

颗粒堆的体积分数与制备流量关系的实验研究^{*}

孔维姝[†] 胡 林 张兴刚 岳国联

(贵州大学理学院, 贵州光电子技术与应用重点实验室, 贵阳 550025)

(2009 年 2 月 20 日收到, 2009 年 5 月 7 日收到修改稿)

通过实验研究发现, 颗粒堆的体积分数随制备颗粒堆的颗粒流流量指数衰减, 减小或增加流量到一定程度时, 体积分数都达到饱和; 出料口直径与颗粒粒径的比值小到一临界值时, 随着流量的减小体积分数增加急剧变缓; 颗粒粒径小到一临界值时, 随着流量的增加, 体积分数的减小急剧变缓. 结合颗粒物质的强耗散性、空气作用、瓶颈效应和碰撞理论解释了实验现象, 从连续性原理出发推出的颗粒堆体积分数随制备流量变化的函数与实验数据的拟合公式相同.

关键词: 颗粒物质, 流量, 体积分数

PACC: 4630P, 4610, 8220M

1. 引言

颗粒物质一般指由尺度 $d > 1 \mu\text{m}$ 的大量离散固体颗粒组成的复杂体系, 它有许多不同于固体、液体、气体的奇特性质. 颗粒物质的独特性质之一是颗粒物质的行为与它形成历史有关, 表面上看起来完全相同的颗粒堆其内部结构可以有很大差别, 导致它的行为也相差甚远. 颗粒物质的这一性质引起人们广泛的关注^[1-8], 其中具有代表性的是 1999 年以来 Vanel 等精心设计的一些实验, 文献 [1] 证明了颗粒堆的制备方式不同引起的颗粒堆底部压力凹陷的不同, 文献 [2] 证明了颗粒堆的制备方式不同引起的粮仓效应的差异, 无论是压力凹陷还是粮仓效应, 都与颗粒堆的结构有关. 颗粒物质的体积分数(颗粒堆中每颗颗粒的体积之和与颗粒堆所占的空间体积的比值)是描述颗粒物质结构和影响颗粒物质性质的重要物理量. 颗粒物质的行为不仅静态的甚至动态的都与它的体积分数有关, 例如, 任何颗粒流动的发生都是以局部颗粒堆积密度的降低(体积分数减小)为条件的. 对于固体和流体, 当温度和压力确定时, 其密度是确定的. 颗粒堆中的颗粒无序分布, 其密度(或体积分数)则不确定, 与堆积方式和历史

有关. 大量的实验证明, 对尺寸相近的颗粒用不同方式制备的颗粒堆, 其体积分数约在 0.56—0.64 的范围内, 若颗粒的大小不同, 堆积的体积分数会更大. 理论上可以证明, 相同尺寸球形颗粒物质的无序堆积的体积分数低于有序面心(或六方)密堆积时的体积分数 0.74, 而高于简单立方堆积的体积分数 0.52. 二维颗粒堆积的体积分数比三维堆积的体积分数高^[3]. 在我们的调研中, 未见到关于颗粒堆体积分数与制备颗粒堆的颗粒流流量关系的报道, 我们提出一种新的重复性较好的制备颗粒堆的方式, 通过改变制备颗粒堆的流量来改变它的体积分数, 可控体积分数在 0.589—0.640 范围内. 结合颗粒物质的强耗散性、空气作用、瓶颈效应和碰撞等理论解释了实验现象, 并从连续性原理出发推出了颗粒堆的体积分数随制备流量变化的函数, 此函数与实验数据的拟合函数完全相同.

2. 实验

实验中, 颗粒堆由大量的球形玻璃珠构成, 10 种玻璃珠的密度都为 $\rho_0 = 2.50 \text{ g/cm}^3$, 直径在 0.04 cm 到 0.40 cm 范围内, 粒径不同的 10 堆颗粒的总质量 M 相同, 其值为 $M = 600 \text{ g}$; 容器的内径和高度分

^{*} 贵州省科技厅基金(批准号 20072003), 国际合作项目(批准号 2007-400112), 贵州省省长基金(批准号 2006-15)和组织部高层次人才资助基金(批准号 2006008)资助的课题.

