

一类时滞非线性相对转动系统的 Hopf 分岔与 周期解的稳定性^{*}

刘 爽^{1)†} 刘 彬¹⁾ 张业宽¹⁾ 闻 岩²⁾

1) 燕山大学工业计算机控制工程河北省重点实验室, 秦皇岛 066004)

2) 燕山大学机械工程学院, 秦皇岛 066004)

(2009 年 4 月 17 日收到, 2009 年 5 月 7 日收到修改稿)

讨论了一类时滞非线性相对转动系统的 Hopf 分岔现象, 给出了系统产生 Hopf 分岔的临界时滞条件, 利用多尺度法研究了系统在主共振情况下时滞参数对分岔方向和周期解稳定性的影响, 最后, 用数值模拟对所得结论进行验证.

关键词: 相对转动, 时滞, Hopf 分岔, 稳定性

PACC: 0340D, 0547

1. 引 言

近代物理学研究领域, 转动系统相对论性分析力学已成为其重要的研究内容. 1985 年 Carmeli^[1,2]在经典相对论力学基础上提出转动相对论力学理论, 1996 年 Luo^[3-5]又建立了转动系统的相对论分析力学理论, 并给出了相对论转动力学系统的 Noether 理论. 近年来随着研究的深入, 转动相对论分析力学^[3-8]在 Birkhoff 动力系统的基本理论、积分的场方法和非完整系统的对称性与守恒量等领域取得了一系列研究成果^[9-20]. 基于相对性原理, 文献[21—23]建立了弹性转轴任意两截面间的相对转动线性和非线性动力学方程并进行了定性和定量分析, 文献[24—28]研究了非线性恢复力、阻尼力以及谐波激励作用下相对转动系统的稳定性与近似解, 文献[29]基于 Melnikov 法分析了一类非线性相对转动系统的混沌运动.

本文在文献[27]的相对转动动力学方程中引入时滞非线性状态反馈, 建立如下系统:

$$\ddot{x} + \alpha \dot{x} + \omega_0^2 x + \beta x^3 = Fx \cos(\Omega t) + A x(t - \tau_1) + B x^3(t - \tau_2), \quad (1)$$

式中 x 表示相对转动系统的相对转角, ω_0 表示固有

角频率, α 为阻尼系数, F 表示外激励幅值, Ω 表示外激励角频率, β 为非线性弹性力系数, τ_1 和 τ_2 为时滞量, A 和 B 为增益系数. 该系统在时滞参数变化时表现出丰富的动力学行为和分岔现象, 文献[30—32]已经就线性项时滞参数 τ_1 对 Hopf 分岔的存在性给出详细分析, 本文则在此基础上, 进一步讨论非线性项时滞参数 τ_2 对 Hopf 分岔方向和周期解稳定性的影响.

2. 线性时滞系统的稳定性

首先研究系统(1)线性部分静平衡态 $x = 0$ (即平凡解)的稳定性, 因为这一结果将直接影响系统(1)的 Hopf 分岔和主共振周期解. 对于 $F = 0$, 系统(1)的线性化方程为

$$\ddot{x} + \alpha \dot{x} + \omega_0^2 x - A x(t - \tau_1) = 0, \quad (2)$$

其特征方程可表示为

$$\lambda^2 + \alpha \lambda + \omega_0^2 - A e^{-\tau_1 \lambda} = 0. \quad (3)$$

不难看出时滞参数 τ_1 的变化可引起特征根 λ 的改变, 在 $\tau_1 = 0$ 时, 根据 Lyapunov 稳定性理论可以得到定理 1.

定理 1 若 $\alpha > 0$, $A < \omega_0^2$, 则 $\tau_1 = 0$ 时(2)式的平凡解渐近稳定.

^{*} 国家十一五重大科技攻关项目(批准号: 2007BAF02B10)和河北省自然科学基金(批准号: F2008000882)资助的课题.

