

克尔-纽曼-反德西特黑洞的有效热力学性质^{*}

魏益焕[†]

(渤海大学物理系, 锦州 121000)

(2009 年 9 月 22 日收到; 2010 年 1 月 14 日收到修改稿)

首先分析 Reissner-Nordström-反 de Sitter 黑洞的有效左系统和右系统的热力学性质, 然后分析更一般的克尔-纽曼-反德西特 (KN-AdS) 黑洞的情况, 计算其相应的左系统和右系统的有效热力学量. 在极限情况下, KN-AdS 黑洞的有效热力学右系统满足能斯特定理, 但有效左系统是一个有限温度系统.

关键词: 克尔-纽曼-反德西特黑洞, 有效系统, 极限情况, 能斯特定理

PACC: 9760L, 0420

1. 引 言

黑洞是热力学系统, 它满足热力学的四条定律^[1-4]. 黑洞的熵正比于视界面积, 温度正比于视界表面引力. 黑洞的热力学性质 (如黑洞的霍金辐射等) 已经得到广泛研究^[5-11]. 对于带有两个视界的黑洞 (如旋转带电的克尔-纽曼 (KN) 黑洞等), 热力学第一定律和 Smarr 关系既可按照定义在外视界上的热力学量来描述, 也可按照定义在内视界上的热力学量来描述^[12-16]. 为了满足 Smarr 关系, 内视界的温度和熵的积应当取负值^[12,13]. 因此, 对于内视界可选择正温度和负熵或负温度和正熵. 为了确定内视界温度的符号, 我们建议黑洞质量 (作为熵和其他热力学广延量的函数) 应满足下面的两个限制条件: 第一, 当外视界熵被内视界熵代替后黑洞质量表达式仍有意义; 第二, 外视界的熵被替换后其质量的数学形式仍保持不变^[17]. 这两个限制条件是指内视界的温度应取为负值. 一个负的黑洞内视界温度是物理上可接受的^[18,19], 它仅仅指随着内视界熵的增加黑洞能量减少的过程. 文献[20]已经研究了 KN 黑洞的有效热力学第一定律, 结果显示左系统和右系统具有相当不同的热力学性质. 对于带有两个视界的黑洞, 文献[21]已经导出了有效的黑洞热力学第一定律并给出了左温度和右温度以及构造其他有效热力学量的组合系统.

文献[22]系统地研究了克尔-纽曼-反德西特 (Kerr-Newman-anti de Sitter, 简记为 KN-AdS) 黑洞的热力学性质. 通常人们仅仅注意到黑洞外视界的热力学性质, 而内视界的存在能影响黑洞的整体热力学性质, 因此综合地考虑内视界和外视界的热力学性质是必要的. 本文将讨论 KN-AdS 黑洞的有效热力学系统的性质, 计算有效热力学量. 结果表明, KN-AdS 黑洞的有效右系统有零熵零温极限, 即满足能斯特定理, 而有效左系统为有限温度的热力学系统.

2. KN-AdS 黑洞的有效热力学系统

下面将计算 AdS 黑洞的有效热力学量, 讨论 AdS 黑洞的有效热力学系统的特性. 首先, 考虑 Reissner-Nordström-反 de Sitter (RN-AdS) 黑洞的情况. RN-AdS 黑洞内外视界的熵、温度和电势分别为

$$S_{\pm} = \pi r_{\pm}^2, \quad (1)$$

$$T_{\pm} = \frac{r_{\pm} - r_{\mp}}{4\pi r_{\pm}^2} \left[1 + \frac{(r_{+} + r_{-})^2 + 2r_{\pm}^2}{l^2} \right], \quad (2)$$

$$\Phi_{\pm} = \frac{Q}{r_{\pm}}. \quad (3)$$

这里 r_{+} 和 r_{-} 分别表示黑洞内视界和外视界的半径. 利用计算式^[21]

$$S_{R,L} = S_{+} + \lambda_{R,L} S_{-}, \quad (4)$$

$$T_{R,L}^{-1} = T_{+}^{-1} + \lambda_{R,L} T_{-}^{-1}, \quad (5)$$

可得到 RN-AdS 黑洞的有效左右熵和温度

^{*} 辽宁省教育厅科研基金 (批准号: 2009A036) 资助的课题.

