

# 基于电子倍增电荷耦合器件的哈特曼-夏克波前 传感器质心探测误差分析

张艳艳<sup>1) 2)</sup> 饶长辉<sup>1)</sup> 李梅<sup>1)</sup> 马晓澳<sup>1) 2)</sup>

1) (中国科学院光电技术研究所自适应光学国家重点实验室, 成都 610209)

2) (中国科学院研究生院, 北京 100049)

(2009 年 9 月 28 日收到; 2009 年 12 月 2 日收到修改稿)

哈特曼-夏克(Hartmann-Shack, H-S)波前传感器的探测误差是自适应光学系统中的一个主要误差源. 本文分析了电子倍增电荷耦合器件(electron multiplying charge-coupled devices, EMCCD)的各种噪声源对 H-S 波前传感器质心探测误差的影响, 推导了基于 EMCCD 的 H-S 波前传感器的质心探测误差的数学表达式, 并进行了数值仿真和实验研究. 结果表明, 基于 EMCCD 的 H-S 波前传感器的质心探测误差与增益直接相关, 在增益小于  $P_{\max} / (Q \cdot N_{\text{mean}})$  时质心探测误差随着增益的增大而减小, 在增益大于  $P_{\max} / (Q \cdot N_{\text{mean}})$  时质心探测误差随着增益的增大而增大, 其中  $P_{\max}$  是 EMCCD 的峰值电荷,  $Q$  是量子效率,  $N_{\text{mean}}$  是平均入射光强.

关键词: 自适应光学, 电子倍增电荷耦合器件, 波前传感器, 质心探测误差

PACC: 9265, 4285F, 4280Q, 0620D

## 1. 引 言

哈特曼-夏克(H-S)波前传感器目前被广泛应用于自适应光学系统中<sup>[1-6]</sup>, 其工作原理是将入射的畸变波前经过微透镜阵列分割成许多子孔径, 每个子孔径内的子透镜把入射到它上面的光聚焦到图像传感器的靶面上形成子光斑. 作为自适应光学系统的眼睛, 其测量精度直接影响到整个自适应光学系统的波前控制精度.

在 H-S 波前传感器中较常使用的图像传感器是光电耦合器件(CCD), 但是由于天文应用的自适应光学系统中的波前传感器通常在极弱光条件下工作, 每次采样得到的弱光信号一般在  $10^3$  光子的数量级或更低, 一般的高帧频 CCD 由于读出噪声较高, 其工作星等受限. 而像增强型 CCD(ICCD) 虽然具有很好的空间分辨率, 但是其增益不足以探测单个光子, 而基于 MCP 的二代管或三代管耦合的 ICCD 可提供足够的光增益使 CCD 能探测单个光子, 但是所提高的灵敏度是以牺牲分辨率为代价的. 为此采用电子倍增电荷耦合器件(EMCCD) 将弱

光图像进行增强<sup>[7-8]</sup>, 以抑制高帧频 CCD 的读出噪声, 提高对微弱光探测的能力. 图 1 所示是 EMCCD 与普通 CCD 在结构上的对比图, 可以看出 EMCCD 相当于是在普通 CCD 的基础上增加了一个倍增寄存器<sup>[8]</sup>. 其中倍增电极是倍增寄存器的主要构成部分, 倍增电极的作用是增加载流子的能量, 速度很高的电子会激发出更多的载流子. 电荷包每次通过倍增电极时都会得到放大, 每极的放大倍数很小, 一般小于 1.015, 但是由于倍增电极的级数很多, 最终的放大增益可以很大. EMCCD 已经成功的应用在了地基天文学中, 并取得了可与哈勃望远镜相媲美的观测效果<sup>[9]</sup>.

