E-mail: liuex@mail.xjtu.edu.cn

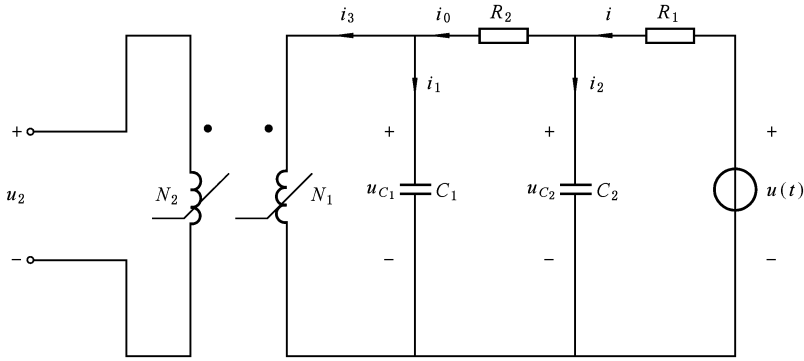


图 1 含有单相铁芯变压器的铁磁混电路

为了对方程(1)进行归一化处理,令

$$\omega t = \tau,$$

$$dt = \frac{1}{\omega} d\tau,$$

则得到状态方程为

$$\omega \frac{d\psi}{d\tau} = u_{c_1},$$

$$\omega C_1 \frac{du_{c_1}}{d\tau} = \frac{u_{c_2} - u_{c_1}}{R_2} - (a\psi^3 + b\psi), \quad (2)$$

$$\omega C_2 \frac{du_{c_2}}{d\tau} = \frac{U_m \sin\tau - u_{c_2}}{R_1} + \frac{u_{c_1} - u_{c_2}}{R_2}.$$

对(2)式整理后可得

$$\frac{d\psi}{d\tau} = \frac{u_{c_1}}{\omega},$$

$$\frac{1}{\omega} \frac{du_{c_1}}{d\tau} = \frac{1}{\omega C_1 R_2} \left(\frac{u_{c_1} - u_{c_2}}{\omega} \right) - \frac{1}{\omega^2 C_1} (a\psi^3 + b\psi),$$

$$\frac{1}{\omega} \frac{du_{c_2}}{d\tau} = \frac{1}{\omega C_2 R_1} \left(\frac{U_m \sin\tau - u_{c_2}}{\omega} \right) + \frac{1}{\omega C_2 R_2} \left(\frac{u_{c_1} - u_{c_2}}{\omega} \right).$$

然后令

$$x = \psi,$$

$$y = \frac{u_{c_1}}{\omega},$$

$$z = \frac{u_{c_2}}{\omega},$$

$$F = \frac{U_m}{\omega^2 C_2 R_1},$$

$$\alpha = \frac{1}{\omega C_1 R_2},$$

$$\beta = \frac{1}{\omega C_2 R_2},$$

$$\zeta = \frac{1}{\omega^2 C_1},$$

$$\eta = \frac{1}{\omega C_2 R_1},$$

则有

$$\frac{dx}{d\tau} = y,$$

$$\frac{dy}{d\tau} = \alpha(z - y) - \zeta(ax^3 + bx), \quad (3)$$

$$\frac{dz}{d\tau} = \beta(y - z) - \eta z + F \sin\tau.$$

令

$$\mu = (\beta + \eta),$$

则状态方程(3)为

$$\frac{dx}{d\tau} = y,$$

$$\frac{dy}{d\tau} = \alpha(z - y) - \zeta(ax^3 + bx), \quad (4)$$

$$\frac{dz}{d\tau} = \beta y - \mu z + F \sin\tau.$$

当激励 $F \sin\tau = 0$ 时, 电路为三阶非线性自治系统, 其方程为

$$\frac{dx}{d\tau} = y,$$

$$\frac{dy}{d\tau} = \alpha(z - y) - \zeta(ax^3 + bx), \quad (5)$$

$$\frac{dz}{d\tau} = \beta y - \mu z.$$

为了求得方程(5)的平衡点, 令

$$y = 0,$$

$$\alpha(z - y) - \zeta(ax^3 + bx) = 0,$$

$$\beta y - \mu z = 0,$$

并取 $a = 1, b = 1$, 求解后可得三阶非线性自治系统原点 $O(0, 0, 0)$ 为方程(5)唯一的实平衡点.