[†] 通讯联系人. E-mail: kongweishu@126.com

别为 3.15 cm 和 56.00 cm(在预实验中,我们分别用直径为 7.00 cm 和 3.15 cm 的容器制备颗粒堆,得到的颗粒堆的体积分数相同,为了提高测量精度,我们使用了较细而深的圆筒容器制备颗粒堆)。

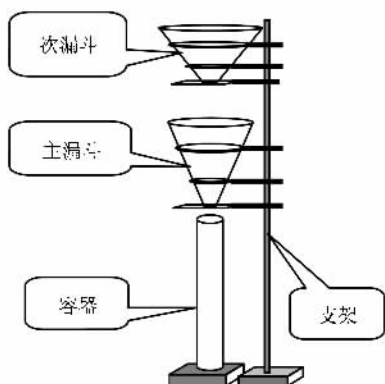


图1 实验装置示意图

我们用锥形漏斗制备颗粒堆,影响漏斗出料口流量和颗粒堆体积分数的因素很多,除了漏斗出料口径 D 和颗粒直径 d 外,还有漏斗的形状,漏斗、颗粒及容器材料的弹性,容器壁与颗粒间以及颗粒与颗粒间的摩擦系数和静电作用,环境湿度和温度等等。我们实验的控制参量为出料口径 D 和颗粒直径 d 。为了保证在相同的控制参量下测量结果的可重复性,除了控制参量可改变外,其他实验条件均相同。为保证各次测量中颗粒堆形成的历史相同,我们采用二级漏斗(锥形)制备颗粒堆(图1),先将颗粒以一定的流量填入次漏斗,然后控制颗粒从次漏斗流入主漏斗,最后再控制颗粒从主漏斗流入颗粒容器。其中,次漏斗出料口径 D' 固定不变,其值为 $D' = 1.60$ cm;主漏斗的出料口径 D 可以改变, D 的变化

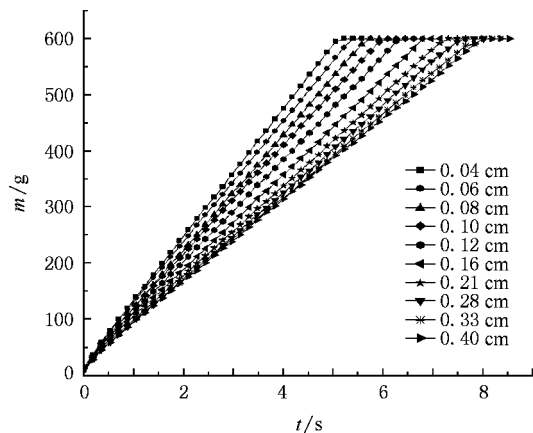


图2 制备过程中不同粒径的颗粒堆质量 m 随时间 t 的变化

在 0.45 cm 到 3.00 cm 范围内,漏斗的锥角(漏斗的棱边与竖直线间的夹角)为 6° ,图2是制备颗粒堆的过程中不同粒径的颗粒堆质量 m 随时间 t 变化的实验数据($D = 1.60$ cm),数据表明, m 随 t 线性增加,制备流量 $Q = m/t$ 不随时间变化。

实验中,制备颗粒堆的流量 Q (单位时间填充的颗粒堆的质量)由电子秤间接测量,颗粒堆的体积分数 η (颗粒堆的总质量除以颗粒材料的密度和颗粒堆的体积)由颗粒的密度、颗粒堆的质量及颗粒堆的高度间接测量,其中颗粒堆的高度由浦光 JC4-10 读数显微镜测量。