由于结构上的不同, 导致 EMCCD, CCD 和 ICCD 所引入的噪声也有所不同, 对 H-S 波前传感器所造成的质心探测误差也不同. Cao 等<sup>[10]</sup>, Jiang 等<sup>[2]</sup>, Ma 等<sup>[11]</sup> 分析了基于 CCD 的 H-S 波前传感器的质心探测误差, Shen 等<sup>[12]</sup> 分析了基于 ICCD 的 H-S 波前传感器的质心探测误差, 本文主要分析 EMCCD 的噪声特性以及这些噪声对 H-S 波前传感器的质心探测精度所造成的影响.

图1 CCD与EMCCD的结构对比

## 2. EMCCD的信号及噪声分析

### 2.1. 入射信号的光电转换分析

设第  $(i, j)$  个像素在曝光时间内所接收到的光子数为  $N_{ij}$ , EMCCD 的量子效率为  $Q$ , 则这  $N_{ij}$  个入射光子经过光电转换之后产生的光电子数是

$$N_{\text{ele}} = N_{ij} \cdot Q, \quad (1)$$

假设寄存器的单次倍增是  $p$ , 则经过  $i$  个倍增寄存器后的平均增益为

$$G = (1 + p)^i, \quad (2)$$

因此 CCD 最终输出电荷数为

$$N_{\text{out\_ele}} = N_{ij} \cdot Q \cdot G. \quad (3)$$

### 2.2. 噪声因子

电荷在增益寄存器中倍增的过程是一个随机的过程, 一定数量的电子经过增益寄存器后会以很小的概率输出不同数目的电子. 由于电子倍增过程的随机性以及增益区中某些电荷的损失机理, 倍增过程会引入一个额外的噪声, 这个额外的噪声被描述成噪声因子<sup>[13]</sup>, 定义噪声因子为  $F$ . 在理想的增益机理中, 这种额外的噪声因子值等于 1. 根据文献 [13] 表明, ICCD 的噪声因子在 2.0—3.3 之间, 而 EMCCD 的噪声因子  $F \approx 1.4$ , 这说明 EMCCD 对噪声的放大要小于 ICCD, 具有更高的灵敏度.

### 2.3. EMCCD 的噪声分析

噪声是衡量一个光电耦合器件优劣的最重要指标, 降低噪声同时就意味着提高了光电耦合器的响应度. EMCCD 的噪声源有以下几种<sup>[8]</sup>.

#### 2.3.1. 光子散粒噪声

光子散粒噪声是光子入射及光电转化过程的随机性造成的, 由光的量子性所决定的. 光子噪声的分布呈泊松分布, 其值等于入射有用信号值大小开平方. 光子噪声在电子倍增过程中同有用的入射信号一起被放大了  $G$  倍, 同时被噪声因子  $F$  所影响. 根据以上分析, EMCCD 的第  $(i, j)$  个像素点的所接收到的光电子数  $N_{ij} \cdot Q$ , 产生的光子噪声水平为  $N_{ij} \cdot Q$ , 单位为电子, 因此以入射光子来衡量等效的光子噪声, 方差为

$$\sigma_{p_{ij}}^2 = \frac{\bar{N}_{ij}}{Q}. \quad (4)$$

经过倍增增益之后输出的光子噪声电子数为

$$N_{p_{ij}}^2 = G^2 \cdot F^2 \cdot Q \cdot N_{ij}, \quad (5)$$

入射的光子噪声是不可避免的, 这也是 EMCCD 的噪声极限最小值.

#### 2.3.2. 暗噪声

EMCCD 的暗噪声有两部分组成即热暗电流噪声以及乱真电荷噪声. 由热的暗电流所引起的噪声可以控制温度进行降低, 如 e2vCCD60 工作在 20 时热暗电流噪声水平大约有  $200e^-/\text{pixel}/s$ , 但是当工作在 -30 时的热暗电流水平仅为  $1e^-/\text{pixel}/s$ . 而乱真电荷噪声是指当电荷在驱动时钟作用下经过倍增寄存器转移时, 在没有主电荷的情况下产生的二次电子. 普通 CCD 也会有乱真电荷, 但是由于普通 CCD 的读出噪声及热的暗电流噪声较大, 乱真电荷便可以忽略. 而在 EMCCD 中由于读出噪声被有效的抑制, 热暗电流噪声可由低温控制降低, 乱真电荷就成为 EMCCD 的不可忽视的一个主要的噪声源. 设在积分时间内在  $(i, j)$  像素上的热暗电流电子数为  $D$ , 乱真电荷电子数为  $C$ , 则在  $(i, j)$  像素上总的暗噪声电子数为  $N_{d_{ij\_ele}} = D + C$ , 等效的暗噪声入射光子为

