

正压 Rossby 波扰动能量^{*}

张 亮^{1,2)†} 张立凤¹⁾ 吴海燕³⁾ 李 刚¹⁾

1) 解放军理工大学气象学院应用地球物理研究室, 南京 211101)

2) 96165 部队 乐平 333300)

3) 94855 部队 衢州 324001)

(2009 年 2 月 12 日收到 2009 年 3 月 23 日收到修改稿)

利用 Fourier 变换方法, 研究准地转近似下 beta 平面上绝热、无摩擦、无强迫耗散的正压大气 Rossby 波扰动能量在有限时段内的快速发展和衰减情形, 给出线性正压位势涡度方程扰动流函数的解析解, 并进一步分析扰动能量与东西波数、南北波数、基流切变和黏性系数之间的关系。

关键词: Rossby 波, 初值问题, Fourier 变换, 扰动能量

PACC: 0340G, 0420J, 1140

1. 引 言

有限时段内大气 Rossby 波扰动能量的快速发展和衰减问题属于地球流体动力学稳定性研究范畴。由 Charney^[1], Eady^[2], 和 Kuo^[3] 等奠基的斜压和正压不稳定理论是地球流体动力学的里程碑。这些理论主要研究的天气系统, 如寒潮发生发展的物理机理和大尺度大气环流存在和维持的原因, 因此它具有十分重要的理论意义和应用价值。

20 世纪 80 年代以前主要是线性不稳定理论, 采用的方法是经典的标准模或正正规模 (normal mode) 方法 (Lin^[4]; Dickinson^[5]; Gilman^[6]; Lorenz^[7]; Duffy^[8]; Geisler 等^[9]; Warn^[10]; Hoskins 等^[11]; Verdiere 等^[12]; Matano 等^[13])。这种方法直到现在仍然经常被用于研究许多大气动力学的问题, 但它也有局限性 (Zhang 等^[14]), 其中需要注意的几个问题是

1) 标准模方法忽略了扰动和基流之间的相互作用, 它仅适用于扰动发展的初始阶段, 仅处理扰动为单波形式的无穷小扰动的情形, 不能用于讨论有限振幅的扰动问题。

2) 大气运动方程的解是否一定都能取标准模的形式, 即对于流体运动, 特征波动表示的基函数是否完备, 这还是一个问题。早在 1907 年 Orr^[15] 关于平面 Couette 流的研究就指出: 这种流体运动不存在标准

模解。到 60 年代, Eliassen^[16], Holland^[17] 和 Case^[18] 从数学上更加严格地研究了一些流体力学方程解的完备性问题, 他们得出: 标准模扰动只是流体运动中可能存在的扰动的一部分, 只有补充上连续谱才构成描述所有可能扰动的完备系统。正压无穷 beta 平面准地转扰动方程的解就不具备特征波动的形式 (Yamagata^[19]; Farrell^[20]; Tung^[21])。由于连续谱的存在性和重要性, 人们越来越认识到此方法有一定的局限性, 因此在讨论线性化方程的初值问题时, 必须要补充连续谱或用其它方法, 如 Laplace 变换、Fourier 变换等。Clark^[22] 用 Laplace 变换讨论了层结大气中绝热、无黏、准地转的 beta 平面上温度扰动和垂直速度情形。

3) 标准模方法的前提是假设方程解随时间呈指数增长或衰减, 但它不是扰动演变可采取的唯一形式, 扰动的解也可以随时间呈代数幂的增长或衰减, 可是呈指数增长的解的增长率快于任何代数幂解的增长率, 因此标准模的增长是一种最优的增长。

4) 不能用标准模方法讨论扰动的初始场对扰动生成和发展的影响, 因为这种方法已将一个控制方程组的初边值问题转化为一个边值问题了。事实上, 讨论有限时段内扰动的生成、发展和衰减, 初始场的结构起到关键的作用, 这一点可从本文的第四部分看出。

弱非线性不稳定理论主要包括的方法有

* 国家重点基础研究发展计划项目(批准号: 2007CB411800, 2004CB418304)资助的课题。

† E-mail: zl_0617@163.com

WKB 方法^[23]、多尺度展开法^[24]、中心流形法、振幅展开法和低阶谱方法^[25]。Fujimura^[26]证明了多重尺度展开法与中心流行方法和振幅展开法是等价的。

和线性理论相比,弱非线性理论去掉了小扰动的限制,适用于不太大的有限振幅扰动,由于考虑了非线性相互作用,因此利用弱非线性理论可以讨论扰动和基流之间的相互作用。但是弱非线性理论也有其自身的缺陷:一般情况下,它仅能考虑弱的超临界的不稳定,它将扰动渐进展开,但这种展开的收敛范围并不知道,只能通过其他方法(如数值方法)确定;它隐含着根据初始条件实施谱截断,因此排除了不可逆的谱串级,而谱串级在一个无穷自由度系统中一般都要发生。

非线性不稳定理论主要包括 Arnold 方法^[27-31]、Serrin 能量法^[32-33]、Hamilton 不变量法^[34]、分支方法、度理论与非线性 Galerkin 截断法^[35]等。这些方法都是从整个系统的角度来讨论流体运动的非线性不稳定的,它们对于流体的演变过程一无所知,这是它们的不足之处。

过去的工作通常不考虑扰动初始条件的影响。但是,有限时段内发展的扰动其空间结构分布必然与时间密切相关,其增长与否及增长率的大小也与该扰动的初始场结构有关,与基本气流有关。因此,对于扰动在有限时段内迅速生成和猛烈发展的问题不能转化为边值问题利用特征值方法分析,而必须作为一个初值问题来考虑。利用初值问题研究扰动的生成和发展的思想过去直到现在都还很少涉及。Orl^[15]最早指出基流切变下的扰动能量快速增长问题,后来 Rosen^[36],Lu 和 Zeng^[37],Farrell^[20],Tung^[21],O'Brien^[38],Zhang 等^[39]对大气的扰动能量进行过研究。

本文利用 Fourier 变换方法,研究了准地转近似下 beta 平面上绝热、无摩擦、无强迫耗散的正压大气 Rossby 波扰动能量在有限时段内的快速发展和衰减情形,给出线性正压位势涡度方程扰动流函数的解析解,并进一步分析扰动能量与东西波数、南北波数、基流切变和黏性系数之间的关系。

