

一类奇摄动非线性方程 Robin 问题激波的位置^{*}

莫嘉琪^{1)†} 刘树德¹⁾ 唐荣荣²⁾

1) (安徽师范大学数学系, 芜湖 241000)

2) (湖州师范学院理学院, 湖州 313000)

(2009 年 10 月 3 日收到; 2009 年 10 月 24 日收到修改稿)

利用匹配法构造了一类奇摄动非线性方程 Robin 问题激波解的渐近表示式. 得出了激波在边界附近出现的条件.

关键词: 拟线性方程, 激波解, 内层, 边界层

PACC: 0230

1. 引 言

对非线性问题的激波解的研究近来在物理学界十分活跃. 物理学的许多分支, 包括流体力学、光学、振动理论、海洋科学、大气物理、电子学等方面都涉及这方面的应用. 研究激波理论的方法, 特别是利用非线性理论的数学解析方法不断地在发展和创新, 例如齐次平衡法^[1]、Jacobi 椭圆函数展开法^[2]、辅助方程法^[3]、双曲函数法^[4]、符号计算代数法^[5]、Riccati 函数法^[6]、 (G'/G) 展开法^[7,8]等, 近来许多学者也作了许多工作^[9-16]. 莫嘉琪等^[17-32]也利用微分不等式等方法研究了一类奇摄动非线性问题. 本文是用匹配方法来讨论具有应用背景较强的一类非线性奇摄动问题的激波解. 研究这类问题的激波处在边界附近的条件. 这是近来为学术界关注的一个课题.

2. Robin 问题及其外部解

考虑如下二阶非线性典型的模型:

$$\varepsilon y'' + yy' = g(x)f(y) \quad (x \in (0, 1)), \quad (1)$$

$$y(0) - \varepsilon ay'(0) = \alpha, \quad (2)$$

$$y(1) + \varepsilon by'(1) = \beta, \quad (3)$$

其中 ε 为正的小参数, $\alpha, \beta, a > 0, b > 0$ 为常数. 这类非线性问题在许多物理问题中经常出现. 本文主要研究本模型所产生的激波处在边界附近的条件及其激波解的渐近表达式.

首先做如下假设:

假设 1 $s/f(s) > 0, g > 0$ 为连续可积的函数.

不难看出, 方程(1)的退化方程为

$$yy' = g(x)f(y),$$

其解 y_0 满足

$$\int_0^x g(x) dx = \int_{f(s)}^0 \frac{s}{f(s)} ds. \quad (4)$$

首先设问题(1)——(3)的左、右段外部解 y_l, y_r 分别为

$$y_l = \sum_{i=0}^{\infty} y_{li} \varepsilon^i, \quad y_r = \sum_{i=0}^{\infty} y_{ri} \varepsilon^i. \quad (5)$$

将(5)式代入方程(1), 考虑到边界条件(2), (3)式, 由(4)式知, 问题(1)——(3)的零阶近似的左、右段外部解 y_{l0}, y_{r0} 分别为

$$\int_0^x g(\xi) d\xi = \int_{f(s)}^0 \frac{s}{f(s)} ds, \quad (6)$$

和

$$\int_1^x g(\xi) d\xi = \int_{f(s)}^{f(s_0)} \frac{s}{f(s)} ds, \quad (7)$$

其中 $y_{l0}(x)$ 满足边界条件 $y_{l0}(0) = \alpha$, 而 $y_{r0}(x)$ 满足边界条件 $y_{r0}(1) = \beta$.

^{*} 国家自然科学基金(批准号:40876010)、中国科学院知识创新工程重要方向性项目(批准号:KZCX2-YW-Q03-08)、大气科学和地球流体力学数值模拟国家重点实验室专项经费和安徽省高校自然科学基金(批准号:KJ2010A153)资助的课题.