$$N_{d_{ij}} = \frac{N_{d_{ij\_ele}}}{Q}. \quad (6)$$

经过倍增增益后输出电子数为

$$N_d^2 = G^2 F^2 N_{d_{ij\_ele}}. \quad (7)$$

由于暗噪声的分布符合泊松概率分布, 因此其等效的起伏方差为

$$\sigma_d^2 = \bar{N}_{d_{ij}}, \quad (8)$$

$\bar{N}_{d_{ij}}$  是等效的暗噪声入射光子数的平均值.

#### 2.3.3. 读出噪声

读出噪声是信号电荷包被转换为电压并在读出过程中产生的总噪声, 它包括复位噪声、转换噪

声和闪烁噪声等. 由于 EMCCD 是在读出电荷之前进行增益放大, 读出噪声电子没有通过增益寄存器, 没有经过增益放大, 同时也没有噪声因子的影响. 读出噪声可以看出是一种均值为 0 的高斯分布的噪声. 设 EMCCD 的读出噪声方差为  $\sigma_r^2$ , 单位为  $(e^-)^2$ , 第  $(i, j)$  像素的读出噪声为  $N_{r,ele}$ , 单位为  $e^-$ . 因此以入射光子来衡量, 等效的读出噪声方差  $\sigma_{requal}^2$  为

$$\sigma_{requal}^2 = \frac{\sigma_r^2}{G^2 \cdot Q^2}, \quad (9)$$

则第  $(i, j)$  个像素上接收到的等效光子数为

$$N_{vij} = \frac{N_{r,ele}}{G \cdot Q} \quad (10)$$

根据以上的分析可知, 基于 EMCCD 的 H-S 波前传感器的质心探测误差源主要有

信号光子噪声, 服从泊松分布, 方差为

$$\sigma_{p,ij}^2 = \frac{\bar{N}_{ij}}{Q},$$

暗噪声, 服从泊松分布, 方差为

$$\sigma_{d,ij}^2 = \bar{N}_{d,ij},$$

CCD 读出噪声, 服从零均值高斯分布, 方差为

$$\sigma_{rij}^2 = \sigma_{requal}^2.$$

### 3. 质心探测误差的理论推导

由于质心计算的  $x$  轴与  $y$  轴是完全对称的, 所以本文只讨论  $x$  方向的情况,  $y$  方向上与此类似.  $x$  方向上质心计算公式为<sup>[14]</sup>

$$x_c = \frac{\sum_{i,j}^{L,M} x_i T_{ij}}{\sum_{i,j}^{L,M} T_{ij}} = \frac{U}{V} \quad (11)$$

其中  $x_c$  和  $y_c$  是质心坐标,  $x_i$  和  $y_j$  为每个像素位置, 而  $T_{ij}$  是  $(i, j)$  像素上所接受到的总光子数,

$$T_{ij} = N_{ij} + N_{rij} + N_{d,ij}, \quad (12)$$

因此

$$\begin{aligned} U &= \sum_{i,j}^{L,M} x_i T_{ij} = \sum_{i,j}^{L,M} x_i (N_{ij} + N_{rij} + N_{d,ij}) \\ &= U_p + U_r + U_d, \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} V &= \sum_{i,j}^{L,M} T_{ij} = \sum_{i,j}^{L,M} (N_{ij} + N_{rij} + N_{d,ij}) \\ &= V_p + V_r + V_d. \end{aligned} \quad (14)$$