[†] E-mail: weiyihuan@263.net

$$S_{\text{R,L}} = \pi(r_+^2 + \lambda_{\text{R,L}} r_-^2), \quad (6)$$

$$T_{\text{R,L}} = \frac{r_+ - r_-}{4\pi} \times \frac{\left[1 + \frac{(r_+ + r_-)^2 + 2r_+^2}{l^2}\right] \left[1 + \frac{(r_+ + r_-)^2 + 2r_-^2}{l^2}\right]}{(r_+^2 - \lambda_{\text{R,L}} r_-^2) \left[1 + \frac{(r_+ + r_-)^2}{l^2}\right] + \frac{2r_+^2 r_-^2 (1 - \lambda_{\text{R,L}})}{l^2}}. \quad (7)$$

这里 $\lambda_{\text{R}} = -1, \lambda_{\text{L}} = +1$. 对于带有两个视界的带电黑洞,有效左右电势可通过下式计算:

$$\Phi_{\text{R,L}} = Q \frac{(r_+ - \lambda_{\text{R,L}} r_-) \left[1 + \frac{(r_+ + r_-)^2}{l^2}\right] + \frac{2r_+^2 r_-^2}{l^2} \left(\frac{1}{r_+} - \lambda_{\text{R,L}} \frac{1}{r_-}\right)}{(r_+^2 - \lambda_{\text{R,L}} r_-^2) \left[1 + \frac{(r_+ + r_-)^2}{l^2}\right] + \frac{2r_+^2 r_-^2 (1 - \lambda_{\text{R,L}})}{l^2}}. \quad (10)$$

从有效左右温度的表达式(7)可以看到,在极限情况下 RN-AdS 黑洞的有效右温度趋近于零,有效左温度趋于一个非零的有限值.

接着,我们考虑 KN-AdS 黑洞的情况. KN-AdS 黑洞的内视界和外视界半径由下式确定:

$$(r_{\pm}^2 + a^2) \left(1 - \frac{1}{3} \Lambda r_{\pm}^2\right) - 2mr_{\pm} + q^2 = 0. \quad (11)$$

这里 Λ 是宇宙常数,满足 $\Lambda = -\frac{3}{l^2}$, 其中 l 为宇宙半径; m, q 和 a 分别为黑洞的质量参数、电荷参数和单位质量的角动量. 我们采用下列黑洞质量和电荷:

$$M = \frac{m}{\Xi^2}, \quad (12)$$

$$Q = \frac{q}{\Xi},$$

$$M = \frac{R}{\Xi^2} \left(1 + \frac{a^2 + 2R^2}{l^2} + \frac{\epsilon^2}{2l^2}\right), \quad (15)$$

$$Q = \frac{R}{\Xi} \sqrt{1 + \frac{a^2 + 3R^2}{l^2} - \frac{a^2}{R^2} - \left(1 + \frac{a^2 + 2R^2}{l^2}\right) \frac{\epsilon^2}{4R^2} - \frac{\epsilon^4}{16l^2 R^2}}. \quad (16)$$

利用 $S_{\pm}, Q, l, J$, KN-AdS 黑洞的质量可表示为

$$M^2 = \frac{S_{\pm}}{4\pi} + \frac{\pi}{4S_{\pm}} (4J^2 + Q^4) + \frac{Q^2}{2} + \frac{J^2}{l^2} + \frac{S_{\pm}}{2\pi l^2} \left(Q^2 + \frac{S_{\pm}}{\pi} + \frac{S_{\pm}^2}{2\pi^2 l^2}\right), \quad (17)$$

其中角动量 $J = Ma$, 内外视界的熵皆采取为正熵

$$\Phi_{\text{R,L}} = \chi_{\text{R,L}} \Phi_+ + (1 - \chi_{\text{R,L}}) \Phi_-. \quad (8)$$

这里组合数 χ 可表示为^[21]

$$\chi_{\text{R,L}} = \frac{T_+^{-1}}{T_+^{-1} + \lambda_{\text{R,L}} T_-^{-1}} = \frac{r_+^2 \left[1 + \frac{(r_+ + r_-)^2 + 2r_-^2}{l^2}\right]}{(r_+^2 - \lambda_{\text{R,L}} r_-^2) \left[1 + \frac{(r_+ + r_-)^2}{l^2}\right] + \frac{2r_+^2 r_-^2 (1 - \lambda_{\text{R,L}})}{l^2}}. \quad (9)$$

利用(8)式可得到 RN-AdS 黑洞的有效左右电势,即

其中 $\Xi = 1 - \frac{a^2}{l^2}$. 由(11)式可得 KN-AdS 黑洞的质量和电荷分别为

$$M = \frac{(r_+ + r_-)}{2\Xi^2} \left(1 + \frac{a^2 + r_+^2 + r_-^2}{l^2}\right), \quad (13)$$

$$Q = \frac{1}{\Xi} \sqrt{r_+ r_- \left(1 + \frac{a^2 + r_+^2 + r_-^2 + r_+ r_-}{l^2}\right) - a^2}. \quad (14)$$