[†] E-mail: mojqiaqi@mail.ahnu.edu.cn

由(6)式知, 问题(1)–(3)的左、右段外部解关于 ε 的一次分量 y_{11}, y_{r1} 满足

$$y_{10}y'_{11} + (y'_{10} - g(x)f_y(y_{10}))y_{11} = -y''_{10}, \quad (8)$$

$$y_{11}(0) = ay'_{10}(0), \quad (9)$$

$$y_{r0}y'_{r1} + (y'_{r0} - g(x)f_y(y_{r0}))y_{r1} = -y''_{r0}, \quad (10)$$

$$y_{r1}(1) = -by'_{r0}(1). \quad (11)$$

不难得到(8), (9)式和(10), (11)式的解分别为

$$\begin{aligned} y_{11} = & \left[\exp \int_0^x \frac{-y'_{10}(\xi) + g(\xi)f_y(y_{10}(\xi))}{y_{10}(\xi)} d\xi \right] \\ & \times \left[\int_0^x \left[-\frac{y''_{10}(\xi)}{y_{10}(\xi)} \right. \right. \\ & \times \exp \left(\int_0^\xi \frac{y'_{10}(\eta) - g(\eta)f_y(y_{10}(\eta))}{y_{10}(\eta)} d\eta \right) \\ & \times d\xi + ay'_{10}(0) \left. \right] \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} y_{r1} = & \left[\exp \int_x^1 \frac{-y'_{r0}(\xi) + g(\xi)f_y(y_{r0}(\xi))}{y_{r0}(\xi)} d\xi \right] \\ & \times \left[\int_x^1 \left[-\frac{y''_{r0}(\xi)}{y_{r0}(\xi)} \right. \right. \\ & \times \exp \left(\int_\xi^1 \frac{y'_{r0}(\eta) - g(\eta)f_y(y_{r0}(\eta))}{y_{r0}(\eta)} d\eta \right) \\ & \times d\xi - by'_{r0}(0) \left. \right] \end{aligned} \quad (13)$$

于是由(5), (12), (13)式, 便得到问题(1)–(3)的一阶近似的左、右段外部解

$$\begin{aligned} y_1 = y_{10} + \varepsilon \left[\exp \int_0^x \frac{-y'_{10}(\xi) + g(\xi)f_y(y_{10}(\xi))}{y_{10}(\xi)} d\xi \right] \\ \times \left[\int_0^x \left[-\frac{y''_{10}(\xi)}{y_{10}(\xi)} \right. \right. \\ \times \exp \left(\int_0^\xi \frac{y'_{10}(\eta) - g(\eta)f_y(y_{10}(\eta))}{y_{10}(\eta)} d\eta \right) \\ \times d\xi + ay'_{10}(0) \left. \right] + O(\varepsilon^2), \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} y_r = y_{r0} + \varepsilon \left[\exp \int_x^1 \frac{-y'_{r0}(\xi) + g(\xi)f_y(y_{r0}(\xi))}{y_{r0}(\xi)} d\xi \right] \\ \times \left[\int_x^1 \left[-\frac{y''_{r0}(\xi)}{y_{r0}(\xi)} \right. \right. \\ \times \exp \left(\int_\xi^1 \frac{y'_{r0}(\eta) - g(\eta)f_y(y_{r0}(\eta))}{y_{r0}(\eta)} d\eta \right) \\ \times d\xi - by'_{r0}(0) \left. \right] + O(\varepsilon^2). \end{aligned} \quad (15)$$

3. 构造内层解

下面来构造问题(1)–(3)的内层解. 设 x^* 为问题(1)–(3)的激波位置. 首先在 $x = x^*$ 附近引入伸长变量变换

$$\xi = \frac{x - x^*}{\varepsilon^\nu}, \quad (16)$$

其中 ν 为正常数. 设原问题内层解为 Y , 将(16)式代入方程(1)有

$$\frac{d^2 Y}{d\xi^2} + \varepsilon^{\nu-1} Y \frac{dY}{d\xi} - \varepsilon^{2\nu-1} g(x^* + \varepsilon^\nu \xi) f(Y) = 0. \quad (17)$$