由于读出噪声的均值为 0, 因此  $V_r = \sum_{i,j}^{L,M} N_{rij} = 0$ , 所

以(14)式可以写为

$$V = V_p + V_d, \quad (15)$$

其中

$$\begin{aligned} U_p &= \sum_{i,j}^{L,M} x_i N_{ij}, & U_r &= \sum_{i,j}^{L,M} x_i N_{rij}, \\ U_d &= \sum_{i,j}^{L,M} x_i N_{d,ij}, & V_p &= \sum_{i,j}^{L,M} N_{ij}, \\ V_d &= \sum_{i,j}^{L,M} N_{d,ij}. \end{aligned}$$

#### 3.1. 质心随机抖动误差

根据误差传递公式,  $x$  方向的质心抖动方差为

$$\sigma_{xc}^2 = \frac{U^2}{V^4} \sigma_v^2 + \frac{1}{V^2} \sigma_U^2 - \frac{2UV}{V^3} \sigma_{UV}. \quad (16)$$

根据误差理论, 上式可化简为

$$\sigma_{xc}^2 = \frac{\sum_{i,j}^{L,M} x_i^2 S_{ij}^2}{V^2} + \frac{U^2 \sum_{i,j}^{L,M} S_{ij}^2}{V^4} - \frac{2U \sum_{i,j}^{L,M} x_i S_{ij}^2}{V^3}, \quad (17)$$

其中  $S_{ij}^2$  表示第  $(i, j)$  个像素上的噪声方差, 当认为各噪声源互不相关时,

$$S_{ij}^2 = \sigma_p^2 + \sigma_d^2 + \sigma_r^2 = \frac{\bar{N}_{ij}}{Q} + \bar{N}_{d,ij} + \sigma_{requal}^2, \quad (18)$$

则

$$\sigma_{xc}^2 = \sigma_{xp}^2 + \sigma_{xr}^2 + \sigma_{xd}^2, \quad (19)$$

其中的  $\sigma_{xp}^2$  是信号光所引起质心抖动方差,  $\sigma_{xr}^2$  是读出噪声所引起的质心抖动方差,  $\sigma_{xd}^2$  是暗噪声所引起的质心抖动方差.

##### 3.1.1. 信号光所引起的质心抖动方差

信号光所引起的质心抖动误差是由信号光所产生的光子散粒噪声所引起的. 根据以上的分析,

光子噪声的方差为  $\frac{\bar{N}_{ij}}{Q}$ . 代入(17)式可得

$$\begin{aligned} \sigma_{xp}^2 &= \frac{1}{Q} \cdot \frac{\sum_{i,j}^{L,M} x_i^2 \bar{N}_{ij}}{V^2} + \frac{U^2 \sum_{i,j}^{L,M} \bar{N}_{ij}}{V^4} - \frac{2U \sum_{i,j}^{L,M} x_i \bar{N}_{ij}}{V^3} \\ &= \frac{1}{Q} \cdot \frac{V_p^2}{V^2} + \frac{1}{V_p} x_p^2 - \frac{1}{V} x_c^2, \end{aligned} \quad (20)$$

其中,  $V_p$  是光斑等效高斯宽度,  $x_p$  是光斑的真实质心位置,  $x_c$  是实际探测得到的质心位置.

##### 3.1.2. 读出噪声所引起的质心抖动方差

根据以上分析可得, 读出噪声的起伏方差为  $\sigma_{requal}^2$ , 将其代入(17)式可得

$$\sigma_{xr}^2 = \frac{U^2 \sum_{i,j}^{L,M} \sigma_{requal}^2}{V^4} + \frac{\sum_{i,j}^{L,M} x_i^2 \sigma_{requal}^2}{V^2} - \frac{2U \sum_{i,j}^{L,M} x_i \sigma_{requal}^2}{V^3}$$

$$= \frac{{}^2_{\text{requal}} LM}{V^2} \frac{L^2 - 1}{12} + X_c^2, \quad (21)$$

其中的  $x_c$  表示实际探测得到的质心位置,  ${}^2_{\text{requal}}$  是读出噪声的等效的光子起伏方差.