对于 KN-AdS 黑洞,大黑洞和小黑洞极限分别对应到 $r_+ \simeq l$ 和 $r_+ \ll l$ 两种情况. 在极限情况下,通过 $r_{\pm}$

$= R \pm \frac{\epsilon}{2}$ 引入变量 R 和 ϵ , 其中 $\epsilon \ll R$. 这样可将 KN-

AdS 黑洞的质量和电荷近似地表示为

$$S_{\pm} = \frac{\pi(r_{\pm}^2 + a^2)}{\Xi}. \quad (18)$$

对于外视界的情形, (17) 式与文献[22]中 KN-AdS 黑洞的质量表达式(41)相对应. 从(17)式出发,通过对质量微分得到

$$dM = T_{\pm} dS_{\pm} + \Phi_{\pm} dQ + \Omega_{\pm} dJ + \Theta_{\pm} dl, \quad (19)$$

其中

$$T_{\pm} = \frac{1}{8\pi M} \left[1 - \frac{\pi^2}{S_{\pm}^2} (4J^2 + Q^4) + \frac{2}{l^2} \left(Q^2 + \frac{2S_{\pm}}{\pi} \right) + \frac{3S_{\pm}^2}{\pi^2 l^4} \right], \quad (20)$$

$$\Omega_{\pm} = \frac{\pi J}{MS_{\pm}} \left(1 + \frac{S_{\pm}}{\pi l^2} \right), \quad (21)$$

$$\Phi_{\pm} = \frac{\pi Q}{2MS_{\pm}} \left(Q^2 + \frac{S_{\pm}}{\pi} + \frac{S_{\pm}^2}{\pi^2 l^2} \right), \quad (22)$$

$$\Theta_{\pm} = -\frac{3}{Ml^3} \left[\frac{1}{3} J^2 + \frac{S_{\pm}}{6\pi} \left(Q^2 + \frac{S_{\pm}}{\pi} \right) + \frac{S_{\pm}^3}{6\pi^3 l^2} \right]. \quad (23)$$

这里 $T_{\pm}, \Omega_{\pm}, \Phi_{\pm}$ 以及 $\Theta_{\pm}$ 分别是 KN-AdS 黑洞内外视界的温度、角速度、电势以及和宇宙半径 l 相联系的广义力. 对于 (19) — (23) 式取正号的情况, 即与文献 [22] 中 (43) — (46) 式相对应.

利用 $r_{\pm}, a, Q, \Xi$, 黑洞的温度、角速度、电势以及和宇宙半径 l 相联系的广义力可分别表示为

$$T_{\pm} = \frac{r_{\pm} - r_{\mp}}{4\pi(r_{\pm}^2 + a^2)} \left(1 + \frac{a^2 + (r_{+} + r_{-})^2 + 2r_{\pm}^2}{l^2} \right), \quad (24)$$

$$\Omega_{\pm} = \frac{a(1 + r_{\pm}^2/l^2)}{r_{\pm}^2 + a^2}, \quad (25)$$

$$\Phi_{\pm} = \frac{\Xi Q r_{\pm}}{r_{\pm}^2 + a^2}, \quad (26)$$

$$\Theta_{\pm} = \frac{a^4(r_{\pm} - r_{\mp}) + a^2[r_{\pm}^3 - r_{\mp}^2 r_{\mp} - r_{\pm} r_{\mp}^2 - r_{\mp}^3 - l^2(3r_{\pm} + r_{\mp})] - 2l^2 r_{\pm}^3}{2l(l^2 - a^2)^2}. \quad (27)$$

对于近极端的 KN-AdS 黑洞, 内视界和外视界的温度、角速度、电势以及广义力近似地取为

$$T_{\pm}^{(e)} = \pm \frac{\epsilon}{4\pi(R^2 + a^2)} \left[\frac{l^2 + a^2 + 6R^2}{l^2} \pm \left(2 - \frac{l^2 + a^2 + 6R^2}{R^2 + a^2} \right) \frac{R\epsilon}{l^2} \right] + O(\epsilon^3), \quad (28)$$

$$\Omega_{\pm}^{(e)} = \frac{a(1 + R^2/l^2)}{R^2 + a^2} \pm \frac{aR(a^2 - l^2)\epsilon}{l^2(R^2 + a^2)^2} + O(\epsilon^2), \quad (29)$$

$$\Phi_{\pm}^{(e)} = \frac{\Xi QR}{R^2 + a^2} \pm \frac{\Xi Q(a^2 - R^2)\epsilon}{2(R^2 + a^2)^2} + O(\epsilon^2), \quad (30)$$

$$\Theta_{\pm}^{(e)} = \frac{a^2(R^3 + 2l^2 R) + l^2 R^3}{l(l^2 - a^2)^2} \pm \frac{l^2(a^2 + 3R^2) - a^4 - 3a^2 R^2}{2l(l^2 - a^2)^2} \epsilon + O(\epsilon^2), \quad (31)$$

其中上标 e 表示“近极端黑洞”. 在接近极端黑洞的情况下, 内视界和外视界的角速度、电势和广义力都近似相等, 但内视界和外视界的温度的主要项仍取相反的符号.