2. 准地转正压位涡方程

描述准地转存在纬向基流 $U(y, t)$ 情形下的正压 Rossby 波演变方程为

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + U(y, t) \frac{\partial}{\partial x} \right) \zeta + (\beta - U_{yy}) \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

$$+ \epsilon \mathcal{J}(\psi, \zeta) - \nu \Delta \zeta = 0, \quad (1)$$

其中 $\epsilon \psi$ 是扰动流函数, $\zeta = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \psi \equiv \Delta \psi$ 表示扰动涡度与 $1/\epsilon$ 的乘积, $\mathcal{J}(A, B) = A_x B_y - A_y B_x$ 为非线性 Jacobian 算子, $\nu \geq 0$ 为 Eddy 黏性系数。方程(1)满足的初值为

$$\psi(x, y, t)|_{t=0} = A \sin(m\pi y) \cos(kx), \quad (2)$$

其中 A 为常数 表示扰动流函数的振幅, $m\pi$ 为南北方向扰动流函数的波数, k 为东西方向扰动流函数的波数, m, k 为自然数。

扰动流函数在东西方向满足周期边界条件

$$\psi(x, y, t)|_{x=0} = \psi(x, y, t)|_{x=\frac{2\pi}{k}}. \quad (3)$$

南北方向满足在边界上涡度为零^[21]即

$$\zeta(x, 0, t) = \zeta(x, 1, t) = 0. \quad (4)$$

我们感兴趣的是方程(1)中 ϵ 的取值,它是衡量扰动流函数振幅的物理量,Tung^[21]利用 Fourier 变换方法证明了在无强迫的稳定基流下,扰动流函数的振幅足够小时,方程(1)的非线性项对正压 Rossby 波扰动能量发展变化的影响可忽略不计。当 $\epsilon = 0$,且假设基流关于 y 是线性的($\partial U / \partial y = b$),则此时方程(1)可化为我们所熟识的线性正压位涡方程

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + U(y, t) \frac{\partial}{\partial x} \right) \zeta + \beta \frac{\partial \psi}{\partial x} - \nu \Delta \zeta = 0. \quad (5)$$

3. 准地转线性正压位涡方程精确解

引入坐标变换(Phillips^[40],Hartman^[41],Tung^[21])

$$\xi = x - \int_0^t U dt, \eta = y, \tau = t, \mathcal{T}(\tau) = \int_0^\tau \frac{\partial U}{\partial y} dt, \quad (6)$$

可得

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial \eta} - \mathcal{T}(\tau) \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \tau}. \quad (7)$$

则(5)式化为

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \tau} \zeta + \beta \frac{\partial}{\partial \xi} \psi \\ & - \nu \left[\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \left(\frac{\partial}{\partial \eta} - \mathcal{T}(\tau) \frac{\partial}{\partial \xi} \right)^2 \right] \zeta = 0, \end{aligned} \quad (8)$$

其中

$$\zeta = \left[\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \left(\frac{\partial}{\partial \eta} - \mathcal{T}(\tau) \frac{\partial}{\partial \xi} \right)^2 \right] \psi. \quad (9)$$

下面应用 Fourier 变换法求解(5)的扰动流函数解析表达式。因为当 $t = 0$ 时, $\xi = x, \eta = y$ 故初值

条件可写为

$$\begin{aligned}\psi_0(\xi, \eta) &= \psi(x, y, 0) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\psi}_0(K, L) \\ &\quad \times \exp[-i(K\xi + L\eta)] dK dL.\end{aligned}\quad (10)$$

对于任意时刻 $\tau > 0$, 可得

$$\begin{aligned}\psi(\xi, \eta, \tau) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\psi}(K, L, \tau) \\ &\quad \times \exp[-i(K\xi + L\eta)] dK dL.\end{aligned}\quad (11)$$

其中 $\hat{\psi}_0(K, L) = \hat{\psi}(K, L, 0)$. 将(8)式进行 Fourier 变换, 则可得如下一阶常系数微分方程:

$$\begin{aligned}\frac{d\hat{\xi}}{dt} + i\beta K [K^2 + (L - \mathcal{T}(\tau)K)^2]^{1/2} \hat{\xi} \\ + \nu [K^2 + (L - \mathcal{T}(\tau)K)^2] \hat{\xi} = 0,\end{aligned}\quad (12)$$

其中 $\hat{\xi}(K, L, \tau) = -[K^2 + (L - \mathcal{T}(\tau)K)^2]^{1/2} \hat{\psi}(K, L, \tau)$, 解方程(12)可得

$$\begin{aligned}\hat{\xi}(K, L, \tau) &= \hat{\xi}_0(K, L) \exp[i\mathcal{Q}(K, L, \tau) \\ &\quad - D(K, L, \tau)],\end{aligned}\quad (13)$$

其中

$$\mathcal{Q}(K, L, \tau) = - \int_0^\tau \frac{\beta K d\tau}{K^2 + (L - \mathcal{T}(\tau)K)^2}, \quad (14)$$

$$D(K, L, \tau) = \nu \int_0^\tau [K^2 + (L - \mathcal{T}(\tau)K)^2] dt. \quad (15)$$

若进一步假设水平切变与时间无关, 即 $\partial U / \partial t \equiv 0$, 则可得

$$\mathcal{T}(\tau) = \int_0^\tau \frac{\partial U}{\partial y} dt = b\tau, \quad (16)$$

$$\begin{aligned}\mathcal{Q}(K, L, \tau) &= -\frac{\beta}{bK} \left\{ \tan^{-1} \left(b\tau - \frac{L}{K} \right) + \tan^{-1} \left(\frac{L}{K} \right) \right\}, \\ (17)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}D(K, L, \tau) &= \frac{\nu K^2}{b} \left\{ \left[\left(b\tau - \frac{L}{K} \right) + \left(\frac{L}{K} \right) \right] \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{3} \left[\left(b\tau - \frac{L}{K} \right)^3 + \left(\frac{L}{K} \right)^3 \right] \right\}.\end{aligned}\quad (18)$$

尽管 Tung^[21] 曾给出形式如(13)式的 Fourier 变换解, 但是方程(5)的解析解需要再将(13)式进行 Fourier 逆变换. 我们知道, 若将初值(2) Fourier 变换后, 得到的 $\psi_0(\xi, \eta)$ 是一个 Dirac δ 函数, 故 $\psi(\xi, \eta, \tau)$ 也是一个 Dirac δ 函数. 利用 Mathematica 符号计算软件, 本文给出了对应于初值为(2)式的线性正压位涡方程的解析解. 若假设基流与时间无关, 即 $U(y, t) = by + c$, b, c 为常数, 则可求得方程(5)中扰动流函数的解析表达式为

$$\begin{aligned}\psi(x, y, t) &= \frac{A(k^2 + m^2 \pi^2)}{2e^{\alpha_3}} \left(\frac{\sin(\gamma + \alpha_2 y - \alpha_6)}{G \cdot e^{\alpha_4}} \right. \\ &\quad \left. - \frac{e^{\alpha_4} \sin(\gamma + \alpha_1 y + \alpha_5)}{F} \right),\end{aligned}\quad (19)$$