对于实平衡点 $O(0, 0, 0)$, 其 Jacobi 矩阵为

$$J_o = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -0.65(3x^2 + 1) & -0.25 & 0.25 \\ 0 & 0.13 & -0.78 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -0.65 & -0.25 & 0.25 \\ 0 & 0.13 & 0.78 \end{bmatrix}.$$

对于实平衡点 $O(0,0,0)$, 其相应的特征根为 $\lambda_1 = -0.1131 + j0.7861$, $\lambda_2 = -0.1131 - j0.7861$, $\lambda_3 = -0.8039$. 这里 λ_1 和 λ_2 是一对具有负实部的共轭复数, 而 λ_3 仅是一个负实数, 因此这个唯一的实平衡点 $O(0,0,0)$ 是一个稳定的焦点. 根据 Melnikov 方法, 这个三阶非线性系统要产生混沌振荡, 必须要有随时间变化的外加激励, 也就是此系统必须改变成三阶非线性非自治系统.

当激励 $F \sin \tau$ 不为零时, 方程(4)是一个具有外加激励的三阶非线性非自治系统. 为了便于分析和计算机仿真, 仍将 τ 写为 t , 由于 $F \sin \tau$ 是周期函数, 我们增加一个时间维, 令 $\theta = t + k$, 其中 k 为一常数, t 作为一个新的独立变量. 这样, 可将(4)式改写为四阶自治方程, 即为一个等价改进系统. 这个等价改进系统相应的自治方程为

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= y, \\ \frac{dy}{dt} &= \alpha(z - y) - \zeta(ax^3 + bx), \\ \frac{dz}{dt} &= \beta y - \mu z + F \sin t, \\ \frac{d\theta}{dt} &= 1. \end{aligned} \quad (6)$$

方程(6)有四个独立变量 (x, y, z, t) , 由于 $\theta = t + k$, 因而方程(6)在一定的参数条件下, 当电源的幅值调到一定值(即 F 达到一定值)时, 该系统出现混沌振荡^[3-7].

计算机仿真表明, 当非线性非自治电路系统处于混沌状态时, 系统在相平面上的吸引子表现为混沌奇怪吸引子, 此时 Feigenbaum 数 δ 为 4.669201669, 电路响应混沌振荡输出的频谱在一定频率范围内是连续谱. 电路混沌振荡输出电压或电流时域波形对电路的初始值极为敏感, 且输出电压或电流时域波形是非周期性的. 表示其轨道在相空间扩张与收缩的 Lyapunov 指数存在着一个正值.

3. 计算机仿真

为了进一步深入分析和计算机仿真, 取 $\zeta = \frac{1}{\omega^2 C_1} = 0.65$, $\alpha = \frac{1}{\omega C_1 R_2} = 0.25$, $\beta = \frac{1}{\omega C_2 R_2} = 0.13$, $\eta = \frac{1}{\omega C_2 R_1} = 0.65$, $C_1 = 1.56 \times 10^{-5} \text{ F}$, $C_2 = 3 \times 10^{-5} \text{ F}$, $R_1 = 163.3 \ \Omega$, $R_2 = 816.6 \ \Omega$. 在仿真时, 选取电路变量 ψ, u_{c_1}, u_{c_2} 的初始值为 $(0, 0, 0)$. 当调节电源幅值 F 时, 即对系统进行一定量的扰动, 该非线性动力系统出现倍周期分岔, 当电源幅值 F 增加到一定值时, 该非线性动力系统动态响应则由倍周期分岔进而出现 Smale 马蹄形变换意义下的混沌.

我们应用 Matlab 通用软件进行仿真, 当取激励幅值 $F = 60.8$ 时, 系统出现混沌, 这时 Feigenbaum 数 $\delta = \frac{F_{k+1} - F_k}{F_{k+2} - F_{k+1}} = 4.669$. 当激励 F 取不同值时, 系统表现出不同的动力学行为. 取 $k = 1, F_k = 27.92$ 时, 电路出现倍周期分岔; 当 $F_{k+1} = 55$ 时, 电路出现新的倍周期分岔; 当 $F_{k+2} = 60.8$ 时, 电路从倍周期分岔转入混沌状态. 当电路由倍周期分岔进入混沌时, 其仿真的混沌奇怪吸引子如图 2 所示, 混沌奇怪吸引子是整体稳定和局部不稳定的产物, 轨道在相空间的表现是伸长和折叠, 在相平面上既不趋于平衡点又不发散, 而是在一定的有界区域内进行无限的填充和游荡. 在时域中, 电压 $u_{c_1}(t)$ 的时域波形犹如噪声波形, 但它又不是噪声, 仿真的 $u_{c_1}(t)$ 的时域波形如图 3 所示. 当电路进入混沌状态时, 其频谱是连续的宽带谱. 仿真的 u_{c_1} 频谱如图