### 3.1.3. 暗噪声所引起的质心抖动方差

将暗噪声的起伏方差为  $\bar{N}_{dij}$ , 代入(17)式可得

$$\begin{aligned} {}^2_{x_d} &= \frac{U^2 \bar{6}_{i,j} \bar{N}_{dij}}{V^4} + \frac{\bar{6}_{i,j} x_i^2 \bar{N}_{dij}}{V^2} - \frac{2U \bar{6}_{i,j} x_i \bar{N}_{dij}}{V^3} \\ &= \frac{V_d}{V^2} \frac{L^2 - 1}{12} + X_c^2, \end{aligned} \quad (22)$$

其中的  $V_d$  表示一个子孔径窗口内所接收到的总的暗噪声光子数.

## 3.2. 质心探测总误差

根据以上的分析可知, 探测的光斑绕其平均位置  $\bar{x}_c$  的抖动方差为

$$\begin{aligned} {}^2_x &= {}^2_{x_p} + {}^2_{x_r} + {}^2_{x_d} \\ &= \frac{1}{Q} \frac{V_p}{V^2} + \frac{1}{V_p} X_p^2 - \frac{1}{V} X_c^2 \\ &\quad + \frac{{}^2_{\text{requal}} LM}{V^2} \frac{L^2 - 1}{12} + X_c^2 \\ &\quad + \frac{V_d}{V^2} \frac{L^2 - 1}{12} + X_c^2. \end{aligned} \quad (23)$$

探测信号的总误差可表示为

$${}^2_x = {}^2_p + {}^2_{x_c}, \quad (24)$$

其中的  ${}^2_p$  是质心偏差的方差, 定义为

$${}^2_p = (X_c - X_p)^2, \quad (25)$$

其中的  $x_c$  是实际探测得到的质心位置,  $x_p$  是目标光斑的实际质心位置. 代入(24)式可得

$$\begin{aligned} {}^2_x &= \frac{1}{Q} \cdot \frac{V_p}{V^2} + \frac{1}{V_p} X_p^2 - \frac{1}{V} X_c^2 \\ &\quad + \frac{{}^2_{\text{requal}} LM}{V^2} \frac{L^2 - 1}{12} + X_c^2 \\ &\quad + \frac{V_d}{V^2} \frac{L^2 - 1}{12} + X_c^2 + (X_c - X_p)^2. \end{aligned} \quad (26)$$

将(26)式中的  $V, V_p, V_d, {}^2_{\text{requal}}$  分别转换成电子 ADU, 且一个电子产生  $K$  个 ADU, 可以表示为

$${}^2_x = G \cdot \frac{V_p \cdot \frac{{}^2_A \cdot K}{V_p} + \frac{K}{V_p} (X_p)^2}{V_p + \frac{V_b}{F}}$$

$$- \frac{K}{V_p + \frac{V_b}{F}} \cdot (X_c)^2$$

$$\begin{aligned} &+ \frac{{}^2_r \cdot L \cdot M}{V_p + \frac{V_b}{F}} \frac{L^2 - 1}{12} + (X_c)^2 \\ &+ \frac{V_b \cdot G \cdot K}{F \cdot V_p + \frac{V_b}{F}} \frac{L^2 - 1}{12} + (X_c)^2 + (X_c - X_p)^2. \end{aligned} \quad (27)$$

以下将对(27)式分别在高增益时 EMCCD 响应未饱和及饱和两种情况下讨论.