其中

$$\begin{aligned}F &= k^2 + \alpha_1^2, G = k^2 + \alpha_2^2, \alpha_1 = -m\pi + kbt, \\ \alpha_2 &= m\pi + kbt, \alpha_3 = t(m^2 \pi^2 + k^2(1 + b^2 t^2/3)), \\ \alpha_4 &= bkm\pi t^2 \nu, \gamma = k(ct - x), \\ \alpha_5 &= \frac{\beta}{bk} \left[\arctan \left(\frac{m\pi}{k} - bt \right) - \arctan \left(\frac{m\pi}{k} \right) \right], \\ \alpha_6 &= \frac{\beta}{bk} \left[\arctan \left(\frac{m\pi}{k} + bt \right) - \arctan \left(\frac{m\pi}{k} \right) \right].\end{aligned}$$

尽管利用正压线性位涡方程研究 Rossby 波稳定性与扰动能量的文章很多, 但作者直到现在还没有发现哪一篇文章给出对应于初始条件为(2)的正压线性位涡方程扰动流函数的解析表达式. 若将(19)式直接带入方程(5)和初边值条件(2)(3), (4), 可发现该表达式满足方程和初值以及在东西方向的边界条件, 但并不满足南北方向边界条件(4). 由于该问题属于初值问题, 而且真实的大气运动并不一定满足南北方向固壁边界条件, 所以本节仍以(19)式作为正压线性位涡方程的精确解来研究扰动流场和扰动能量的性质, 从后面的结果可以看出, 对应于(19)式的 Rossby 波扰动能量仍然能体现出在有限时段内快速增长, 然后单调衰减的性质.

4. 扰动能量

4.1. 相对能量解析表达式

若定义正压 Rossby 波的扰动能量 $E(t)$ 为

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi/k} \int_0^1 (\psi_x^2 + \psi_y^2) dx dy, \quad (20)$$

则可得当 $t = 0$ 时的初始扰动能量

$$E(0) = \frac{A^2 \pi (k^2 + m^2 \pi^2)}{4k}. \quad (21)$$

若用扰动流函数 ψ 同时乘以方程(1)两端, 利用 ψ 关于 x 方向周期变化的条件, 对方程进行积分, 并令右端项的积分常数为零(具体推导过程见附录), 则可得扰动能量随时间变化的表达式如下:

$$\begin{aligned}\frac{dE(t)}{dt} &= \int_0^{2\pi/k} \int_0^1 [U_y \psi_x \psi_y - \nu (\psi_{xx}^2 + 2\psi_{xy}^2 + \psi_{yy}^2)] dx dy \\ &\quad + \int_0^{2\pi/k} [\psi \psi_{yt} - U \psi_x \psi_y + \epsilon (\psi \psi_x (\psi_{xx} + \psi_{yy})) \\ &\quad - \nu (\psi \psi_{yy} - \psi_x \psi_{yy} - 2\psi_x \psi_{xy})] \sum_{j=0}^{k-1} dx\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \int_0^1 [\psi\psi_{xt} + \psi U(\psi_{xx} + \psi_{yy}) - \frac{1}{2}U(\psi_x^2 - \psi_y^2) \\
 & - \epsilon(\psi\psi_y(\psi_{xx} + \psi_{yy})) - \nu(\psi\psi_{xxx} - \psi_x\psi_{xx} \\
 & + 2\psi\psi_{xy})]_{x=0}^{x=2\pi/k} dy. \quad (22)
 \end{aligned}$$

由(22)式可以看出, $U_y\psi_x\psi_y$ 和 $\nu(\psi_{xx}^2 + 2\psi_{xy}^2 + \psi_{yy}^2)$ 是决定扰动能量随时间变化主要两项. 因为 $\psi_{xx}^2 + 2\psi_{xy}^2 + \psi_{yy}^2 \geq 0$, 故黏性系数 ν 对扰动能量的增长起阻尼作用, 即黏性系数越大, 扰动能量的增长越缓慢. 因为 $U_y\psi_x\psi_y$ 决定于基流的切变和扰动流函数的结构, 故只要基流切变确定, 扰动流函数的结构就决定了扰动能量能否增长.

由(21)式知, 不同的扰动流函数的波数对应着不同的扰动初始能量, 为了将扰动能量无量纲化, 定义相对能量

$$R(t) = \frac{E(t)}{E(0)} \quad (23)$$

和扰动能量增长率

$$\sigma(t) = \frac{1}{E(t)} \frac{dE(t)}{dt}. \quad (24)$$

由(19)(20)(21)式可得相对能量 $R(t)$ 的表达式如下:

$$\begin{aligned}
 R(t) = & M e^{-2\alpha_3} \{ 2m\pi(k^2 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2) \cosh(2\alpha_4) \\
 & + 4bkm^2\pi^2 t \sinh(2\alpha_4) + (k^2 + \alpha_1\alpha_2) \\
 & \times [\sin(\alpha_5 + \alpha_6) + \sin(2m\pi - \alpha_5 - \alpha_6)] \}, \quad (25)
 \end{aligned}$$

其中 $M = \frac{k^2 + m^2\pi^2}{2m\pi(k^2 + \alpha_1\alpha_2) + 4m^2k^2\pi^2}$. 因为 m 为自然数, 所以(25)式可化为

$$\begin{aligned}
 R(t) = & M e^{-2\alpha_3} [2m\pi(k^2 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2) \cosh(2\alpha_4) \\
 & + 4bkm^2\pi^2 t \sinh(2\alpha_4)]. \quad (26)
 \end{aligned}$$

由(25)式可看出, 相对能量与基流函数 $U(y) = by + c$ 中的常数 c 无关, 也就是说, 若基流是均匀的 ($U \equiv c$), 则不可能出现相对能量的快速增长现象.(26)式还表明, 相对能量也不随 β 的变化而变化.

由于(26)式是关于参数 k, m, b, t 和 ν 的强非线性表达式, 很难解析的求解出当 $\sigma(t) = 0$ 时, t 与 k, m, b 和 ν 的显式表达式, 下面应用数值方法来研究扰动能量与初始场和环境场之间的关系.