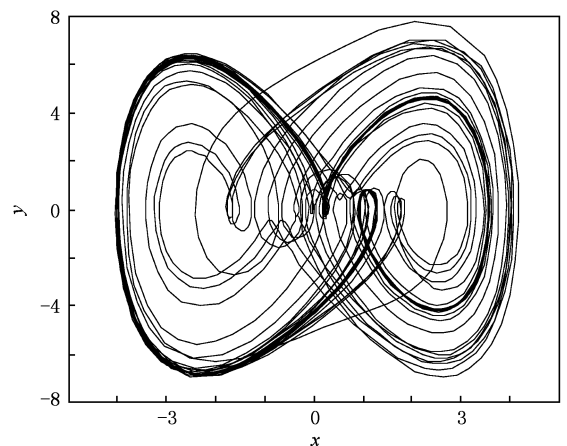


图2 $F = 60.8$ 时 $x-y(\psi-u_{c_1})$ 平面的混沌奇怪吸引子

4 所示,这反映了混沌振荡的一个基本性质.

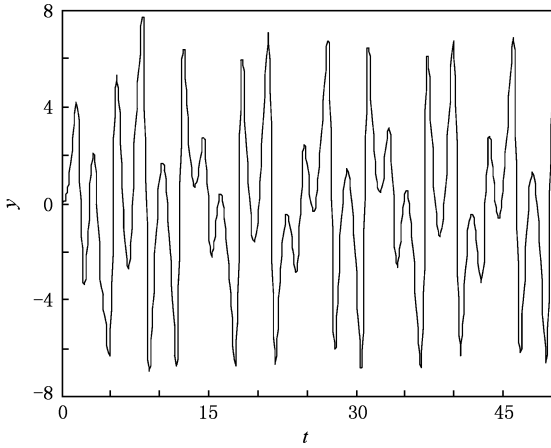


图 3 $F = 60.8$ 时 $y(t)$ (即 $u_{c_1}(t)$) 的时域波形

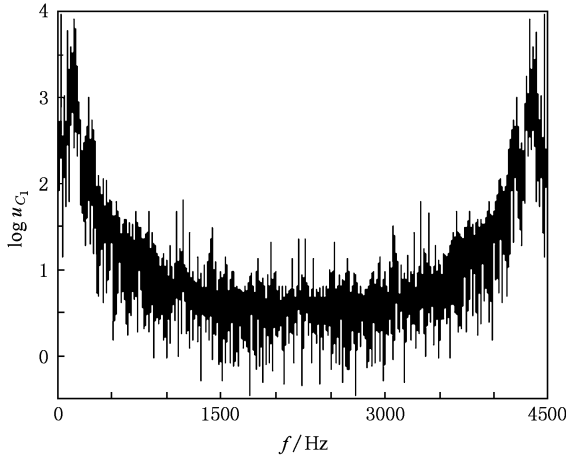


图 4 $F = 60.8$ 时 u_{c_1} 的频谱

随着激励电压幅值的逐渐增高,系统由混沌状态又进入新的倍周期分岔.当取激励电压幅值 $F = 260.8$ 时,系统又由新的倍周期分岔重新进入新的混沌状态,此时其混沌奇怪吸引子如图 5 所示.很显然,混沌相图呈现了更为复杂的结构,在状态平面上其相轨道的运动始终不会重复,但是有界,即在一定的有界区域具有遍历性,从而形成了复杂的双涡卷.此时仿真的 $u_{c_1}(t)$ 时域波形如图 6 所示,其混沌振荡输出波形是非周期性的.仿真的 u_{c_1} 频谱如图 7 所示,其混沌振荡输出信号的频谱则是一定频率范围内的连续谱.其 Poincaré 映射如图 8 所示,混沌在 Poincaré 截面上表现为永不重复的没有任何规律的点的集合.当 $F = 260.8$ 时,四阶自治等价系统(6)的 Lyapunov 指数谱如图 9 所示,系统(6)的