### 3.2.1. 高增益 EMCCD 响应未饱和时

高增益 EMCCD 响应未饱和是指入射的光强转换成电子数没有超出 CCD 单个像素的峰值电荷, 在此条件下, 目标信号的输出电荷随着倍增增益的增大而增大,

$$\begin{aligned} V_p &= \bar{6}_{ij}^{L,M} K \cdot G \cdot Q \cdot N_{ij}, \\ V_b &= \bar{6}_{ij}^{L,M} K \cdot G \cdot F \cdot Q \cdot N_{bij}, \\ U_p &= \bar{6}_{ij}^{L,M} x_i \cdot K \cdot G \cdot Q \cdot N_{ij}, \\ U_b &= \bar{6}_{ij}^{L,M} x_i \cdot K \cdot Q \cdot G \cdot F \cdot N_b, \\ U_r &= \bar{6}_{ij}^{L,M} K \cdot x_i \cdot \frac{N_{rij}}{G}. \end{aligned} \quad (28)$$

将其代入(27)式并化简后可得

$$\begin{aligned} {}^2_x &= \frac{{}^2_A \cdot \bar{6}_{i,j}^{L,M} N_{ij}}{L,M} + \frac{\bar{6}_{i,j}^{L,M} x_i \cdot N_{ij}}{L,M} \\ &\quad Q \cdot (\bar{6}_{i,j}^{L,M} (N_{ij} + N_{bij}))^2 - \frac{{}^2_{x_c}}{L,M} \\ &\quad Q \cdot (\bar{6}_{i,j}^{L,M} (N_{ij} + N_{bij})) \\ &\quad + \frac{{}^2_r \cdot L \cdot M}{L,M} \frac{L^2 - 1}{12} + X_c^2 \\ &\quad G^2 \cdot Q^2 \cdot (\bar{6}_{i,j}^{L,M} (N_{ij} + N_{bij}))^2 \\ &\quad + \frac{\bar{6}_{i,j}^{L,M} N_{bij}}{L,M} \frac{L^2 - 1}{12} + X_c^2 \\ &\quad (\bar{6}_{i,j}^{L,M} (N_{ij} + N_{bij}))^2 \\ &\quad + (X_c - X_p)^2, \end{aligned} \quad (29)$$

而  $x_c, x_p$  分别可以表示为

$$x_c = \frac{U}{V} = \frac{U_p + U_b + U_r}{V_p + V_b}$$

$$= \frac{\sum_{ij}^{L, M} x_i N_{ij} + \sum_{ij}^{L, M} x_i N_{bij} + \sum_{ij}^{L, M} x_i \frac{N_{xij}}{G}}{\sum_{ij}^{L, M} N_{ij} + \sum_{ij}^{L, M} N_{bij}}, \quad (30)$$

$$x_p = \frac{U}{V} = \frac{U_p}{V_p} = \frac{\sum_{ij}^{L, M} x_i N_{ij}}{\sum_{ij}^{L, M} N_{ij}}. \quad (31)$$

可以看出, 质心偏差的平方  $(x_c - x_p)^2$  随着增益  $G$  的增大而减小的(此时是指光斑的质心位置不在图像的坐标原点时, 若光斑的实际质心位置在坐标的原点, 此项可以忽略不计). 由于读出噪声及暗噪声是均匀分布的, 信号光较弱, 实际探测到的质心位置  $x_c$  在图像的原点附近, 可以将 (29) 式中的

$$\frac{x_c^2}{L \cdot M}, \quad \frac{r^2 \cdot L \cdot M \cdot x_c^2}{L \cdot M}$$

$$Q \cdot \left( \sum_{i,j} (N_{ij} + N_{bij}) \right)^2, \quad G^2 \cdot Q^2 \cdot \left( \sum_{i,j} (N_{ij} + N_{bij}) \right)^2$$

及  $\frac{x_c^2 \cdot \sum_{i,j} N_{bij}}{L \cdot M}$  三项忽略不计, 则 (29) 式可

以约等于

$$\begin{aligned} x_c^2 = & \frac{\frac{r^2}{A} \cdot \sum_{i,j} N_{ij}}{L \cdot M} + \frac{\sum_{i,j} x_i \cdot N_{ij}}{L \cdot M} \\ & + \frac{r^2 \cdot L \cdot M}{G^2 \cdot Q^2 \cdot \left( \sum_{i,j} (N_{ij} + N_{bij}) \right)^2} \cdot \frac{L^2 - 1}{12} \\ & + \frac{\sum_{i,j} N_{bij}}{L \cdot M} \cdot \frac{L^2 - 1}{12} + (x_c - x_p)^2. \end{aligned} \quad (32)$$