[†] E-mail: shliu@ysu.edu.cn

在 $\tau_1 > 0$ 时,由于 $\lambda = 0$ 不是特征方程的根,因此方程 (3) 具有负实部的特征根随时滞参数 τ_1 变化成为具有正实部的特征根时必须通过虚轴. 由于复特征根都是成对出现的,不失一般性,假设 $\lambda = \delta + j\omega$ 为方程 (3) 的特征根, δ 和 ω 为实数,且 $\omega > 0$, 将其代入方程 (3) 分离实虚部得

$$\begin{aligned} \delta^2 - \omega^2 + \alpha\delta + \omega_0^2 - A e^{-\delta\tau_1} \cos(\tau_1 \omega) &= 0, \\ 2\delta\omega + \alpha\omega + A e^{-\delta\tau_1} \sin(\tau_1 \omega) &= 0. \end{aligned} \quad (4)$$

令 $\delta = 0$, 有

$$\begin{aligned} \omega_0^2 - \omega^2 &= A \cos(\tau_1 \omega), \\ -\alpha\omega &= A \sin(\tau_1 \omega). \end{aligned} \quad (5)$$

方程 (4) 中消去时滞参数 τ_1 , 得

$$\omega^4 + (\alpha^2 - 2\omega_0^2)\omega^2 + \omega_0^4 - A^2 = 0. \quad (6)$$

方程 (6) 中 ω 存在正实根即为系统线性部分平凡解

渐近稳定的边界条件, 以下分两种情形加以讨论.

情形 1 方程 (6) 有两个正实根.

满足如下关系式:

$$\begin{aligned} \omega_0^4 - A^2 &> 0, \\ 2\omega_0^2 - \alpha^2 &> 0, \\ \alpha^4 - 4\omega_0^2\alpha^2 + 4A^2 &> 0, \end{aligned} \quad (7)$$

方程 (6) 中 ω 有两个正实根, 即

$$\omega_{\pm}^2 = \frac{2\omega_0^2 - \alpha^2 \pm \sqrt{\alpha^4 - 4\omega_0^2\alpha^2 + 4A^2}}{2}. \quad (8)$$

(3) 式中 λ 对 τ_1 求导得

$$\frac{d\lambda}{d\tau_1} = \frac{-A\lambda}{(2\lambda + \alpha)e^{\lambda\tau_1} + A\tau_1}. \quad (9)$$

将 (5) 式代入 (9) 式有

$$\operatorname{Re}\left(\frac{d\lambda}{d\tau_1}\right)\Big|_{\lambda=j\omega_+} = \frac{\alpha^2\omega_+^2 - \mathcal{X}(\omega_0^2 - \omega_+^2)\omega_+^2}{(\alpha\cos(\tau_1\omega_+) - 2\omega\sin(\tau_1\omega_+) + A\tau_1)^2 + (2\omega_+ \cos(\tau_1\omega_+) + \alpha\sin(\tau_1\omega_+))^2} > 0, \quad (10)$$

$$\operatorname{Re}\left(\frac{d\lambda}{d\tau_1}\right)\Big|_{\lambda=j\omega_-} = \frac{\alpha^2\omega_-^2 - \mathcal{X}(\omega_0^2 - \omega_-^2)\omega_-^2}{(\alpha\cos(\tau_1\omega_-) - 2\omega\sin(\tau_1\omega_-) + A\tau_1)^2 + (2\omega_- \cos(\tau_1\omega_-) + \alpha\sin(\tau_1\omega_-))^2} < 0, \quad (11)$$

式中, $\operatorname{Re}(\cdot)$ 表示取 $(\cdot)$ 实部, 当 $\omega = \omega_{\pm}$ 时, 对应

$\tau_1 = \tau_{1,k}^{\pm}$, 其值由方程 (5) 求得如下:

$$\tau_{1,k}^+ = \begin{cases} \frac{1}{\omega_+} \left[2k\pi + \arccos\left(\frac{\omega_0^2 - \omega_+^2}{A}\right) \right], & A < 0, \\ \frac{1}{\omega_+} \left[(2k+2)\pi - \arccos\left(\frac{\omega_0^2 - \omega_+^2}{A}\right) \right], & A > 0, \end{cases} \quad (12)$$

$$\tau_{1,k}^- = \begin{cases} \frac{1}{\omega_-} \left[2k\pi + \arccos\left(\frac{\omega_0^2 - \omega_-^2}{A}\right) \right], & A < 0, \\ \frac{1}{\omega_-} \left[(2k+2)\pi - \arccos\left(\frac{\omega_0^2 - \omega_-^2}{A}\right) \right], & A > 0, \end{cases} \quad (13)$$

其中 $k = 0, 1, 2, 3, \dots$

因此, 由定理 1 和关系式 (7) 得, 在满足 $0 < \alpha < \sqrt{2}\omega_0$, $-\omega_0^2 < A < \omega_0^2\alpha^4 - 4\omega_0^2\alpha^2 + 4A^2 > 0$ 时, 时滞参数 τ_1 使系统 (2) 的平凡解渐近稳定的范围是 $0 < \tau_1 < \tau_{1,0}^+$ 或 $\tau_{1,k}^- < \tau_1 < \tau_{1,k+1}^+$.