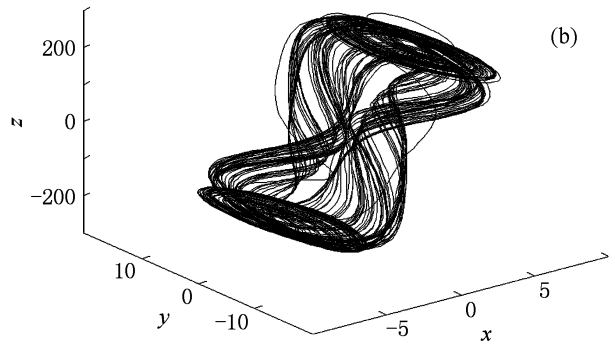
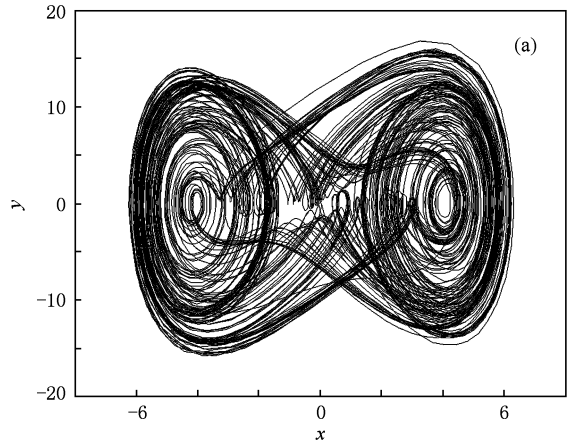


图 5 $F = 260.8$ 时混沌奇怪吸引子 (a) $x-y(\psi-u_{c_1})$ 平面的混沌奇怪吸引子, (b) $x-y-z(\psi-u_{c_1}-u_{c_2})$ 三维混沌奇怪吸引子

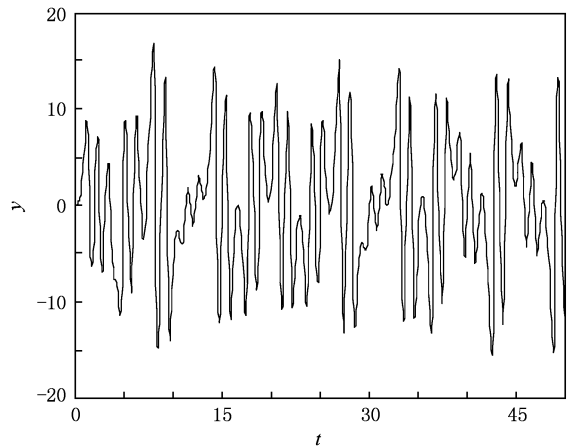


图 6 $F = 260.8$ 时 $y(t)$ (即 $u_{c_1}(t)$) 的时域波形

最大 Lyapunov 指数 $L_1 = 0.1132$, 而 $L_2 = -0.3604$, $L_3 = -0.7827$, $L_4 = 0$. 这时系统中最大 Lyapunov 指数是一个正值,说明系统轨道在相空间的扩张性质,而负的 Lyapunov 指数说明系统轨道在相空间的收缩性质, Lyapunov 指数等于零则反映了系统轨道在相空间的扩张与收缩之间的临界性质. Lyapunov