3. 实验结果与分析

用不同出料口径 D 的漏斗制备粒径相同的颗粒堆,颗粒堆的体积分数 η 随漏斗的出料流量 Q 改变的实验数据及误差见图3(a),其中不同形状的实心点对应于不同的颗粒粒径。将实验数据用单调收敛饱和减函数

$$\eta = \eta_u - (\eta_u - \eta_d) e^{-\frac{\gamma}{Q}} \quad (1)$$

拟合,拟合曲线见图3(b),拟合参数 η_u , η_d 和 γ 见表1。结果表明:1)在粒径 d 一定的情况下,体积分数 η 随制备流量 Q 的增大而指数减少,增加和减少流量,颗粒堆的体积分数都会达到饱和,(1)式中 η_u 和 η_d 分别为体积分数的上限和下限饱和值。 η_u 和 η_d 都与颗粒粒径 d 有关,表1列出了不同粒径 d 对应的 η_u 和 η_d 值,其中 η_u 和 η_d 是相应的实验值。2)在 Q 一定时,(1)式中的 γ 越大则 η 越大, γ 与粒径有关,表1列出了不同粒径对应的 γ 值,数据显示,粒径 d 越大 γ 值越大, γ 对 η 的影响反映了粒径对 η 的影响,即在 Q 一定的情况下随着粒径的增大体积分数一般指数增大。3) η_u 受 D/d 的比值影响较大,表1列出了粒径不同的颗粒堆其体积分数达到上限饱和值时对应的临界出料口径 D_u 与颗粒粒径 d 的比值,数据显示: $D_u/d > 5.5$ 时, η_u 随粒径的增加而增大。相反, $D_u/d < 5.5$ 时, η_u 随粒径的增加而减小,这意味着, D_u/d 小于临界值 5.5 时,随流量的减小,颗粒堆的体积分数增加明显变缓。4)在 $d > 0.06$ cm 时, η_d 随 d 的增加而增大,然而,在 $d \leq 0.06$ cm 时, η_d 随 d 的增加反而减小,这意味着,在 d 小于一定临界值时,随着流量的增加,颗粒堆体积分数的减小急剧变缓。