4.2. 初始场对扰动能量的影响

图1、图2分别显示了当 $k = 4, m = 4, \beta = 2.83, \nu = 0, b = 1$ 时的相对能量 $R(t)$ 和扰动能量

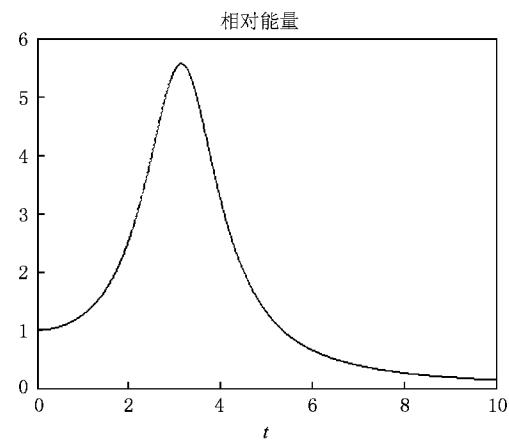


图1 相对能量随时间的变化

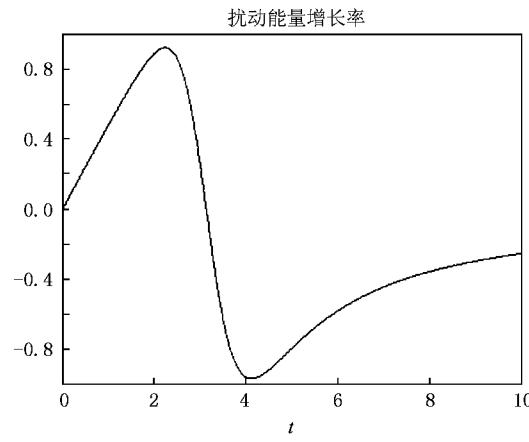


图2 扰动能量增长率随时间的变化

增长率 $\sigma(t)$ 随时间 t 的变化.

由图1、图2可以看出, 扰动能量在开始的一段时间内是单调递增的, 当其达到最大值后, 又呈现出其随时间的单调递减现象. Zhang 等^[39]用数值方法研究了当基流是非线性情形时正压 Rossby 波扰动能量的演变, 发现扰动能量存在振荡型增长和振荡型衰减的现象.

表1、表2分别给出了当 $\beta = 2.83, \nu = 0, b = 1$ 时, 对应于不同的初始流场, 相对能量的最大值 R^* 及其所对应的时间 t^* .

表1 不同初始流场分布对应的 R^*

R^*	$m = 1$	$m = 2$	$m = 3$	$m = 4$	$m = 5$	$m = 6$
$k = 4$	1.059	1.894	3.417	5.569	8.342	11.733
$k = 5$	1.004	1.469	2.427	3.798	5.569	7.738
$k = 6$	1.000	1.249	1.894	2.839	4.065	5.569

表2 不同初始流场分布对应的 t^*

t^*	$m=1$	$m=2$	$m=3$	$m=4$	$m=5$	$m=6$
$k=4$	0.617	1.544	2.347	3.138	3.925	4.711
$k=5$	0.299	1.207	1.868	2.506	3.138	3.768
$k=6$	0	0.967	1.544	2.082	2.611	3.138

由表1和表2可以看出, R^* 和 t^* 都随着 k 的增加而单调减少, 随着 m 的增加而单调增加. 值得注意的是 $k=6, m=1$ 这种情形, 因为对应于该初始场的扰动能量从 $t=0$ 时刻开始, 随着时间的增加, 相对能量是严格单调下降的, 故取得相对能量最大值的时刻为 $t=0$. 可见, 扰动流函数初始场的结构决定了扰动能量能否发展. 容易发展的流场对应的初值条件应该是东西方向波数少, 且南北方向波数多的扰动; 反之, 不容易发展的流场对应的初值条件应该是东西方向波数多, 且南北方向波数少的扰动.

定义一个新的时间变量

$$\tau = \frac{kbt}{m\pi}. \quad (27)$$

当 $\beta=0, \nu=0$ 时, 方程(5)即是著名的 Couette 流. Farrell^[20]认为, Couette 流中扰动能量达到最大值时对应的时间是 $\tau=1$, 为了检验此结论是否合理, 表3给出了不同初始流场分布下当 $\beta=0, \nu=0, b=1$ 时 τ 的数值.

由表3知, Farrell 的结论是不合理的. 正是由于(26)式的复杂性, 我们直到现在还不能解析地给出扰动能量达到最大值时对应的时间 t^* 与其他几个参数的显式表达式.

表3 不同初始流场分布下 Couette 流扰动能量最大时 τ 的数值

τ	$m=1$	$m=2$	$m=3$	$m=4$	$m=5$	$m=6$
$k=4$	0.786	0.983	0.996	0.999	1.0	1.0
$k=5$	0.476	0.961	0.991	0.997	0.999	1.0
$k=6$	0	0.923	0.983	0.994	0.997	0.999

4.3. 环境场对扰动能量的影响

以 $k=4, m=4$ 为例, 研究扰动能量与基流切变 b 和黏性系数 ν 之间的关系(对于扰动能量能够发展的其他形式的初值条件, 结论是一致的). 图3显示了当 $\beta=2.83, \nu=0$ 时, 不同的基流切变 b 所对应的相对能量 $R(t)$ 随时间的变化, 图4显示了当 $\beta=2.83, b=1$ 时, 不同的黏性系数 ν 所对应的相对能量 $R(t)$ 随时间的变化.

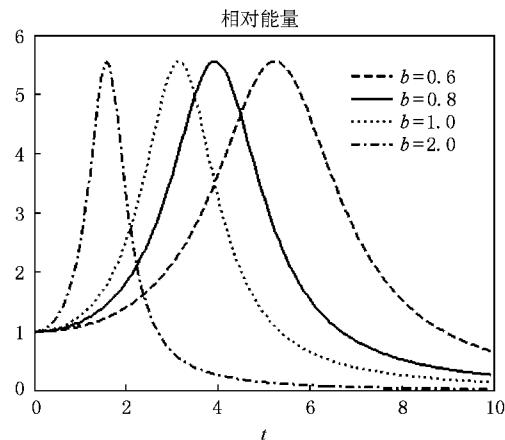


图3 不同基流切变对应的相对能量

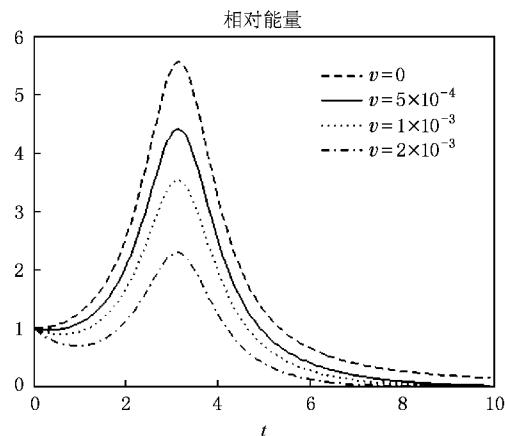


图4 不同黏性系数对应的相对能量

由图3可以看出, 基流切变越大, 相对能量达到其最大值 R^* 的时间就越短. 数值试验发现, 只要 $b > 0$, R^* 总为一个常数 ($R^* = 5.569$), 这就是说, $\partial R^* / \partial b \equiv 0$, 即只要扰动流函数的初始场的结构确定, 不同的线性基流切变只能够加速或延缓扰动能量达到最大值的时间, 但不会改变扰动能量的最大值. 这一点, 在前人的研究中没有发现过.