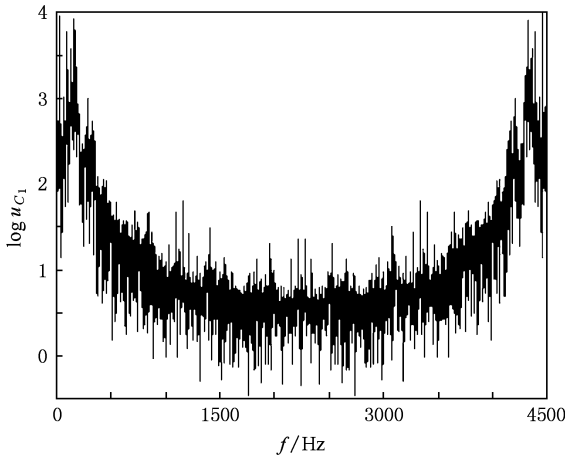


图 7 $F = 260.8$ 时 u_{c1} 的频谱

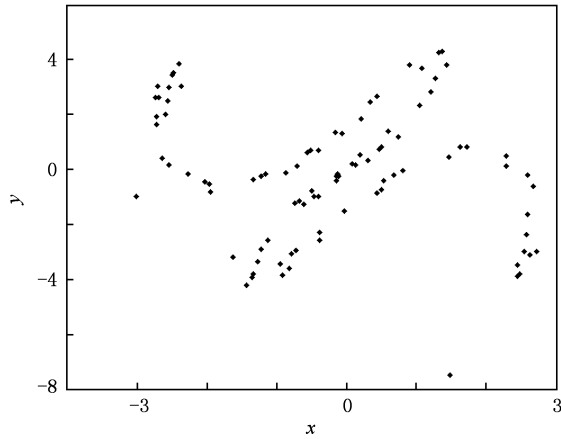


图 8 $F = 260.8$ 时 $z = 0$ 截面的 Poincaré 映射

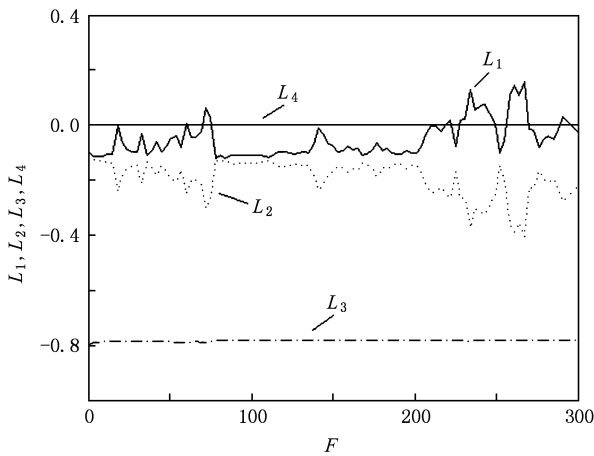


图 9 系统随激励幅值 F 变化的 Lyapunov 指数谱

加激励值越大,呈现出混沌性越强.

当选取电路变量 ψ, u_{c1}, u_{c2} 的初始值为 $(0, 2.0, 0)$, 而激励幅值 $F = 60.8$ 或 $F = 260.8$ 时, 该非线性系统立即从混沌状态进入非混沌状态, 说明该系统中的混沌振荡对电路的初始值极为敏感, 这反映了混沌振荡的又一基本性质. 如果把激励源的频率作为控制量进行变化扰动, 系统同样也可以出现混沌.

系统变量 y 随着系统激励值 F 的变化而产生的分岔行为如图 10 所示. 从图 10 可见, 这个非线性系统随着激励值 F 的变化能够产生极其丰富而复杂的动力学行为.

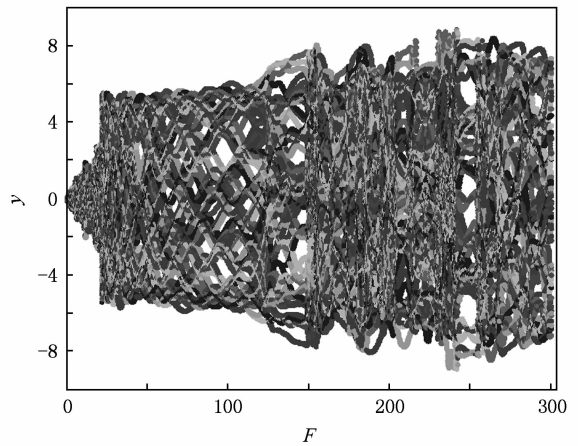


图 10 系统变量 y (即 u_{c1}) 随激励幅值 F 变化的分岔图

系统电路实验得到的奇怪吸引子相图如图 11 所示. 显然, 由铁磁混沌系统的相图与计算机数值仿真相图比较可知, 两者之间存在误差. 误差产生的主要原因是电路实验时示波器只能看到 i_3-u_{c1} 平面的奇怪吸引子, 而仿真看到的是 $\psi-u_{c1}$ 平面的奇怪吸引子. 磁通链 ψ 与电流 i_3 的函数关系为 $i_3 = a\psi^3 + b\psi$, 可以看出电感的非线性强度和其数值精



图 11 系统电路实验得到的奇怪吸引子相图

指数值的计算结果说明该非线性非自治系统确实是一个混沌系统^[8,9], 而且在选择的电路参数下, 外

度受外加激励的影响很大,导致实验难度增大,使实验结果产生了误差,这也是铁磁混沌系统研究进展缓慢的主要原因.此外,电路中各种非理想因素对实验结果也有一定影响.