情形 2 方程 (6) 有一个正实根.

若

$$\omega_0^4 - A^2 < 0, \quad (14)$$

方程 (6) 中有一个正实根, 记为 ω_+ ,

$$\omega_+^2 = \frac{2\omega_0^2 - \alpha^2 + \sqrt{\alpha^4 - 4\omega_0^2\alpha^2 + 4A^2}}{2}. \quad (15)$$

此时,

$$\operatorname{Re}\left(\frac{d\lambda}{d\tau_1}\right)\Big|_{\lambda=j\omega_+} > 0. \quad (16)$$

因此, 综合定理 1 和关系式 (14), 当 $\alpha > 0$, $A < -\omega_0^2$, $0 < \tau_1 < \tau_{1,0}^+$ 时系统 (2) 的平凡解渐近稳定. 综上所述得定理 2.

定理 2 在时滞参数 τ_1 满足下列条件之一时, 系统 (2) 的平凡解是渐近稳定的.

1) 当 $\alpha > 0$, $A < -\omega_0^2$ 时 $0 < \tau_1 < \tau_{1,0}^+$;

2) 当 $0 < \alpha < \sqrt{2}\omega_0$, $-\omega_0^2 < A < \omega_0^2\alpha^4 - 4\omega_0^2\alpha^2 + 4A^2 > 0$ 时 $0 < \tau_1 < \tau_{1,0}^+$ 或 $\tau_{1,k}^- < \tau_1 < \tau_{1,k+1}^+$.

3. 主共振情况下的 Hopf 分岔及周期解稳定性

从上节的分析可以看出当参数穿过由方程 (6) 确定的临界稳定边界时, 时滞量 τ_1 可以导致静平衡

态失稳,使系统产生 Hopf 分岔而出现频率 ω 的周期振动,当 $F \neq 0$ 且系统(1)的外激励频率与其接近时,系统(1)就会出现主共振,由于这样的共振解是从静平衡态产生的,因此可以重新标度,为此设干扰力的幅值 F 为 $F = \epsilon f$,并对非线性项冠以小参数 ϵ ,则(1)式化为

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \epsilon [f x \cos(\Omega t) + A x(t - \tau_1) + B x^3(t - \tau_2) - \alpha x - \beta x^3]. \quad (17)$$

引入新变量

$$T_n = \epsilon^n t, n = 0, 1, \dots \quad (18)$$

即 $T_0 = t, T_1 = \epsilon t, T_2 = \epsilon^2 t, \dots$, 因此关于 t 的导数变成了关于 T_n 的偏导数的展开形式

$$\frac{d}{dt} = \frac{dT_0}{dt} \frac{\partial}{\partial T_0} + \frac{dT_1}{dt} \frac{\partial}{\partial T_1} + \dots = D_0 + \epsilon D_1 + \dots \quad (19)$$

$$\frac{d^2}{dt^2} = D_0^2 + 2\epsilon D_0 D_1 + \epsilon^2 (D_1^2 + 2D_0 D_2) + \dots \quad (20)$$

D_i 表示 $\partial/\partial T_i$, 此时方程(17)的解可以表示为

$$x = x_0 + \epsilon x_1 + \epsilon^2 x_2 + \dots \quad (21)$$

在主共振情况下,令

$$\omega_0 = \Omega + \epsilon \sigma, \quad (22)$$

σ 为调谐参数,则 $\omega_0^2 = \Omega^2 + 2\epsilon \sigma \Omega + \epsilon^2 \sigma^2$. 将(21)和(22)式代入(17)式,比较方程两边 ϵ 系数,得下列摄动方程:

$$D_0^2 x_0 + \Omega^2 x_0 = 0, \quad (23)$$

$$D_0^2 x_1 + \Omega^2 x_1 = -2D_0 D_1 x_0 - 2\sigma \Omega x_0 + f x_0 \cos \Omega t + A x_0(t - \tau_1) + B x_0^3(t - \tau_2) - \alpha D_0 x_0 - \beta x_0^3. \quad (24)$$