从 (32) 式可以看出与  $G$  有关的两项即

$$\frac{r^2 \cdot L \cdot M}{L \cdot M} \cdot \frac{L^2 - 1}{12} \text{ 及 } (x_c - x_p)^2,$$

$$Q^2 \cdot G^2 \cdot \left( \sum_{i,j} (N_{ij} + N_{bij}) \right)^2$$

且这两项都是随着  $G$  的增大而减小. 因此在高增益 EMCCD 响应未饱和时质心的探测误差随着增益  $G$  的增大而减小, 且由于  $r^2$ ,  $N_{ij}$  值有限, 当减小到一定的程度就将趋缓, 可以视为不再发生变化.

### 3.2.2. 高增益时 EMCCD 响应饱和

高增益时 EMCCD 响应饱和是指入射目标光强经过倍增之后的电荷值大于或等于单个像素的峰

值电荷强度, 此时的目标信号输出电子不再随着增益的增加而放大. 设  $P_{\max}$  为单个像素的峰值电荷, 设

$$P = V_p = \frac{r^2}{A} \cdot P_{\max}, \quad (33)$$

代入 (26) 式可得

$$\begin{aligned} x_c^2 = & G \cdot \frac{P \cdot \frac{r^2}{A} \cdot K}{P + \frac{V_b}{F}} + \frac{K}{P} (x_p)^2 \\ & - \frac{K}{P + \frac{V_b}{F}} \cdot (x_c)^2 \\ & + \frac{r^2 \cdot L \cdot M}{P + \frac{V_b}{F}} \cdot \frac{L^2 - 1}{12} + (x_c)^2 \\ & + \frac{Q \cdot V_b \cdot G \cdot K}{F \cdot \left( P + \frac{V_b}{F} \right)^2} \cdot \frac{L^2 - 1}{12} + (x_c)^2 \\ & + (x_c - x_p)^2, \end{aligned} \quad (34)$$

而由于  $P$  及  $V_b$  较大, 且当实际光斑的质心在图像坐标原点时,

$$\frac{K}{P} (x_p)^2 - \frac{K}{P + \frac{V_b}{F}} \cdot (x_c)^2,$$

$$\frac{r^2 \cdot L \cdot M}{P + \frac{V_b}{F}} \cdot \frac{L^2 - 1}{12} + (x_c)^2,$$

$$\frac{Q \cdot V_b \cdot G \cdot K \cdot (x_c)^2}{F \cdot \left( P + \frac{V_b}{F} \right)^2}$$

几项值相对非常小, 可以忽略不计, 因此质心的探测误差约等于

$$\begin{aligned} x_c^2 = & G \cdot \frac{P \cdot \frac{r^2}{A} \cdot K}{P + \frac{V_b}{F}} + \frac{Q \cdot V_b \cdot G \cdot K}{F \cdot \left( P + \frac{V_b}{F} \right)^2} \\ & \times \frac{L^2 - 1}{12} + (x_c - x_p)^2. \end{aligned} \quad (35)$$

此时这几项与  $G$  有关的表达式中质心偏差将随着增益的增大而增大, 因此在高增益 EMCCD 响应饱和时的质心探测误差随着增益的增大而增大.