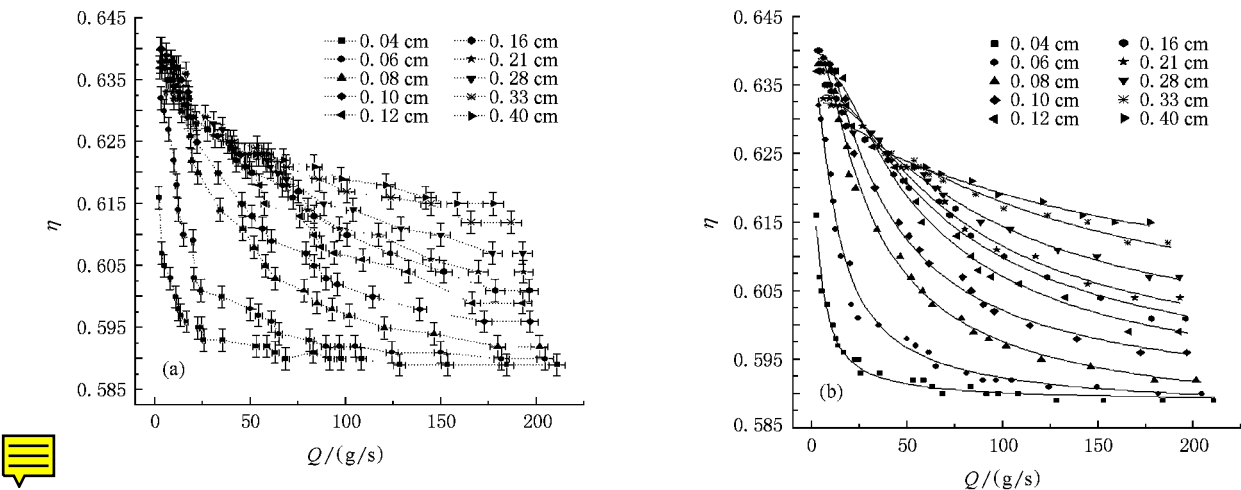


图3 不同粒径颗粒堆的体积分数与颗粒流量的关系 (a)实验数据及误差 (b)实验数据的拟合曲线

表 1										
d/cm	0.04	0.06	0.08	0.10	0.12	0.16	0.21	0.28	0.33	0.40
η_u	0.618	0.635	0.639	0.640	0.637	0.634	0.632	0.630	0.627	0.625
η_d	0.589	0.587	0.589	0.590	0.591	0.592	0.594	0.597	0.603	0.607
η_u'	0.616	0.632	0.638	0.640	0.637	0.635	0.633	0.628	0.625	0.623
η_d'	0.589	0.590	0.592	0.596	0.599	0.601	0.604	0.607	0.611	0.615
γ	4.58	10.8	26.4	31.8	49.3	62.2	68.1	82.6	111	133
D_u/d	10.00	7.50	6.25	5.50	5.00	4.06	4.05	3.98	3.94	3.63

粮仓效应告诉我们,当筒仓中颗粒堆的高度大于一定临界值(大约为筒仓直径两倍)时,筒仓底部受到的颗粒堆的压力不随颗粒堆的高度而改变,对于筒仓中较深的颗粒堆,大部分颗粒堆的重力被筒仓壁与颗粒间的摩擦力支撑,Jannsen 用连续均匀介质模型较好地解释了粮仓效应^[3 5 8],并得到广泛的认可.因此我们可以认为,筒仓中一定深度下,颗粒堆的体积分数(或颗粒堆的密度)不会因自身的重量而下面大上面小.然而筒仓中颗粒堆的体积分数却与颗粒堆形成的历史有关,我们认为颗粒堆形成的历史对颗粒堆体积分数的影响主要是颗粒流对颗粒堆的冲击以及颗粒物质的强耗散性对颗粒流冲击的衰减共同作用的结果.在制备过程中,前者使颗粒堆上部的密度由上至下增加,后者使颗粒堆受到的冲击由上至下减小,在颗粒堆表面一定深度(h_c)下,冲击衰减到零,密度不再增加而稳定不变(以下将颗粒堆中稳定的密度用 ρ 表示).图 4 是制备颗粒堆的过程中不同粒径的颗粒堆高度 h 随时间 t 变化的实验数据($D=1.60\text{ cm}$),其中直线是线性拟合线,结合图 3 的实验数据可见,颗粒堆的高度随颗粒堆质量的增加呈线性增长,这支撑了颗粒堆内部的密

度可视为均匀不变的假设.图 5 显示了制备过程中颗粒堆的密度及颗粒堆受到的冲击强度随时间的变化.对于结论 1),用大流量制备颗粒堆,由于制备时间短,碰撞对颗粒流冲击颗粒堆的能量耗散很快(既有与颗粒堆的碰撞,又有与随后流下的大量颗粒碰撞),流到颗粒堆上表面的颗粒很快静止下来,这样,颗粒堆的结构相对疏松,因此体积分数较小.相反,用小流量制备的颗粒堆,由于制备时间长,颗粒堆对颗粒流冲击的能量耗散较慢,流到颗粒堆上表面的颗粒可以在上表面上反复跳跃多次,这对颗粒堆起到拍打致密的作用,导致颗粒堆的结构相对紧密,从而体积分数较大.由于无论制备颗粒堆的时间多短,颗粒堆受到的冲击被衰减得多快,颗粒堆总会有所致密,其密度总是比颗粒堆上表面处的密度大,因此颗粒堆的密度(或体积分数)随流量的变化存在下限饱和值 ρ_d (或 η_d).相反,无论制备时间多长,冲击的能量总会耗尽而不再对颗粒堆致密,颗粒堆的密度就不会再增加而达到饱和,因此颗粒堆的密度(或体积分数)随流量的变化存在上限饱和值 ρ_u (或 η_u).对于结论 2),由于粒径 d 大则单位体积中颗粒数目少,碰撞中单位时间内能量耗散小,颗