方程(23)的解可以写为

$$x_0 = \rho e^{j\Omega T_0} + \bar{\rho} e^{-j\Omega T_0}, \quad (25)$$

$\bar{\rho}$ 表示 ρ 的共轭,将(25)式代入(24)式有

$$\begin{aligned} D_0^2 x_1 + \Omega^2 x_1 = & -2j\Omega(D_1 \rho) e^{j\Omega T_0} + 2j\Omega(D_1 \bar{\rho}) e^{-j\Omega T_0} \\ & - 2\sigma \Omega \rho e^{j\Omega T_0} - 2\sigma \Omega \bar{\rho} e^{-j\Omega T_0} \\ & + A \rho e^{j\Omega(T_0 - \tau_1)} + A \bar{\rho} e^{-j\Omega(T_0 - \tau_1)} \\ & + B[\rho^3 e^{3j\Omega(T_0 - \tau_2)} + 3\rho^2 \bar{\rho} e^{j\Omega(T_0 - \tau_2)} \\ & + 3\rho \bar{\rho}^2 e^{-j\Omega(T_0 - \tau_2)} + \bar{\rho}^3 e^{-3j\Omega(T_0 - \tau_2)}] \\ & - \alpha[j\Omega \rho e^{j\Omega T_0} - j\Omega \bar{\rho} e^{-j\Omega T_0}] \\ & - \beta[\rho^3 e^{3j\Omega T_0} + 3\rho^2 \bar{\rho} e^{j\Omega T_0} \\ & + 3\rho \bar{\rho}^2 e^{-j\Omega T_0} + \bar{\rho}^3 e^{-3j\Omega T_0}] \\ & + \frac{f}{2}(\rho e^{2j\Omega T_0} + \rho + \bar{\rho} + \bar{\rho} e^{-2j\Omega T_0}). \end{aligned} \quad (26)$$

消除久期项得

$$\begin{aligned} & -2j\Omega(D_1 \rho) - 2\sigma \Omega \rho + A(\cos \Omega \tau_1 - j \sin \Omega \tau_1) \\ & + 3B\rho^2 \bar{\rho}(\cos \Omega \tau_2 - j \sin \Omega \tau_2) - j\Omega \alpha \rho - 3\beta \rho^2 \bar{\rho} = 0. \end{aligned} \quad (27)$$

令 $\rho = u + jv$, 分离实虚部后化为直角坐标系

$$\begin{aligned} D_1 u = & \left(-\frac{A}{2\Omega} \sin \Omega \tau_1 - \frac{\alpha}{2}\right) u \\ & + \left(-\sigma + \frac{A}{2\Omega} \cos \Omega \tau_1\right) v + h(u, v), \\ D_1 v = & \left(\sigma - \frac{A}{2\Omega} \cos \Omega \tau_1\right) u \\ & + \left(-\frac{A}{2\Omega} \sin \Omega \tau_1 - \frac{\alpha}{2}\right) v + g(u, v) \end{aligned} \quad (28)$$

其中 $h(u, v)$ 和 $g(u, v)$ 为 u, v 不低于 2 次的非线性项,表示如下:

$$\begin{aligned} h(u, v) = & \frac{1}{2\Omega}[-3Bu^3 \sin(\Omega \tau_2) + 3Bu^2 v \cos(\Omega \tau_2) \\ & - 3Buv^2 \sin(\Omega \tau_2) + 3Bv^3 \cos(\Omega \tau_2) \\ & + 3\beta u^2 v + 3\beta v^3], \end{aligned} \quad (29)$$

$$\begin{aligned} g(u, v) = & -\frac{1}{2\Omega}[3Bu^3 \cos \Omega \tau_2 + 3Bu^2 v \sin \Omega \tau_2 \\ & + 3Bv^3 \sin \Omega \tau_2 + 3\beta u^3 + 3\beta uv^2]. \end{aligned} \quad (30)$$