由图4知, 随着黏性系数的增加, 相对能量在单调下降. 该图似乎还显示出黏性系数对相对能量达到最大值的时间没有影响, 这个猜想是否正确呢? 也就是说, 黏性系数 ν 和相对能量达到最大值的时间 t^* 之间是否满足 $\partial t^* / \partial \nu \equiv 0$ 呢? 表4给出了当 $m=4, \beta=2.83, b=1$ 时, 不同黏性系数情况下, 相对能量达到最大值时对应的时间 t^* .

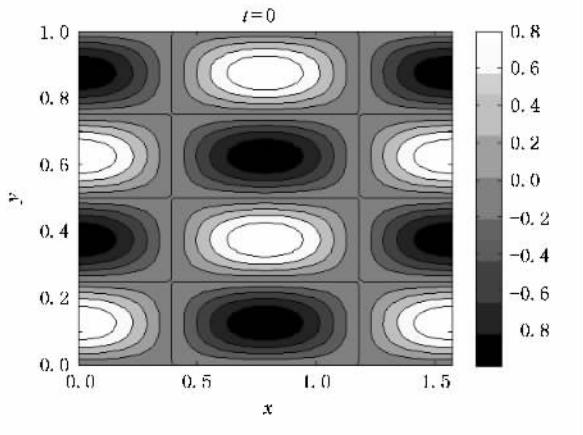
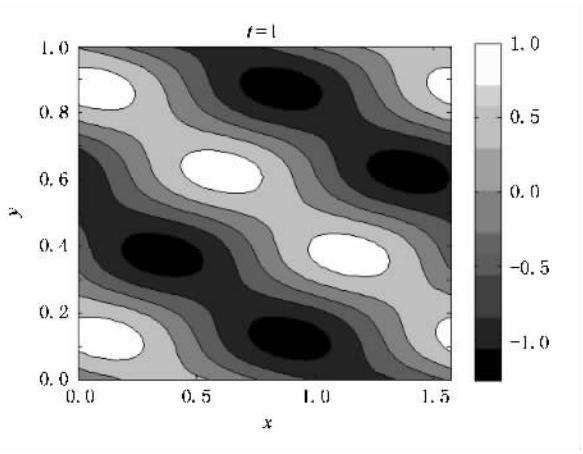
由图4和表4知, 黏性系数不仅对扰动能量的增长起阻尼作用, 而且随着黏性系数的增加, 扰动能量达到最大值的时间也在缓慢地缩短, 即 $\partial t^* / \partial \nu < 0$.

表 4 不同黏性系数下 相对能量最大值对应的时间 t^*

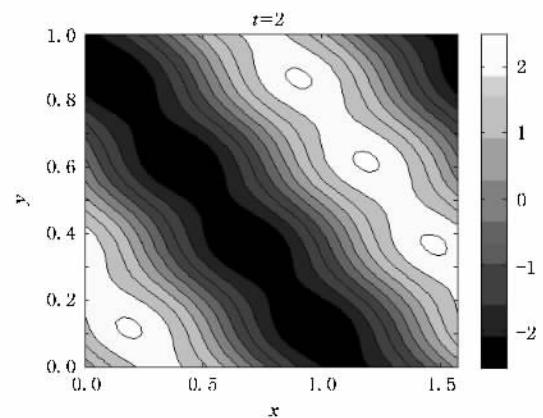
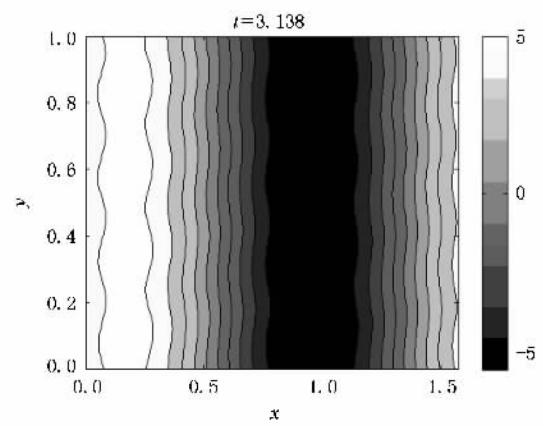
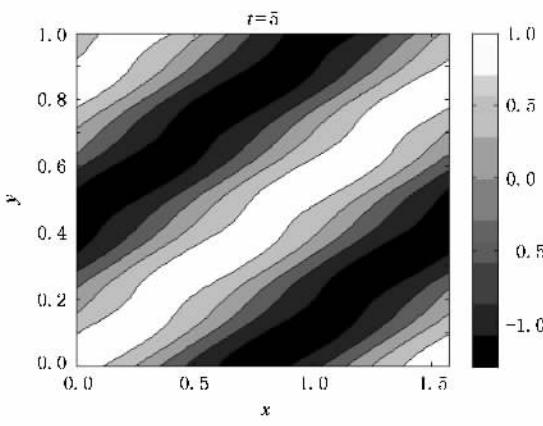
t^*	$\nu = 0$	$\nu = e - 4$	$\nu = 5e - 4$	$\nu = e - 3$
$k = 4$	3.138	3.136	3.129	3.123
$k = 5$	2.506	2.502	2.492	2.481
$k = 6$	2.082	2.077	2.060	2.044

4.4. 扰动结构的演变

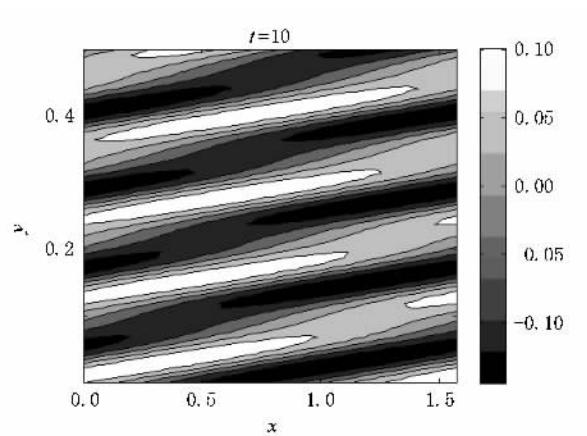
扰动能量在增长和衰减的过程中,扰动流函数又是如何演变的呢?仍以 $k = 4, m = 4$ 为例(对于扰动能量能够发展的其他形式的初值条件,结论是一致的)来研究.图 5—图 10 分别显示了 $\beta = 2.83$, $\nu = 0$, $b = 1$, $c = 0$, $A = 1$ 情形下扰动流函数在 $t = 0$, $t = 1$, $t = 2$, $t = 3.138$, $t = 5$ 和 $t = 10$ 时刻的扰动流场分布.