从 (28) 式出发, 得到的组合系数 $\chi_{R,L}$ 为

$$\chi_R = \frac{1}{2} + O(\epsilon), \quad (32)$$

$$\chi_L = \frac{(R^2 + a^2)(l^2 + a^2 + 6R^2)}{2R(l^2 - a^2 + 4R^2)\epsilon} + \frac{1}{2} + O(\epsilon). \quad (33)$$

利用

$$Y_{R,L}^{(i)} = \chi_{R,L} Y_{+}^{(i)} + (1 - \chi_{R,L}) Y_{-}^{(i)}, \quad (34)$$

能够获得左右角速度、电势和广义力. 这里 $Y_{(i)} = \Omega, \Phi, \Theta$. 由于我们将重点探讨近极端黑洞的左右温度和熵的变化, 故左右角速度、电势和广义力的具体表达式在此从略.

按照 (5) 式, KN-AdS 黑洞的有效左右温度为

$$T_R = \frac{(l^2 + a^2 + 6R^2)\epsilon}{8\pi l^2(R^2 + a^2)} + O(\epsilon^2), \quad (35)$$

$$T_L = \frac{(l^2 + a^2 + 6R^2)^2}{8\pi l^2 R(l^2 - a^2 + 4R^2)} + O(\epsilon). \quad (36)$$

温度表达式 (35) 和 (36) 表明, 在接近极端黑洞的情况下右温度趋于零而左温度趋于一个有限值. 容易看出, KN-AdS 黑洞的有效左右熵为

$$S_R = \frac{2\pi R\epsilon}{\Xi} + O(\epsilon^2), \quad (37)$$

$$S_L = \frac{2\pi R^2}{\Xi} + O(\epsilon). \quad (38)$$

接近极端黑洞的情况下, KN-AdS 黑洞的热力学性质可由左系统和右系统在接近极端情况下的近似热力学性质来描述. 右系统的熵和温度接近于零;

左系统的熵趋于外视界或内视界熵的两倍,温度趋于一个有限值.

3. 讨 论

我们分析了 KN-AdS 黑洞有效热力学性质. 从 KN-AdS 黑洞的质量表达式 $M(S_{\pm}, Q, J, l)$, 导出了内视界和外视界的温度、电势、角速度以及和 AdS 宇宙半径 l 相联系的广义力 $\Theta_{\pm}$, 并给出了极限情况下的形式. 为了分析近极端情况下 KN-AdS 黑洞的热力学性质, 我们着重考虑了黑洞的左右温度和左右熵.

在弦理论中, 黑洞视界由左运动模和右运动模组成^[23—29]. 带有两个视界黑洞的左系统和右系统能够类似于由弦黑洞的左模和右模所组成的系统^[20]. 我们也指出, 如果考虑 KN-AdS 黑洞的总熵作为内、外视界熵之和, 即考虑所谓的左系统, 则在极限情况下熵和温度分别趋于双倍外视界 (或内视界) 的

熵和一个有限温度. 这似乎不关系到能斯特定理. 因此, 对于黑洞仅仅是它的右系统能够满足能斯特定理.

4. 结 论

对于热力学第三定律, 有两种不同的表述^[30], 即绝对零度不可达和能斯特定理. 在黑洞热力学中, 热力学第三定律可表述为不能通过有限次操作将视界温度降低到绝对零度, 但黑洞 (作为热力学系统) 是否满足能斯特定理仍是一个有待研究的问题^[31—33]. 从 (35) 和 (37) 式能够看到, 在极限情况下 KN-AdS 黑洞的右系统的温度和熵都趋近于零. 这是指对于 KN-AdS 黑洞的右系统, 随右温度趋近于零其右熵也趋于零. 由此, 我们可得出如下结论: KN-AdS 黑洞的右系统满足能斯特定理. 这与文献 [34—36] 中的结论一致.