(28)式是原系统(1)的平均化方程,可以充分反映原系统在平衡点附近的动力学行为,(28)式的平衡点为坐标原点 $(u, v) = (0, 0)$,令

$$\alpha_e = \alpha + \frac{A}{\Omega} \sin \Omega \tau_1, \quad (31)$$

$$\sigma_e = \sigma - \frac{A}{2\Omega} \cos \Omega \tau_1, \quad (32)$$

则(28)式在坐标原点处的 Jacobian 矩阵为

$$J|_{(u, v) = (0, 0)} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}\alpha_e & -\sigma_e \\ \sigma_e & -\frac{1}{2}\alpha_e \end{bmatrix}. \quad (33)$$

其特征方程为

$$\lambda^2 + \alpha_e \lambda + \sigma_e^2 + \frac{1}{4} \alpha_e^2 = 0. \quad (34)$$

求得特征值为

$$\lambda_{1,2} = -\frac{1}{2}\alpha_e \pm j\sigma_e, \quad (35)$$

当 $\alpha_e = 0, \sigma_e \neq 0$ 时特征方程(34)存在一对纯虚根 $\lambda_{1,2} = \pm j\sigma_e$, 根据 Hopf 分岔定理,此时系统发生 Hopf 分岔. 由于 α_e 是时滞参数 τ_1 的函数,因此,调节时滞参数 τ_1 可以控制 Hopf 分岔的发生,而时滞参数 τ_2 包含在平均方程的非线性项中,将影响 Hopf 分岔方向及周期解的稳定性,为此令

$$\begin{aligned} \eta = & \frac{1}{16} \left(\frac{\partial^3 h}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 h}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 g}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 g}{\partial y^3} \right) \\ & + \frac{1}{16\omega} \left[\frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y} \left(\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} \right) \right. \\ & - \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} \left(\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} \right) - \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} \\ & \left. + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} \right]. \end{aligned} \quad (36)$$

将(29)式和(30)式代入(36)式得

$$\eta = -\frac{3B \sin \Omega \tau_2}{2\Omega}, \quad (37)$$

η 的符号将决定 Hopf 分岔周期解的稳定性, 因此改变时滞参数 τ_2 可以控制 Hopf 分岔周期解的稳定性, 于是得定理 3.

定理 3 $\alpha_e = 0$ 时, 系统(1)发生 Hopf 分岔, 当 $\eta < 0$ 时, Hopf 分岔是超临界的, 产生稳定的周期解; 当 $\eta > 0$ 时, Hopf 分岔是亚临界的, 产生不稳定的周期解.