图 5 $t = 0$ 时扰动流场分布图 6 $t = 1$ 时扰动流场分布

从图 5—图 10 可以看出,在扰动能量增长阶段($t < 3.138$),扰动流函数从初始时刻的流场分布向西北—东南方向倾斜,并且扰动振幅随之增长.此时

图 7 $t = 2$ 时扰动流场分布图 8 $t = 3.138$ 时扰动流场分布图 9 $t = 5$ 时扰动流场分布

$U_y\psi_x\psi_y > 0$,当扰动能量达到最大值时,扰动流函数的振幅也达到最大,此时 $U_y\psi_x\psi_y = 0$;当 $t > 3.138$ 时,扰动流场又呈现东北—西南方向分布,并且扰动振幅随着时间的增长严格单调减少,此时 $U_y\psi_x\psi_y < 0$.

图 10 $t = 10$ 时扰动流场分布

5. 结论与讨论

应用 Fourier 变换法,解析地求解出描述准地转近似下 beta 平面上绝热、无摩擦、无强迫耗散的正压大气的线性位势涡度方程的解析解. 根据相对能量的定义,给出相对能量的表达式,通过相对能量和扰动能量增长率数值讨论了扰动能量与初始场和环境场的关系及扰动流场结构的演变.

我们发现: 1) 扰动流函数初始场的结构决定了

扰动能量能否发展. 2) 对扰动能量能够发展的初始场而言, 其扰动能量都是随着时间的增加, 先单调递增, 达到最大值后, 又单调递减的, 当 $t \rightarrow \infty$ 时, $E(t) \rightarrow 0$. 3) 扰动能量 $E(t)$ 、达到扰动能量最大值时对应的时间 t^* 都随着东西波数的增加而单调减少. 随着南北方向波数的增加而单调增加. 4) 不同的线性基流切变只能够促进或延缓扰动能量达到最大值的时间, 不会改变扰动能量的最大值. 5) 黏性系数不仅对扰动能量的增长起阻尼作用, 而且随着黏性系数的增加, 扰动能量达到最大值的时间也在缓慢地缩短. 6) 在扰动能量发展阶段, 流场的结构呈西北—东南向, 在扰动能量衰减阶段, 流场的结构呈东北—西南向.

上述的结论都是在假设基流是线性变化情形下得到的, 若基流是非线性的, 那么扰动能量与初始场和环境场的关系又是如何呢? 以及准地转近似下超长波的扰动能量是怎样变化的呢? 这些问题将是我们以后进一步研究的内容.

附录

将方程(1)两边同乘以 ψ 并在整个区域内积分, 设右端的积分常数为零, 可得

$$\iint \psi \left[\left(\frac{\partial}{\partial t} + U(y, x) \frac{\partial}{\partial x} \right) \zeta + (\beta - U_{yy}) \frac{\partial \psi}{\partial x} + \epsilon \mathcal{J}(\psi, \Delta \psi) - \nu \Delta \zeta \right] dx dy = 0,$$

即

$$\iint [\psi \zeta_t + \psi U \zeta_x + (\beta - U_{yy}) \psi \zeta_x + \epsilon (\psi \psi_x \zeta_y - \psi \psi_y \zeta_x) - \nu \psi \nabla^2 \zeta] dx dy = 0.$$

I II III IV V VI

下面利用分部积分法分别计算 I—VI 式积分:

$$I = \iint \psi \zeta_t dx dy = \iint (\psi \psi_{xt} + \psi \psi_{yt}) dx dy,$$

I a I b

$$I a = \iint \psi \psi_{xt} dx dy = \int \left[\int \psi d(\psi_{xt}) \right] dy = \int \left[(\psi \psi_{xt}) \Big|_{x=0}^{x=2\pi/k} - \int \psi_{xt} \psi_x dx \right] dy$$

$$= \int [\psi \psi_{xt}] \Big|_{x=0}^{x=2\pi/k} dy - \frac{1}{2} \iint \frac{d}{dt} (\psi_x^2) dx dy,$$

$$I b = \iint (\psi \psi_{yt}) dx dy = \int \left[\int \psi d(\psi_{yt}) \right] dx = \int [\psi \psi_{yt}] \Big|_{y=0}^{y=1} dx - \frac{1}{2} \iint \frac{d}{dt} (\psi_y^2) dx dy,$$

$$I = I a + I b = \int [\psi \psi_{xt}] \Big|_{x=0}^{x=2\pi/k} dy + \int [\psi \psi_{yt}] \Big|_{y=0}^{y=1} dx - \frac{1}{2} \iint (\psi_x^2 + \psi_y^2) dx dy;$$

$$II = \iint \psi U \zeta_x dx dy = \iint \psi U (\psi_{xx} + \psi_{yy}) dx dy,$$

II a II b

$$II a = \iint \psi U \psi_{xx} dx dy = \int \left[\int \psi U d(\psi_{xx}) \right] dy = \int \left[(\psi U \psi_{xx}) \Big|_{x=0}^{x=2\pi/k} - \int (\psi_{xx} \psi_x U) dx \right] dy$$

$$= \int (\psi U \psi_{xx}) \Big|_{x=0}^{x=2\pi/k} dy - \int \left(\frac{1}{2} U \psi_x^2 \right) \Big|_{x=0}^{x=2\pi/k} dy = \int [\psi U \psi_{xx} - \frac{1}{2} U \psi_x^2] \Big|_{x=0}^{x=2\pi/k} dy,$$