由(17)式不难看出, 当 $\nu = 1$ 时有内层解. 设内层解 Y 为

$$Y = \sum_{i=0}^{\infty} Y_i \varepsilon^i. \quad (18)$$

将 $\nu = 1$ 和(16), (18)式代入方程(17), 按 ε 展开非线性项, 合并 ε 的同次幂项, 由 $\varepsilon^0, \varepsilon^1$ 的系数可得, Y_0, Y_1 满足如下方程:

$$\frac{d^2 Y_0}{d\xi^2} + Y_0 \frac{dY_0}{d\xi} = 0, \quad (19)$$

$$\frac{d^2 Y_1}{d\xi^2} + Y_0 \frac{dY_1}{d\xi} + \frac{dY_0}{d\xi} Y_1 = g(x^*) f(Y_0). \quad (20)$$

由(19)式可得

$$\frac{dY_0}{d\xi} = \frac{1}{2}(C_1 - Y_0^2), \quad (21)$$

其中 C_1 为任意常数. 显然, $C_1 = k^2 > 0$. 否则 $\lim_{\xi \rightarrow \pm \infty} Y_0 = \mp \infty$, 这时 Y_0 不能和外部解匹配.

由(21)式可得解 Y_0 为

$$Y_0 = k \tanh \left[\frac{1}{2} k (\xi + C_2) \right] \quad (|Y_0| \leq k), \quad (22)$$

或

$$Y_0 = k \coth \left[\frac{1}{2} k (\xi + C_2) \right] \quad (|Y_0| \geq k), \quad (23)$$

其中 C_2 为任意常数. 因为双曲正切和双曲余切均为奇函数, 所以在(22), (23)式中的常数 k 不妨设其为正, 即 $k > 0$.

由线性方程(20)可得

$$\frac{d^2 Y_1}{d\xi^2} + \frac{d}{d\xi}(Y_0 Y_1) = g(x^*) f(Y_0),$$

即

$$\frac{dY_1}{d\xi} + Y_0 Y_1 = \int_\xi^\xi g(x^*) f(Y_0) d\xi + C_3.$$

由此便可得到 Y_1 , 有

$$Y_1 = \left[\exp \int_0^\xi -Y_0(\eta) d\eta \right] \times \left[\int_0^\xi [g(x^*)f(Y_0(\eta)) + C_3] \times \exp \int_0^\eta Y_0(\tau) d\tau d\eta + C_4 \right], \quad (24)$$

其中 Y_0 由 (22) 或 (23) 式决定, C_3, C_4 为任意常数.

于是由 (14), (15), (24) 式内层解的一阶近似为

$$Y_1 = k \tanh \frac{1}{2} k (\xi + C_2) + \varepsilon \left[\left[\exp \int_0^\xi \left[-k \tanh \frac{1}{2} k (\xi + C_2) d\eta \right] \times \left[\int_0^\xi \left[g(x^*)f\left(k \tanh \frac{1}{2} k (\eta + C_2)\right) + C_3 \right] \times \exp \left[\int_0^\eta k \tanh \frac{1}{2} k (\tau + C_2) d\tau \right] d\eta + C_4 \right] + O(\varepsilon^2) \right] \quad (0 < \varepsilon \ll 1), \quad (25)$$

或

$$Y_1 = k \coth \frac{1}{2} k (\xi + C_2) + \varepsilon \left[\left[\exp \int_0^\xi \left[-k \coth \frac{1}{2} k (\xi + C_2) \right] d\eta \right] \times \left[\int_0^\xi \left[g(x^*)f\left(k \coth \frac{1}{2} k (\eta + C_2)\right) + C_3 \right] \times \exp \left[\int_0^\eta k \coth \frac{1}{2} k (\tau + C_2) d\tau \right] d\eta + C_4 \right] + O(\varepsilon^2) \right] \quad (0 < \varepsilon \ll 1), \quad (26)$$

其中 k, C_2, C_3, C_4 为任意常数.

4. 激波位置的讨论

现利用内层解和外部解的匹配原则, 区分激波位置在左、右边界出现的两种可能性进行讨论.