粒堆受到的冲击被衰减得慢,因此体积分数较大.对于结论3),我们认为主要是颗粒大小的因素与瓶颈效应的共同影响,虽然在流量一定的情况下,对于粒径 d 大的颗粒堆其体积分数一般较大,但是,当 d 增加到 $(D/d$ 的比值小到)一定程度时,由于瓶颈效应^[9-12],颗粒流从漏斗出料口流出的速度相对很小^[13],这样,对颗粒堆的冲击致密的作用相应减小.由于 D/d 的比值越小,瓶颈效应越明显,因此会出现在流量 Q (或 D)一定的情况下,当粒径增加到一定程度, η_u 会反而减小的现象,在我们的实验中, $D/d < 6$ 时,有明显的瓶颈效应.对于结论4),我们认为主要是颗粒大小的因素与空气作用的共同影响,虽然在 Q 一定的情况下,粒径 d 大时体积分数一般较大,但是,当 d 小到一定程度时,用大流量制备颗粒堆,在颗粒堆快速致密过程中,颗粒堆中气体的压强波动较大,引起颗粒堆中一些疏松结构(如拱结构)坍塌,造成随着 Q 增加 η 的减小急剧变缓而趋于下饱和值,所以出现了 d 小 η_u 反而大的现象.在我们的实验中, $d < 0.06$ cm时,空气作用较明显,这与文献14的结果 $d < 0.05$ cm时空气影响不能忽略较一致.下面我们从连续性原理出发推导颗粒堆的体积分数随制备颗粒堆的流量变化的拟合关系.

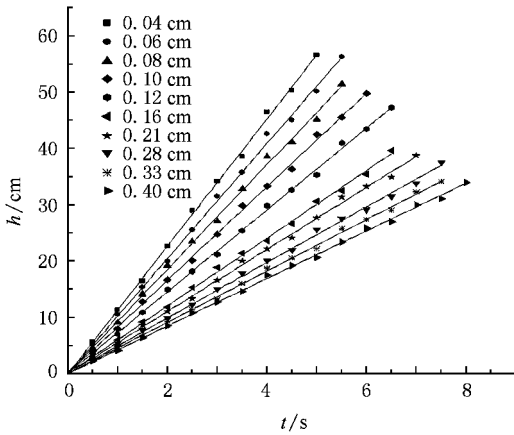


图4 制备过程中不同粒径的颗粒堆高度 h 随时间 t 的变化

在颗粒堆上部密度非稳定的区域,取一薄层小体积元,某时刻其堆积密度为 ρ_t ,在制备过程中颗粒流的冲击下,从上方流进小体积元的颗粒比从下方流出的多.根据连续性原理该体积元内的密度随时间增加,有

$$-\nabla \cdot \mathbf{J}_m = \frac{d\rho_t}{dt}, \quad (2)$$

其中 $-\nabla \cdot \mathbf{J}_m$ 表示单位时间流进单位体积的净颗粒

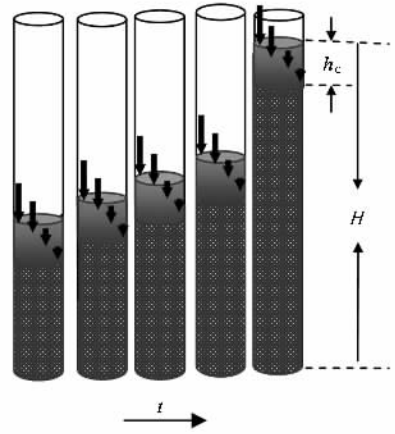


图5 颗粒堆的密度及颗粒堆受到的冲击强度随制备颗粒堆时间的变化(颜色的深浅表示密度的大小,箭头的长短表示颗粒堆受到的冲击的强弱,均匀白点表示密度均匀不变;下方向右的箭头表示时间增加的方向)