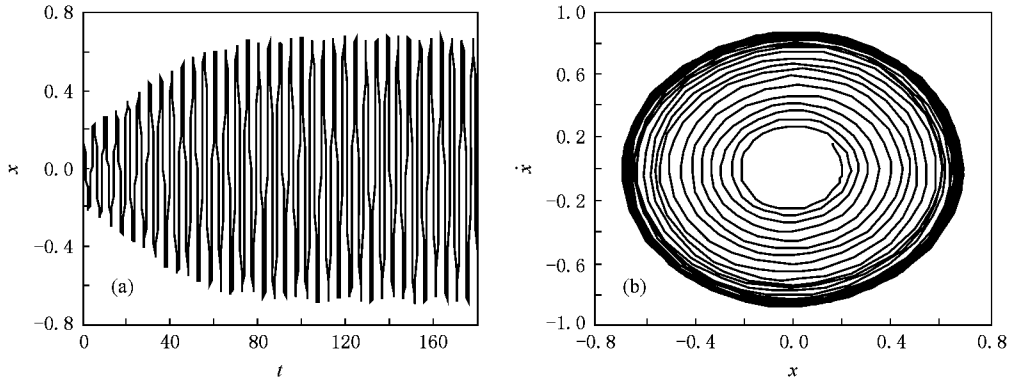


图1 超临界 Hopf 分岔 (a) 稳定极限环时间历程; (b) 稳定极限环相轨迹

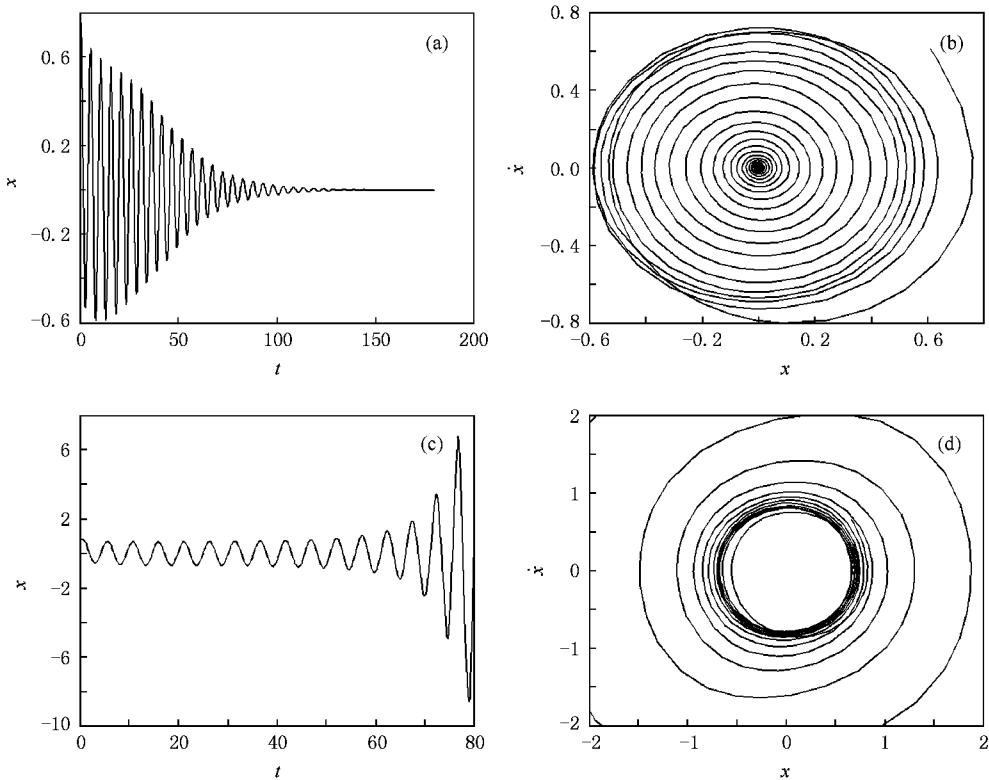


图2 亚临界 Hopf 分岔 (a) 稳定平衡点时间历程 (b) 稳定平衡点相轨迹 (c) 不稳定极限环时间历程 (d) 不稳定极限环相轨迹

4. 数值仿真

取系统参数 $\alpha = 0.3$, $\beta = 0.1$, $\Omega = 1.0$, $\omega_0 = 1.1$, $F = 0.1$, $A = -0.5$, $B = 0.5$, 当 $\tau_1 = 0.93$, $\tau_2 = 2$ 时, $\eta < 0$ 系统产生超临界 Hopf 分岔, 时间历程与相轨迹如图 1 所示; 其他参数不变, 当 $\tau_1 = 0.41$, $\tau_2 = 4.2$ 时, $\eta > 0$ 系统产生亚临界 Hopf 分岔, 此时存在两个由初始条件决定的不同运动轨迹: 当初值较小时, 平衡点局部渐近稳定; 当初值较大时, 响应跳变到幅值

较大且不稳定的极限环上, 导致系统失稳, 如图 2. 仿真结果与文中所得结论相符.

5. 结 论

本文研究了一类非线性时滞相对转动系统的 Hopf 分岔现象, 并对其进行数值仿真. 结果表明: 线性项时滞参数可以控制 Hopf 分岔的发生, 而非线性项时滞参数决定了系统在主共振情况下的分岔方向和周期解的稳定性.