假设激波位置在区间的左端, 即 $x^* = 0$. 由 (16) 式, 这时伸长变量为 $\xi = \frac{x}{\varepsilon}$. 问题 (1) — (3) 的零次近似外部解只能是由右段 (7) 式决定的 y_{i0} . 现将零次近似外部解 y_{i0} 用内层变量 ξ 来表示, 并对小的 ε 展开, 得到外部解的内层极限 $(y_{i0})^i$. 将零次近似内层解 Y_{i0} 用外部变量 x 来表示, 并对小的 ε 展开. 得到内层解的外部极限 $(Y_{i0})^o = k$. 根据匹配原则 $(y_{i0})^i = (Y_{i0})^o$, 我们有

$$\int_1^0 g(\xi) d\xi = \int_\beta^k \frac{s}{f(s)} ds. \quad (27)$$

由假设 1 不难得知, (27) 式存在一个根 $k = k_{i0} > 0$. 再由 (22), (23) 式得

$$Y_{i0} = k_{i0} \tanh \left[\frac{1}{2} k_{i0} (\xi + C_2) \right], \quad |Y_{i0}| \leq k_{i0}, \quad (28)$$

和

$$Y_{i0} = k_{i0} \coth \left[\frac{1}{2} k_{i0} (\xi + C_2) \right], \quad |Y_{i0}| \geq k_{i0}. \quad (29)$$

考虑到边界条件 (2), 在 (28), (29) 式中当 $x = 0$ 时用对应的 $\xi = 0$ 代入, 使得 $Y_{i0}(0) + a \frac{dY_{i0}}{d\xi}(0) = \alpha$, 故有

$$\alpha = k_{i0} \left[\tanh \left(\frac{k_{i0}}{2} C_2 \right) + \frac{a}{2} \operatorname{sech}^2 \left(\frac{k_{i0}}{2} C_2 \right) \right], \quad (30)$$

或

$$\alpha = k_{i0} \left[\coth \left(\frac{k_{i0}}{2} C_2 \right) - \frac{a}{2} \operatorname{csch}^2 \left(\frac{k_{i0}}{2} C_2 \right) \right]. \quad (31)$$

由 (30) 或 (31) 式可决定 C_2 . 再由 (30), (31) 及双曲正切和双曲余切函数的性质知, 当 $|Y_{i0}| \leq k_{i0}$ 时, 内层解的零次近似 Y_0 由 (28) 表出; 当 $|Y_{i0}| \geq k_{i0}$ 时, 内层解的零次近似 Y_0 由 (29) 表出.

然后由 (13) 式, 将外部解的一次项 y_{r1} 用内层变量 ξ 来表示, 并对小的 ε 展开. 得到外部解的内层极限 $(y_{r1})^i = -by'_{i0}(0)$. 再将内层解的一次项 Y_{11} 用外部变量 x 来表示, 并对小的 ε 展开. 得到内层解的外部极限 $(Y_{11})^o = C_4$. 根据匹配原则 $(y_{r1})^i = (Y_{11})^o$, 有

$$C_4 = -by'_{i0}(0). \quad (32)$$

再考虑到边界条件 (2), 在 (24) 式中当 $x = 0$ 时用对应的 $\xi = 0$ 代入, 使得 $Y_1(0) + a \frac{dY_1}{d\xi}(0) = 0$, 故有 $C_3 = -C_4$.

于是, 由 (32) 式奇摄动问题的合成解的构造知:

(i) 当 $|Y_{i0}| \leq k_{i0}$ 时, 问题 (1) — (3) 在 $x = 0$ 附近可能有冲击层, 其激波解为

$$y(x) = y_{i0} + k_{i0} \left(-1 + \tanh \frac{1}{2} k_{i0} (\xi + C_2) \right) + \varepsilon \left[\left[\exp \int_x^1 \frac{-y'_{i0}(\xi)}{y_{i0}(\xi)} d\xi + g(\xi) f_y(y_{i0}(\xi)) \right] \times \left[\int_x^1 \left[-\frac{y''_{i0}(\xi)}{y_{i0}(\xi)} \right] \times \exp \left(\int_\xi^1 \frac{y'_{i0}(\eta)}{y_{i0}(\eta)} d\eta \right) d\eta \right] \times d\xi - by'_{i0}(0) \right]$$