$$\begin{aligned}
\text{II b} &= \iint \psi U \psi_{xy} \, dx \, dy = \int \left[\int U \psi \mathfrak{C} \psi_{yy} \right] dy = \int \left[(U \psi \psi_{yy})_{x=0}^{y=2\pi/k} - \int U \psi_{yy} \psi_x \, dx \right] dy \\
&= \int \left[U \psi \psi_{yy} \Big|_{x=0}^{x=2\pi/k} dy - \int \left[\int U \psi_x \mathfrak{C} \psi_y \right] dx \right] dy \\
&= \int \left[U \psi \psi_{yy} \Big|_{x=0}^{x=2\pi/k} dy - \int \left[(U \psi_x \psi_y)_{y=0}^{y=1} - \int \psi_y \mathfrak{C} U_y \psi_x + U \psi_{xy} \right] dy \right] dx \\
&= \int \left[U \psi \psi_{yy} \Big|_{x=0}^{x=2\pi/k} dy - \int (U \psi_x \psi_y)_{y=0}^{y=1} dx + \iint (U_y \psi_x \psi_y) \, dx \, dy + \int \left(\frac{1}{2} U \psi_y^2 \right)_{x=0}^{x=2\pi/k} dy \right] \\
&= \int \left[U \psi \psi_{yy} + \frac{1}{2} U \psi_y^2 \right]_{x=0}^{x=2\pi/k} dy - \int (U \psi_x \psi_y)_{y=0}^{y=1} dy + \iint (U_y \psi_x \psi_y) \, dx \, dy, \\
\text{II} &= \text{II a} + \text{II b} \\
&= \int \left[\psi U (\psi_{xx} + \psi_{yy}) - \frac{1}{2} U (\psi_x^2 - \psi_y^2) \right]_{x=0}^{x=2\pi/k} dy - \int (U \psi_x \psi_y)_{y=0}^{y=1} dx + \iint (U_y \psi_x \psi_y) \, dx \, dy; \\
\text{III} &= \iint (\beta - U_{yy}) \psi \psi_x \, dx \, dy = \frac{1}{2} \int \left[(\beta - U_{yy}) \psi^2 \right]_{x=0}^{x=2\pi/k} dy = 0; \\
\text{IV} &= \iint \epsilon \psi \psi_x \zeta_y \, dx \, dy = \iint \epsilon \psi \psi_x (\psi_{xy} + \psi_{yy}) \, dx \, dy, \\
\text{IV a} &= \iint \epsilon \psi \psi_x \psi_{xy} \, dx \, dy = \epsilon \int \left[\int (\psi \psi_x) \mathfrak{C} (\psi_{xy}) \right] dx \\
&= \epsilon \int (\psi \psi_x \psi_{xy})_{y=0}^{y=1} dx - \epsilon \iint \psi_{xx} (\psi_x \psi_y + \psi \psi_{xy}) \, dx \, dy, \\
\text{IV b} &= \epsilon \iint \psi \psi_x \psi_{yy} \, dx \, dy = \epsilon \int \left[\int \psi \psi_x \mathfrak{C} (\psi_{yy}) \right] dx \\
&= \epsilon \int (\psi \psi_x \psi_{yy})_{y=0}^{y=1} dx - \epsilon \iint \psi_{yy} (\psi_x \psi_y + \psi \psi_{xy}) \, dx \, dy, \\
\text{IV} &= \text{IV a} + \text{IV b} = \epsilon \int [\psi \psi_x (\psi_{xx} + \psi_{yy})]_{y=0}^{y=1} dx - \epsilon \iint (\psi_x \psi_y + \psi \psi_{xy}) \mathfrak{C} (\psi_{xx} + \psi_{yy}) \, dx \, dy; \\
\text{V} &= -\epsilon \iint \psi \psi_x \zeta_x \, dx \, dy = -\epsilon \iint \psi \psi_x (\psi_{xx} + \psi_{xy}) \, dx \, dy, \\
\text{V a} &= -\epsilon \iint \psi \psi_y \psi_{xx} \, dx \, dy = -\epsilon \int (\psi \psi_y \psi_{xx})_{x=0}^{x=2\pi/k} dy + \epsilon \iint \psi_{xx} (\psi_x \psi_y + \psi \psi_{xy}) \, dx \, dy, \\
\text{V b} &= -\epsilon \iint \psi \psi_y \psi_{xy} \, dx \, dy = -\epsilon \int (\psi \psi_y \psi_{xy})_{x=0}^{x=2\pi/k} dy + \epsilon \iint \psi_{yy} (\psi_x \psi_y + \psi \psi_{xy}) \, dx \, dy, \\
\text{V} &= \text{V a} + \text{V b} = -\epsilon \int [\psi \psi_y (\psi_{xx} + \psi_{yy})]_{x=0}^{x=2\pi/k} dy + \epsilon \iint (\psi_x \psi_y + \psi \psi_{xy}) \mathfrak{C} (\psi_{xx} + \psi_{yy}) \, dx \, dy, \\
\text{VI} &= -\nu \iint \psi \nabla^2 \zeta \, dx \, dy = -\nu \iint (\psi \zeta_{xx} + \zeta_{yy}) \, dx \, dy = -\nu \iint [\psi \psi_{xxx} + 2\psi \psi_{xyy} + \psi \psi_{yyy}] \, dx \, dy, \\
\text{VI a} &= -\nu \iint \psi \psi_{xxx} \, dx \, dy = -\nu \int \left[\iint \psi \mathfrak{C} (\psi_{xxx}) \right] dy = -\nu \int \left[(\psi \psi_{xxx})_{y=0}^{y=2\pi/k} - \int \psi_{xxx} \psi_x \, dx \right] dy \\
&= -\nu \int (\psi \psi_{xxx})_{y=0}^{y=2\pi/k} dy + \nu \int \left[(\psi_x \psi_{xx})_{y=0}^{y=2\pi/k} - \int \psi_{xx}^2 \, dx \right] dy \\
&= -\nu \int (\psi \psi_{xxx} - \psi_x \psi_{xx})_{y=0}^{y=2\pi/k} dy - \nu \iint \psi_{xx}^2 \, dx \, dy, \\
\text{VI b} &= -2\nu \iint \psi \psi_{xyy} \, dx \, dy = -2\nu \int \left[\int \psi \mathfrak{C} (\psi_{xyy}) \right] dy = -2\nu \int \left[(\psi \psi_{xyy})_{x=0}^{x=2\pi/k} - \int \psi_{xyy} \psi_x \, dx \right] dy \\
&= -2\nu \int (\psi \psi_{xyy})_{x=0}^{x=2\pi/k} dy + 2\nu \int \left[\int \psi_x \mathfrak{C} (\psi_{xy}) \right] dx \\
&= -2\nu \int (\psi \psi_{xyy})_{x=0}^{x=2\pi/k} dy + 2\nu \int (\psi_x \psi_{xy})_{y=0}^{y=1} dx - 2\nu \iint \psi_{xy}^2 \, dx \, dy, \\
\text{VI c} &= -\nu \iint \psi \psi_{yyy} \, dx \, dy = -\nu \int \left[\int \psi \mathfrak{C} (\psi_{yyy}) \right] dx = -\nu \int \left[(\psi \psi_{yyy})_{y=0}^{y=1} - \int \psi_{yyy} \psi_y \, dy \right] dx \\
&= -\nu \int (\psi \psi_{yyy})_{y=0}^{y=1} dx + \nu \int \left[\int \psi_y \mathfrak{C} (\psi_{yy}) \right] dx
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= -\nu \int (\psi \psi_{yy} - \psi_y \psi_{yy}) \Big|_{y=0}^{y=1} dx - \nu \iint \psi_{yy}^2 dx dy, \\
 VI &= VIa + VIb + VIc \\
 &= -\nu \int (\psi \psi_{xx} - \psi_x \psi_{xx} + 2\psi \psi_{yy}) \Big|_{x=0}^{x=2\pi/k} dy - \nu \int (\psi \psi_{yy} - \psi_y \psi_{yy} - 2\psi_x \psi_{xy}) \Big|_{y=0}^{y=1} dx \\
 &\quad - \nu \iint (\psi_{xx}^2 + 2\psi_{xy}^2 + \psi_{yy}^2) dx dy.
 \end{aligned}$$