-
- [1] Hawking S W 1972 *Commun. Math. Phys.* **25** 152
 - [2] Hawking S W 1975 *Commun. Math. Phys.* **43** 199
 - [3] Bardeen J M, Carter B, Hawking S W 1973 *Commun. Math. Phys.* **31** 161
 - [4] Smarr L 1973 *Phys. Rev. Lett.* **30** 71
 - [5] Ren J, Cao J L, Zhao Z Q 2006 *Chin. Phys. B* **15** 2256
 - [6] Han Y W, Bao Z Q, Hong Y 2009 *Chin. Phys. B* **18** 62
 - [7] Zhang J Y, Fan J H 2007 *Chin. Phys. B* **16** 3879
 - [8] Lin K, Yang S Z 2009 *Chin. Phys. B* **18** 2154
 - [9] He T M, Fan J H, Wang Y J 2008 *Chin. Phys. B* **17** 2321
 - [10] Ren J 2008 *Chin. Phys. Lett.* **25** 1579
 - [11] Ma Z Z 2008 *Phys. Lett. B* **666** 376
 - [12] Zhao Z, Zhu J Y, Liu W B 1999 *Chin. Phys. Lett.* **16** 698
 - [13] Zhao Z 1999 *Int. J. Theor. Phys.* **38** 1539
 - [14] Wu S Q, Cai X 2000 *IL Nuovo Cimento B* **115** 143
 - [15] Wu S Q, Cai X 2000 *Int. J. Theor. Phys.* **39** 2215
 - [16] Allemandi G, Fatibene L, Francaviglia M 2001 *Gen. Rel. Grav.* **33** 1371
 - [17] Wei Y H 2009 *Phys. Lett. B* **672** 98
 - [18] Park M I 2008 *Phys. Lett. B* **663** 259
 - [19] Park M I 2007 *Phys. Lett. B* **647** 472
 - [20] Wu S Q 2005 *Phys. Lett. B* **608** 251
 - [21] Wei Y H 2009 *Chin. Phys. B* **18** 821
 - [22] Caldarelli M M, Cognola G, Klemm D 2000 *Class. Quant. Grav.* **17** 399
 - [23] Cvetič M, Larsen F 1997 *Nucl. Phys. B* **506** 107
 - [24] Horowitz G T, Lowe D A, Maldacena J M 1996 *Phys. Rev. Lett.* **77** 430
 - [25] Gubser S S, Klebanov I R 1996 *Phys. Rev. Lett.* **77** 4491
 - [26] Cvetič M, Larsen F 1998 *Phys. Rev. D* **57** 6297
 - [27] Maldacena J, Strominger A 1997 *Phys. Rev. D* **55** 861
 - [28] Horowitz G T, Polchinski J 1997 *Phys. Rev. D* **55** 6189
 - [29] Larsen F 1997 *Phys. Rev. D* **56** 1005
 - [30] Wald R M 1997 *Phys. Rev. D* **56** 6467
 - [31] Belgiorno F, Martellini M 2004 *Int. J. Mod. Phys. D* **13** 739
 - [32] Medved A J M, Kunstatter G 2001 *Phys. Rev. D* **63** 104005
 - [33] Wang B, Su R K, Yu P K N, Young E C M 1998 *Phys. Rev. D* **57** 5284
 - [34] Zhao Z, Zhu J Y 1999 *Acta Phys. Sin.* **48** 1558 (in Chinese)
[赵 峥, 朱建阳 1999 物理学报 **48** 1558]
 - [35] Zhao R, Zhang L C 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 1015 (in Chinese)
[赵 仁, 张丽春 2001 物理学报 **50** 1015]
 - [36] Zhang L C, Zhao R 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 362 (in Chinese)
[张丽春, 赵 仁 2004 物理学报 **53** 362]

Effective thermodynamic properties of Kerr-Newman-anti-de Sitter black hole^{*}

Wei Yi-Huan[†]

(*Department of Physics, Bohai University, Jinzhou 121000, China*)

(Received 22 September 2009; revised manuscript received 14 January 2010)

Abstract

We study thermodynamic properties of the effective right and left systems of Reissner-Nordström-anti-de Sitter black hole. Then, we analyze the case of Kerr-Newman-anti-de Sitter (KN-AdS) black hole and calculate the corresponding thermodynamic quantities of the right and the left systems. For the nearly extremal case, it can be seen that the effective right system of KN-AdS black hole satisfies the Nernst theorem and the effective left system has a finite temperature.

Keywords: Kerr-Newman-anti-de Sitter black hole, effective systems, extremal case, Nernst theorem

PACC: 9760L, 0420

^{*} Project supported by the Scientific Research Foundation of the Education Bureau of Liaoning Province, China (Grant No. 2009A036).

[†] E-mail: weiyihuan@263.net