$$\begin{aligned}
& + \left[\exp \int_0^\xi \left[-k_{i0} \tanh \frac{1}{2} k_{i0} (\xi + C_2) d\eta \right] \right. \\
& \times \left[\int_0^\xi \left[g(0) f \left(k_{i0} \tanh \frac{1}{2} k_{i0} (\eta + C_2) \right) \right. \right. \\
& \left. \left. + b y'_{i0}(0) \right] \exp \left[\int_0^\eta k_{i0} \tanh \frac{1}{2} k_{i0} \right. \right. \\
& \left. \left. \times (\tau + C_2) d\tau d\eta \right] + O(\varepsilon^2) \right] \quad (0 < \varepsilon \ll 1), \quad (33)
\end{aligned}$$

其中 y_{i0} 由 (7) 式决定, C_2 由 (30) 式决定. 上述解在 $x = 0$ 附近有激波层.

(ii) 当 $|Y_{i0}| \geq k_{i0}$ 时, 问题 (1) — (3) 在 $x = 0$ 附近可能有冲击层, 其激波解为

$$\begin{aligned}
y(x) = & y_{i0} + k_{i0} \left(1 + \coth \frac{1}{2} k_{i0} (\xi + C_2) \right) \\
& + \varepsilon \left[\left[\exp \int_x^1 \frac{-y'_{i0}(\xi)}{y_{i0}(\xi)} + \frac{g(\xi) f_y(y_{i0}(\xi))}{y_{i0}(\xi)} d\xi \right] \right. \\
& \times \left[\int_x^1 \left[-\frac{y''_{i0}(\xi)}{y_{i0}(\xi)} \right. \right. \\
& \times \exp \left(\int_\xi^1 \frac{y'_{i0}(\eta)}{y_{i0}(\eta)} - \frac{g(\eta) f_y(y_{i0}(\eta))}{y_{i0}(\eta)} d\eta \right) \left. \right] \\
& \times d\xi - b y'_{i0}(0) \left. \right] \\
& + \left[\exp \int_0^\xi \left[-k_{i0} \coth \frac{1}{2} k_{i0} (\xi + C_2) d\eta \right] \right. \\
& \times \left[\int_0^\xi \left[g(0) f \left(k_{i0} \coth \frac{1}{2} k_{i0} (\eta + C_2) \right) \right. \right. \\
& \left. \left. + b y'_{i0}(0) \right] \exp \left[\int_0^\eta k_{i0} \coth \right. \right. \\
& \left. \left. \times \frac{1}{2} k_{i0} (\tau + C_2) d\tau d\eta \right] + O(\varepsilon^2) \right] \\
& (0 < \varepsilon \ll 1), \quad (34)
\end{aligned}$$

其中 y_{i0} 仍由 (7) 式决定, C_2 由 (31) 式决定. 上述解也在 $x = 0$ 附近有激波层.

现在再假设激波位置在区间的右端, 即 $x^* =$

1. 由 (16) 式, 这时伸长变量为 $\xi = \frac{x-1}{\varepsilon}$. 问题 (1) — (3) 的零次外部解是由 (6) 式决定的 y_{i0} . 将零次外部解 y_{i0} 用内层变量 ξ 来表示, 并对小的 ε 展开. 得到零次外部解的内层极限. 再将内层解的零次近似 Y_{i0} 用外部变量 x 来表示, 并对小的 ε 展开. 得到零次内层解的外部极限 $(Y_{i0})^o = -k_{i0}$. 根据匹配原则, 我们有

$$\int_0^1 g(x) dx = \int_a^{-k} \frac{s}{f(s)} ds. \quad (35)$$

由假设 1 不难得知, (35) 式存在一个根 $k = k_{i0} > 0$. 再由 (22), (23) 式得

$$Y_0 = k_{i0} \tanh \left[\frac{1}{2} k_{i0} (\xi + C_2) \right], \quad |Y_{i0}| \leq k_{i0}, \quad (36)$$