如果要保证这个三阶非线性非自治电路系统在给定的电压值激励下不发生混沌振荡,一个有效的方法是改变电路系统中线性电容的参数值.当电容参数值改变之后,系统立即进入非混沌状态.电力系统和电子仪器系统均有铁芯变压器和铁芯电压互感器存在,对于此类含有铁芯变压器和铁芯电压互感器的铁磁电路系统,改变电路线性电容参数值是快速控制电路铁磁混沌振荡的一种有效而可靠的控制方法^[10-13].

4. 结 论

本文对含有单相铁芯变压器的非线性电路系统进行了较为深入的理论分析,将描述铁磁电路的

三阶非自治方程组变形为四阶自治等价系统,得到了系统唯一的实平衡点 $O(0,0,0)$ 是一个稳定的焦点.通过仿真得到了电路的混沌奇怪吸引子、电路变量的连续频谱、Poincaré映射和正的 Lyapunov 指数,并通过电路实验证实了本文提出的三阶非自治铁磁电路在一定的参数条件下确实存在混沌现象.同时还提出了一种通过改变电路线性电容参数值控制混沌的有效方法.

通过理论分析、计算机仿真和实验研究,证实了三阶非线性非自治铁磁电路系统在一定的参数和激励条件下确实会出现分岔和混沌振荡.混沌振荡时,电路电压和电流都是非正弦波,高次谐波分量很严重,电路电压和电流都可能超过设备的额定值,混沌振荡会造成系统的局部严重不稳定.分岔和混沌振荡状态会给电子技术系统、通信系统、电力系统等工程系统稳定性带来一定的影响和危害,甚至会导致系统的崩溃,这是值得人们深入研究的一个重要课题.

-
- [1] Chua L O, Hasler M, Neirynek J, Verburgh P 1982 *IEEE Trans. Circuits Syst.* **29** 535
- [2] Bryant P, Jeffries C 1984 *Phys. Rev. Lett.* **53** 250
- [3] Wang J Z, Chen Z Q, Yuan Z Z 2006 *Chin. Phys.* **15** 1216
- [4] Liu C X 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 1198 (in Chinese) [刘崇新 2002 物理学报 **51** 1198]
- [5] Kong L J, Luo X S, Qu W L 1998 *Acta Phys. Sin.* **47** 1078 (in Chinese) [孔令江、罗晓曙、屈万里 1998 物理学报 **47** 1078]
- [6] Yu S M, Lin Q H, Qiu S S 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 2084 (in Chinese) [禹思敏、林清华、丘水生 2004 物理学报 **53** 2084]
- [7] Hui M, Zhang Y B, Liu C X 2008 *Chin. Phys. B* **17** 3258
- [8] Wang X Y, Wang M J 2007 *Chaos* **17** 033106
- [9] Liu C X, Liu T, Liu L, Liu K 2004 *Chaos Solitons Fract.* **22** 1031
- [10] Li C L, Luo X S 2008 *Acta Phys. Sin.* **58** 3759 (in Chinese) [李春来、罗晓曙 2008 物理学报 **58** 3759]
- [11] Wang X Y, Wu X J 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 5083 (in Chinese) [王兴元、武相军 2006 物理学报 **55** 5083]
- [12] Wang X Y, Meng J 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 6280 (in Chinese) [王兴元、孟娟 2007 物理学报 **56** 6280]
- [13] Wang J Z, Cheng Z Q, Yuan Z Z 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 3956 (in Chinese) [王杰智、陈增强、袁著祉 2006 物理学报 **55** 3956]

Control and analysis of a third-order nonautonomous ferroresonance chaotic circuit with a transformer

Liu Chong-Xin[†] Zhai Du-Qing Dong Zi-Han Liu Yao

(*State Key Laboratory of Electrical Insulation and Power Equipment, School of Electrical Engineering,
Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China*)

(Received 23 June 2009; revised manuscript received 21 October 2009)

Abstract

In this paper, the chaos dynamics behavior of a third-order nonautonomous ferroresonance chaotic circuit with single phase transformer has been analyzed and simulated. We drew the conclusion that there is only a nonlinear flux-controlled inductance in this circuit, which has been investigated and simulated by using a fourth-order autonomy improved system. We confirm that the chaotic behavior exists in this circuit by computer simulation and circuit experiment. A simple method of controlling chaos is proposed by varying the linear capacitance parameters.

Keywords: ferroresonance chaotic circuit, nonautonomous system, chaos control

PACC: 0545

[†] E-mail: liucx@mail.xjtu.edu.cn