质量.另一方面由于碰撞对冲击能量的耗散,小体积元内的颗粒受到的颗粒流的冲击随时间减少.这样,小体积元的密度随时间在增加,受到的冲力又随时间在减小,因此单位时间流进单位体积的净颗粒质量一定随时间减少,也就是随密度增加而减小,假设单位时间流进单位体积的净颗粒质量随密度增加而线性减少,考虑到密度不会超过上饱和值 ρ_u ,将线性关系写成 $-\nabla \cdot \mathbf{J}_m$ 与 $\rho_u - \rho_t$ 成正比,即

$$-\nabla \cdot \mathbf{J}_m = \lambda(\rho_u - \rho_t), \quad (3)$$

其中 λ 是比例系数,且 $\lambda > 0$.将(3)代入(2)有

$$\frac{d\rho_t}{\rho_u - \rho_t} = \lambda dt. \quad (4)$$

对上式两边积分,时间的积分限从小体积元位于颗粒堆表面时的0时刻到其密度稳定不变时的 t_c 时刻,对应的密度积分限从 ρ_d 到 ρ ,得

$$\rho = \rho_u - (\rho_u - \rho_d)e^{-\lambda t_c}. \quad (5)$$

实验中保证了制备颗粒堆的流量 Q 不随时间变化,总颗粒质量 M 相等,这样在制备颗粒堆的过程中使小体积元的密度由 ρ_u 到 ρ 的时间 t_c 与制备颗粒堆的总时间 T 成正比,设比例系数为 C ,于是有

$$\rho = \rho_u - (\rho_u - \rho_d)e^{-\frac{\beta}{C}}, \quad (6)$$

其中 $\beta = C\lambda M$,将上式两边除以颗粒材料密度得颗粒堆体积分数与流量的关系

$$\eta = \eta_u - (\eta_u - \eta_d)e^{-\frac{\beta}{C}}, \quad (7)$$

上式与实验数据的拟合公式完全相同.将表1中的

体积分数的上限和下限饱和的拟合值 η_u 和 η_d 与实验值 η_u 和 η_d 进行比较可见,对于粒径 $d < 0.08$ cm 的颗粒堆,体积分数的上限和下限饱和的拟合值与实验值都吻合较好;对于粒径 $d > 0.06$ cm 的颗粒堆,体积分数的上限饱和的拟合值与实验值吻合较好,但体积分数的下限饱和的拟合值与实验值相差偏大.我们认为,由于拟合公式是在假设一定深度下颗粒介质连续均匀分布的条件下推出的,对于粒径 $d > 0.06$ cm 的颗粒堆,将颗粒介质视为连续均匀介质还不够精细,这导致了拟合值与实验值比较的结果相差偏大.

4. 结 论

颗粒物质的独特性质之一是颗粒物质的行为与它形成历史有关,我们通过实验探讨了颗粒堆的体积分数与制备过程中颗粒流流量的关系,结果发现,颗粒堆的体积分数随制备流量的增加指数衰减,减小和增加流量到一定程度时,体积分数都达到饱

和;颗粒粒径小到一临界值时,体积分数随颗粒堆流量的增加减小明显变慢;出料口直径与颗粒粒径的比值小到一临界值时,体积分数随颗粒堆流量的减少增加明显变慢.我们认为颗粒流对颗粒堆的冲击以及颗粒堆的强耗散性对颗粒流冲击的衰减共同作用决定了颗粒堆的疏松程度,对于颗粒粒径以及出料口直径与颗粒粒径的比值小到一定值时的临界现象分别是由于空气的作用和瓶颈效应的影响.我们从连续性方程出发推出的 η 随 Q 变化的函数与实验数据的拟合公式完全相同.颗粒物质广泛存在于自然界中,研究颗粒物质结构受其形成历史的影响有着重要的实际意义,如地震引起的堰塞湖决堤问题,堰塞湖的堤坝就是山体滑坡过程中形成的颗粒堆,地震的等级高低决定了山体滑坡流量的大小,影响了堰塞湖堤坝的疏松程度(或体积分数).地震等级越高,山体滑坡流速越快,堰塞湖堤坝越疏松,决堤的可能性越大,越有必要采取措施以减少对人类的威胁,颗粒物质的结构与制备流量关系的研究对防止自然灾害起着积极的指导作用.