和

$$Y_0 = k_{i0} \coth \left[\frac{1}{2} k_{i0} (\xi + C_2) \right], \quad |Y_{i0}| \geq k_{i0}. \quad (37)$$

考虑到边界条件 (3), 在 (36), (37) 式中将当 $x = 1$ 时对应的 $\xi = 0$ 代入, 使得 $Y_{i0}(0) - b \frac{dY_{i0}}{d\xi}(0) = \beta$, 故有

$$\beta = k_{i0} \tanh \left(\frac{k_{i0}}{2} C_2 \right) - b \operatorname{sech}^2 \left(\frac{k_{i0}}{2} C_2 \right), \quad (38)$$

或

$$\beta = k_{i0} \tanh \left(\frac{k_{i0}}{2} C_2 \right) + b \operatorname{csch}^2 \left(\frac{k_{i0}}{2} C_2 \right). \quad (39)$$

由 (38) 或 (39) 式可决定 C_2 . 再由 (36), (37) 式及双曲正切和双曲余切函数的性质知, 当 $|Y_{i0}| \leq k_{i0}$ 时, 内层解的零次近似 Y_{i0} 由 (36) 式表出; 当 $|Y_{i0}| \geq k_{i0}$ 时, 内层解的零次近似 Y_{i0} 由 (37) 式表出.

然后由 (12) 式, 将外部解的一次项 y_{i1} 用内层变量 ξ 来表示, 并对小的 ε 展开. 得到外部解的内层极限 $(y_{i1})^i = a y'_{i0}(0)$. 再将内层解的一次项 Y_{i1} 用外部变量 x 来表示, 并对小的 ε 展开. 得到内层解的外部极限 $(Y_{i1})^o = C_4$. 根据匹配原则 $(y_{i1})^i = (Y_{i1})^o$, 我们有

$$C_4 = a y'_{i0}(0). \quad (40)$$

于是, 由 (40) 式奇摄动问题的合成解的构造知:

(i) 当 $|Y_{i0}| \leq k_{i0}$ 时, 问题 (1) — (3) 在 $x = 1$ 附近可能有冲击层, 其激波解为

$$\begin{aligned}
y(x) = & y_{i0} + k_{i0} \left(-1 + \tanh \frac{1}{2} k_{i0} (\xi + C_2) \right) \\
& + \varepsilon \left[\left[\exp \int_0^x \frac{-y'_{i0}(\xi)}{y_{i0}(\xi)} + \frac{g(\xi) f_y(y_{i0}(\xi))}{y_{i0}(\xi)} d\xi \right] \right. \\
& \times \left[\int_0^x \left[-\frac{y''_{i0}(\xi)}{y_{i0}(\xi)} \right. \right. \\
& \times \exp \left(\int_0^\xi \frac{y'_{i0}(\eta)}{y_{i0}(\eta)} - \frac{g(\eta) f_y(y_{i0}(\eta))}{y_{i0}(\eta)} d\eta \right) \left. \right] \\
& \times d\xi + a y'_{i0}(0) \left. \right] \\
& + \left[\exp \int_0^\xi \left[-k_{i0} \tanh \frac{1}{2} k_{i0} (\xi + C_2) d\eta \right] \right. \\
& \times \left[\int_0^\xi \left[g(1) f \left(k_{i0} \tanh \frac{1}{2} k_{i0} (\eta + C_2) \right) \right. \right.
\end{aligned}$$

$$-ay'_{10}(0) \Big] \exp \left[\int_0^\eta k_{r0} \tanh \frac{1}{2} k_{r0} \right. \\ \left. \times (\tau + C_2) d\tau \right] d\eta \Big] + O(\varepsilon^2) \quad (0 < \varepsilon \ll 1), \quad (41)$$

其中 y_1 由(6)式决定, C_2 由(37)式决定. 上述解在 $x = 1$ 附近有激波层.