- [1] Carmeli M 1985 *Found. Phys.* **15** 175
- [2] Carmeli M 1986 *Inter. J. Theor. Phys.* **25** 89
- [3] Luo S K 1996 *J. Beijing Inst. Technol.* **16**(S1) 154 (in Chinese) [罗绍凯 1996 北京理工大学学报 **16**(S1) 154]
- [4] Luo S K 1996 *Appl. Math. Mech.* **17** 683
- [5] Luo S K 1998 *Appl. Math. Mech.* **19** 45
- [6] Luo S K 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 712 (in Chinese) [罗绍凯 2002 物理学报 **51** 712]
- [7] Luo S K 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 1416 (in Chinese) [罗绍凯 2002 物理学报 **51** 1416]
- [8] Jia L Q 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 1043 (in Chinese) [贾利群 2003 物理学报 **52** 1043]
- [9] Liu J L 2002 *J. Sound Vib.* **251** 847
- [10] Fu J L, Chen X W, Luo S K 1999 *Appl. Math. Mech.* **21** 549
- [11] Kara A H 2001 *Inter. J. Non-Linear Mech.* **36** 125
- [12] Luo S K, Chen X W, Guo Y X 2002 *Chin. Phys.* **11** 523
- [13] Luo S K 2002 *Chin. Phys. Lett.* **19** 449
- [14] Stephen M C 2004 *J. Phys. A* **333** 91
- [15] Li Q C, Wei J Z 2005 *J. Sound Vib.* **286** 663
- [16] Fu J L, Chen L Q 2006 *J. Phys. A* **358** 5
- [17] Luo S K 2003 *Chin. Phys.* **12** 140
- [18] Luo S K, Jia L Q, Cai J L 2003 *Chin. Phys.* **12** 841
- [19] Luo S K, Huang F J, Lu Y B 2004 *Chin. Phys.* **13** 2182
- [20] Luo S K, Cai J L, Jia L Q 2005 *Chin. Phys.* **14** 656
- [21] Dong Q L, Liu B 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 2191 (in Chinese) [董

- 全林、刘 彬 2002 物理学报 **51** 2191]
- [22] Dong Q L, Wang K, Zhang C X, Liu B 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 337 (in Chinese) [董全林、王 坤、张春熹、刘 彬 2004 物理学报 **53** 337]
- [23] Zhao W, Liu B 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 4543 (in Chinese) [赵武、刘 彬 2005 物理学报 **54** 4543]
- [24] Zhao W, Liu B, Shi P M, Jiang J S 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 3852 (in Chinese) [赵武、刘 彬、时培明、蒋金水 2006 物理学报 **55** 3852]
- [25] Shi P M, Liu B 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 3678 (in Chinese) [时培明、刘 彬 2007 物理学报 **56** 3678]
- [26] Meng Z, Liu B 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 6194 (in Chinese) [孟宗、刘 彬 2007 物理学报 **56** 6194]
- [27] Meng Z, Liu B 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 1329 (in Chinese) [孟宗、刘 彬 2008 物理学报 **57** 1329]
- [28] Shi P M, Liu B, Liu S 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 4675 (in Chinese) [时培明、刘 彬、刘 爽 2008 物理学报 **57** 4675]
- [29] Shi P M, Liu B, Hou D X 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 1321 (in Chinese) [时培明、刘 彬、侯东晓 2008 物理学报 **57** 1321]
- [30] Qian C Z, Tang J S 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 617 (in Chinese) [钱长照、唐驾时 2006 物理学报 **55** 617]
- [31] Wang Z L 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 4771 (in Chinese) [王作雷 2008 物理学报 **57** 4771]
- [32] Zou S C, Xu W, Jin Y F 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 7527 (in Chinese) [邹少存、徐 伟、靳艳飞 2008 物理学报 **57** 7527]

Hopf bifurcation and stability of periodic solutions in a nonlinear relative rotation dynamical system with time delay^{*}

Liu Shuang^{1,2,†} Liu Bin¹⁾ Zhang Ye-Kuan¹⁾ Wen Yan²⁾

¹ *Key Lab of Industrial Computer Control Engineering of Hebei Province, Yanshan University, Qinhuangdao 066004, China*

² *Institute of Mechanical Engineering, Yanshan University, Qinhuangdao 066004, China*

(Received 17 April 2009 ; revised manuscript received 7 May 2009)

Abstract

Hopf bifurcation in a nonlinear relative-rotation system with time delay is considered, and the critical time delay associated with Hopf bifurcation is found. The time delay's influence on the direction and stability of bifurcation are analyzed under the primary resonance condition with the aid of multiple scales. Finally, numerical simulations are performed to verify the analytical results.

Keywords : relative rotation, time delay, Hopf bifurcation, stability

PACC : 0340D, 0547

^{*} Project supported by the National Significant Tackle Key Problems for 11th 5- Year Plan of China(Grant No. 2007BAF02B10) and the Natural Science Foundation of Hebei Province, China(Grant No. F2008000882).

[†] E-mail : shliu@ysu.edu.cn