因为 $I + II + III + IV + V + VI = 0$ 故可得扰动能量随时间的变化关系如下：

$$\begin{aligned}
 \frac{dE}{dt} &= \iint [U_y \psi_x \psi_y - \kappa (\psi_{xx}^2 + 2\psi_{xy}^2 + \psi_{yy}^2)] dx dy \\
 &\quad + \int [\psi \psi_{xt} - U \psi_x \psi_y + \epsilon (\psi \psi_x (\psi_{xx} + \psi_{yy}) - \psi \psi_{yy} - \psi_y \psi_{yy} - 2\psi_x \psi_{xy})] \Big|_{y=0}^{y=1} dx \\
 &\quad + \int [\psi \psi_{xt} + \psi U (\psi_{xx} + \psi_{yy}) - \frac{1}{2} U (\psi_x^2 - \psi_y^2) - \epsilon (\psi \psi_y (\psi_{xx} + \psi_{yy}) \\
 &\quad - \kappa (\psi \psi_{xx} - \psi_x \psi_{xx} + 2\psi \psi_{xy})] \Big|_{x=0}^{x=2\pi/k} dy.
 \end{aligned}$$

-
- [1] Charney J G 1947 *J. Atmos. Sci.* **4** 135
 [2] Eady E T 1949 *Tellus* **1** 33
 [3] Kuo H L 1949 *Advances in Applied Mechanics* **13** 247
 [4] Lin C C 1955 *The theory of hydrodynamic instability* (Cambridge Univ. Press)
 [5] Dickinson R E 1968 *J. Atmos. Sci.* **25** 984
 [6] Gilman P A 1969 *J. Atmos. Sci.* **26** 1003
 [7] Lorenz E N 1972 *J. Atmos. Sci.* **29** 258
 [8] Duffy D G 1975 *J. Atmos. Sci.* **32** 1271
 [9] Geisler J E, Dickinson R E 1975 *J. Atmos. Sci.* **32** 2802
 [10] Wam H 1976 *J. Atmos. Sci.* **33** 1478
 [11] Hoskins B J, Ambrizzi T 1993 *J. Atmos. Sci.* **50** 1661
 [12] Verdiere A C, Tailleux R. 2005 *J. Phys., Oceanogr.* **35** 865
 [13] Matano R P, Palma E D 2005 *J. Phys., Oceanogr.* **35** 2228
 [14] Zhang G, Xiang J 2002 *Applied Mathematics and Mechanics* **23** 1339
 [15] Orr W M 1907 *Proc. R. Irish Acad. A* **27** 69
 [16] Eliassen A E 1953 *Inst. Weather Climate Res.* **1**
 [17] Howard E 1953 *Geophys* **18** 1
 [18] Case K M 1960 *Phys. Fluids* **3** 143
 [19] Yamagata T 1976 *J. Met. Soc. Japan* **54** 126
 [20] Farrell B F 1982 *J. Atmos. Sci.* **39** 1663
 [21] Tung K K 1983 *J. Fluid Mech.* **133** 443
 [22] Clark H E 1972 *J. Atmos. Sci.* **29** 1430
 [23] Pedlosky J 1964 *Tellus* **16** 12
 [24] Duffy D G 1974 *J. Atmos. Sci.* **31** 1218
 [25] Hart J E 1976 *J. Atmos. Sci.* **33** 1974
 [26] Fujimura K 1991 *Proc. R. Soc. Lond.* **434 A** 719
 [27] Amol'd V I 1969 *Am. Math. Soc. Transl.* **19** 267
 [28] Dikii L A 1965 *Atmos. Ocean. Phys.* **1** 653
 [29] Andrews D G 1984 *Geophys & Astrophys. Fluid Dyn.* **28** 243
 [30] Zeng Q C 1989 *Adv. Atmos. Sci.* **6** 137
 [31] Mu M, Shepherd T G 1994 *J. Atmos. Sci.* **51** 3427
 [32] Serrin J 1959 *Arch. Rat. Mech. Anal.* **3** 1
 [33] Henrotay P 1983 *J. Atmos. Sci.* **40** 762
 [34] Salmon R 1988 *Ann. Rev. Fluid Mech.* **20** 225
 [35] Uhovskii M R, Yudovich V I 1963 *Prinik. Mat. Meh.* **27** 295
 [36] Rosen G 1971 *Phy. Fluids* **14** 2767
 [37] Lu P S, Zeng Q C 1981 *Sci. Atmos. Sinica* **5** 1
 [38] O'Brien E 1992 *J. Atmos. Sci.* **49** 1557
 [39] Zhang L, Huang S X, Zhang L F 2007 *Proceedings of the 5th International Conference on Nonlinear Mechanics (ICNM-V)* 1195
 [40] Phillips O M 1966 *Dynamics of the upper ocean* (Cambridge University Press)
 [41] Hartman R J 1975 *J. Fluid Mech.* **71** 89

The disturbance energy of Rossby wave in barotropic atmosphere^{*}

Zhang Liang^{1,2)†} Zhang Li-Feng¹⁾ Wu Hai-Yan³⁾ Li Gang¹⁾

1) Institute of Meteorology, PLA University of Science and Technology, Laboratory for Applied Geophysics, Nanjing 211101, China

2) No. 96165 troops of PLA, Leping 333300, China

3) No. 94855 troops of PLA, Quzhou 324001, China

(Received 12 February 2009; revised manuscript received 23 March 2009)

Abstract

Fourier-transformed method is used to investigate the problem of the rapid growth and decay of the disturbance energy of Rossby wave in barotropic atmosphere on the assumption that this kind of atmosphere is adiabatic, non-frictional, unforced, non-dissipative and quasigeostrophic on a beta plane. The analytical solution of linear barotropic potential vorticity equation is obtained for the first time and we go a step further to discuss the relations between the disturbance energy and the initial perturbation flow wave numbers, shear of basic flow and viscous coefficient by using the above analytical solution.

Keywords : Rossby wave, initial-value problem, Fourier-transform, disturbance energy

PACC : 0340G, 0420J, 1140

* Project supported by the State Key Program for Basic Research of China (Grant Nos. 2007CB411800, 2004CB418304).

† E-mail: zl_0617@163.com