(ii) 当 $|Y_{r0}| \geq k_{r0}$ 时, 问题(1)–(3)在 $x = 1$ 附近可能有冲击层, 其激波解为

$$y(x) = y_{10} + k_{r0} \left(1 + \coth \frac{1}{2} k_{r0} (\xi + C_2) \right) \\ + \varepsilon \left[\left[\exp \int_x^1 \frac{-y'_{10}(\xi) + g(\xi) f_y(y_{10}(\xi))}{y_{10}(\xi)} d\xi \right] \right. \\ \times \left[\int_x^1 \left[-\frac{y''_{10}(\xi)}{y_{10}(\xi)} \right. \right. \\ \times \exp \left(\int_\xi^1 \frac{y'_{10}(\eta) - g(\eta) f_y(y_{10}(\eta))}{y_{10}(\eta)} d\eta \right) \\ \times d\xi + ay'_{10}(0) \Big] \\ \left. + \left[\exp \int_0^\xi \left[-k_{r0} \coth \frac{1}{2} k_{r0} (\xi + C_2) d\eta \right] \right. \right. \\ \left. \times \left[\int_0^\xi \left[g(1) f \left(k_{r0} \coth \frac{1}{2} k_{r0} (\eta + C_2) \right) \right. \right. \right. \right.$$

$$-ay'_{10}(0) \Big] \exp \left[\int_0^\eta k_{r0} \coth \frac{1}{2} k_{r0} \right. \\ \left. \times (\tau + C_2) d\tau d\eta \right] + O(\varepsilon^2) \\ (0 < \varepsilon \ll 1), \quad (42)$$

其中 y_{10} 仍由(6)式决定, C_2 由(39)式决定. 上述解在 $x = 1$ 附近有激波层.

5. 结 论

综上所述, 现有如下定理:

定理 在假设 1 下, 奇摄动问题(1)–(3)激波解的冲击层位置分别有如下情形:

1) 当 $|Y_{10}| \leq k_{10}$ 时, 问题(1)–(3)在 $x = 0$ 附近可能有冲击层, 它具有形如(33)式的激波解;

2) 当 $|Y_{10}| \geq k_{10}$ 时, 问题(1)–(3)在 $x = 0$ 附近可能有冲击层, 它具有形如(34)式的激波解;

3) 当 $|Y_{r0}| \leq k_{r0}$ 时, 问题(1)–(3)在 $x = 1$ 附近可能有冲击层, 它具有形如(41)式的激波解;

4) 当 $|Y_{r0}| \geq k_{r0}$ 时, 问题(1)–(3)在 $x = 1$ 附近可能有冲击层, 它具有形如(42)式的激波解.