-
- [1] Vanel L, Howell D, Clark D 1999 *Phys. Rev. E* **60** 5040
 - [2] Vanel L, Clement E 1999 *Eur. Phys. J. B* **11** 525
 - [3] Lu K Q, Liu J X 2004 *Physics* **33** 625 (in Chinese) [陆坤权、刘寄星 2004 物理 **33** 625]
 - [4] Hou M Y, Peng Z, Liu R, Wu Y, Tian Y, Lu K, Chan C K 2005 *Sci. Techn. Adv. Mater.* **6** 855
 - [5] Duran J 2000 *Sand, Powder, and Grains* (New York: Springer) 70 - 90
 - [6] Kong W S, Hu L, Zhang X G 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 2318 (in Chinese) [孔维姝、胡林、张兴刚 2007 物理学报 **56** 2318]
 - [7] Hu M B, Kong X Z, Wu Q S, Wu Y H 2005 *Chin. Phys.* **14** 1844
 - [8] Peng Z, Li X Q, Jiang L, Fu L P, Jiang Y M 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 2090 (in Chinese) [彭政、李湘群、蒋礼、符力平、蒋亦民 2009 物理学报 **58** 2090]
 - [9] Hou M Y, Chen W, Zhang T, Lu K Q 2004 *Physics* **33** 473 (in Chinese) [厚美瑛、陈唯、张彤、陆坤权 2004 物理 **33** 473]
 - [10] Bao D S, Zhang X S, Xu G L 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 401 (in Chinese) [鲍德松、张训生、徐光磊 2003 物理学报 **52** 401]
 - [11] Bao D S, Zhou Y, Zhang X S, Tang X W 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 798 (in Chinese) [鲍德松、周英、张训生、唐孝威 2005 物理学报 **54** 401]
 - [12] Bao D S, Lei Z M, Hu G Q, Zhang X S, Tang X W 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 5922 (in Chinese) [鲍德松、雷哲敏、胡国琦、张训生、唐孝威 2007 物理学报 **56** 5922]
 - [13] Kiwing To, Pik Y L, Pak H K 2001 *Phys. Rev. Lett.* **86** 71
 - [14] Yan X Q, Shi Q P, Hou M Y 2003 *Physics* **32** 748 (in Chinese) [阎学群、史庆藩、厚美瑛 2003 物理 **32** 748]

Experimental study on relation between volume fraction of sandpiles and flow rate of forming sandpiles^{*}

Kong Wei-Shu[†] Hu Lin Zhang Xing-Gang Yue Guo-Lian

(Key Laboratory for Photoelectric Technology and Application of Guizhou Province , School , Guizhou University , Guiyang 550025 , China)

(Received 20 February 2009 ; revised manuscript received 7 May 2009)

Abstract

The function of volume fraction η versus flow rate Q was determined. It is found that η decreases exponentially with increase of Q . The volume fraction η will reach saturation when Q is reduced or increased to certain extent. The increase of η slows down rapidly with decrease of Q when D/d decreases to a critical value. The decrease of η slows rapidly with increase of Q when d decreases to a critical size. The phenomenon is explained by the dissipation of granules , effect of air , effect of bottleneck and collision theory. Theoretical result about η - Q is in agreement with the experimental result.

Keywords : granular matter , flow rate , volume fraction

PACC : 4630P , 4610 , 8220M

^{*} Project supported by the Foundation of Guizhou Province (Grant No. 20072003) , the International Collaborative Project (Grant No. 2007-400112) , the Province Governor Foundation of Guizhou Province (Grant No. 2006-15) , the Organizational Department Foundation on the Excellent Talents (Grant No. 2006008) .

[†] Corresponding author. E-mail : kongweishu@126.com