-
- [1] Wang M L 1995 *Phys. Lett. A* **199** 169
 - [2] Wu G J, Han J H, Shi L M, Zhang M 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 3858 (in Chinese) [吴国将、韩家骅、史良马、张 苗 2006 物理学报 **55** 3858]
 - [3] Li X Z, Li X Y, Zhang L Y, Zhang J L 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 2203 (in Chinese) [李向正、李修勇、赵丽英、张金良 2006 物理学报 **57** 2203]
 - [4] Li Z B, Zhang S Q 1997 *Acta Math. Phys. Sin.* **17** 81 (in Chinese) [李志斌、张善卿 1997 数学物理学报 **17** 81]
 - [5] Gao L, Xu W, Tang Y N, Shen J W 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 1860 (in Chinese) [高 亮、徐 伟、唐亚宁、申建伟 2007 物理学报 **56** 1860]
 - [6] Ma S H, Wu X H, Fang J P, Zheng C L 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 11 (in Chinese) [马松华、吴小红、方建平、郑春龙 2008 物理学报 **57** 11]
 - [7] Bekir A 2008 *Phys. Lett. A* **372** 2254
 - [8] Li B Q, Ma Y L 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 4373 (in Chinese) [李帮庆、马玉兰 2009 物理学报 **58** 4373]
 - [9] Ma S H, Qiang J Y, Fang J P 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 620 (in Chinese) [马松华、强继业、方建平 2007 物理学报 **56** 620]
 - [10] Ma S H, Qiang J Y, Fang J P 2007 *Comm. Theor. Phys.* **48** 662
 - [11] Loutsenko I 2006 *Comm. Math. Phys.* **268** 465
 - [12] Parkes E J 2008 *Chaos Soliton. Fract.* **38** 154
 - [13] Graef J R, Kong L 2008 *Math. Proc. Camb. Philos. Soc.* **145** 489
 - [14] Hovhannisyan G, Vulanovic R 2008 *Nonlinear Stud.* **15** 297
 - [15] Barbu L, Cosma E 2009 *J. Math. Anal. Appl.* **351** 392
 - [16] Ramos M 2009 *J. Math. Anal. Appl.* **352** 246
 - [17] Mo J Q, Zhang W J, He M 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 1843 (in Chinese) [莫嘉琪、张伟江、何 铭 2007 物理学报 **56** 1843]
 - [18] Mo J Q, Zhang W J, Chen X F 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 6169 (in Chinese) [莫嘉琪、张伟江、陈贤峰 2007 物理学报 **56** 6169]
 - [19] Mo J Q 2009 *Chin. Phys. Lett.* **26** 010204
 - [20] Mo J Q 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 695 (in Chinese) [莫嘉琪 2009 物理学报 **58** 695]
 - [21] Mo J Q, Yao J S 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 7419 (in Chinese) [莫嘉琪、姚静荪 2009 物理学报 **58** 7419]
 - [22] Mo J Q 2009 *Chin. Phys. Lett.* **26** 060202
 - [23] Mo J Q 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 2930 (in Chinese) [莫嘉琪 2009 物理学报 **58** 2930]
 - [24] Mo J Q, Cheng Y 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 4379 (in Chinese) [莫嘉琪、程 燕 2009 物理学报 **58** 4379]
 - [25] Mo J Q 2009 *Sci. Chin. Ser. G* **52** 1007
 - [26] Mo J Q, Lin W T, Wang H 2008 *Chin. Geographical Sci.* **18** 193

- [27] Mo J Q, Lin W T, Lin Y H 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 3127 (in Chinese) [莫嘉琪、林万涛、林一骅 2007 物理学报 **56** 3127]
 [28] Mo J Q, Lin W T 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 6689 (in Chinese) [莫嘉琪、林万涛 2008 物理学报 **57** 6689]
 [29] Mo J Q, Lin Y H, Lin W T 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 6692 (in Chinese) [莫嘉琪、林一骅、林万涛 2009 物理学报 **58** 6692]
 [30] Mo J Q, Lin S R 2009 *Chin. Phys. B* **18** 3628
 [31] Mo J Q, Lin W T 2008 *Chin. Phys. B* **17** 370
 [32] Mo J Q, Lin W T 2008 *Chin. Phys. B* **17** 743

Shock position for a class of Robin problems of singularly perturbed nonlinear equation *

Mo Jia-Qi^{1)†} Liu Shu-De¹⁾ Tang Rong-Rong²⁾

1) (Department of Mathematics, Anhui Normal University, Wuhu 241000, China)

2) (Faculty of Science, Huzhou Teachers College, Huzhou 313000, China)

(Received 3 October 2009; revised manuscript received 24 October 2009)

Abstract

The expressions of shock solutions for singularly perturbed Robin problem of nonlinear equations are constructed using the matching method. The conditions for appearance of shock near the boundary are discussed.

Keywords: quasilinear equation, shock solution, internal layer, boundary layer

PACC: 0230

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 40876010), the Main Direction Program of the Knowledge Innovation of Chinese Academy of Sciences (Grant No. KZCX2-YW-Q03-08), the Special Fund of the State Key Laboratory of Numerical Modeling for Atmospheric Sciences, China, and the Natural Science Foundation from the Education Bureau of Anhui Province, China (Grant No. KJ2010A153).

† E-mail: mojiaqi@mail.ahnu.edu.cn