根据以上的分析可以看出入射目标信号光强倍增增益后的电荷没有超过峰值电荷时, 由于读出噪声随着增益的增大而迅速的降低, 质心的探测误差将随着增益的增加而减小, 且当增益增大到一定的程度, 读出噪声的影响几乎可以忽略, 此时的质心探测误差随着增益的增大减小的幅度非常小, 可

以看作保持不变;而随着增益的增大输出电荷达到了峰值电荷也就是 EMCCD 的响应出现饱和时,暗噪声的影响将随着增益的增大逐渐加大,导致质心的探测误差随着增益的增大而增大,因此根据数学理论可知峰值电荷是一个分界点,而此时的增益点为

$$G = \frac{P_{\max}}{Q \cdot N_{\text{mean}}}, \quad (36)$$

其中  $N_{\text{mean}}$  是指目标光斑的平均入射光子数. 当入射光强一定的时候,小于该增益时质心探测误差随着增益的增大而减小,大于此增益时质心探测误差随着增益的增大而增大,这也充分说明了 EMCCD 在弱光探测上更具有优势.

相比较与目前较常使用的基于 ICCD 的 H-S 波前传感器,根据文献 [12] 表明,ICCD 具有较小的动态范围,且由于 ICCD 的 MCP 有通道间干扰,点扩

图 2 仿真的光斑图像 (a) 增益为 1 时仿真的光斑图像,子孔径图像大小为 15 pixels × 15 pixels,  $K = 1 \text{ADU/e}^-$ ,  $Q = 0.9$ , 光斑半径 1.5 pixels, 光斑质心在图像的坐标原点; (b) 由入射的光子所产生的光子噪声; (c) 仿真产生的暗噪声, 均值方差均为 1 个光子/pixel; (d) 仿真的读出噪声, 均值为 0, 起伏方差为  $30e^- \text{ rms}$ ; (e) 增益为 1 时各种噪声及光斑相加产生的子孔径图像; (f) 同样的条件下, 增益为 5 的光斑图像; (g) 同样的条件下, 增益为 10 时的光斑图像; (h) 增益为 100 时的光斑图像

散函数增大,且倍增噪声较高,导致当 ICCD 的像增强器增益较大时,探测信号的信噪比才能达到最优,探测得到的光斑质心精度才渐近趋向于它的正确度.

## 4. 仿真计算

单个子孔径的光斑图像分布符合高斯分布,图 2 是仿真的单个子孔径的图像,目标光斑的平均入射光子数是 150 个,CCD 的光电响应系数为 1 ADU/光子时,光斑高斯半径为 1.5 pixel. 可以看出随着增益的提高目标光斑的对比度有了明显提高.

图 3 所示是高增益时响应未饱和及饱和两种情

况下读出噪声水平不同时质心的探测误差随增益的变化关系,由图可以看出,质心的探测误差随读出噪声的起伏的增大而增大,但是随着增益的增大,读出噪声所造成的误差迅速下降,且从图 3(b)可以看出在入射光子数一定的条件下读出噪声的变化并没有改变质心探测误差的拐点位置,在增益约为 300 时质心探测误差开始随着增益的增大而增大,这也与所推导的公式相符合.

图 4 是高增益时响应未饱和及饱和两种情况下不同的暗噪声水平下质心的探测误差与增益的变化关系,由图可以看出,在响应未饱和时质心探测误差随暗噪声的水平提高而变大,但是随着响应达

图 3 响应未饱和以及高增益时 EMCCD 响应饱和两种情况下不同的读出噪声水平下质心的探测误差与增益的变化关系(仿真条件:子孔径图像大小为 15 pixel  $\times$  15 pixel,光斑的半径为 1.5 pixels,光斑质心在图像的坐标原点,  $Q=0.9$ ,  $F=1.4$ ,  $K=1$ ,暗噪声均值和方差均为水平为 1 个光子/pixel,假定峰值电荷强度为  $7.5 \times 10^5 e^-$ /pixel) (a) 未饱和时,光斑平均入射光子 100 个;(b) 高增益 EMCCD 响应出现饱和时,光斑平均入射光子 3000 个

图 4 像素响应未饱和以及高增益时 EMCCD 响应饱和两种情况下不同暗噪声水平下质心的探测误差与增益的变化关系图(仿真条件:子孔径大小为 15 pixel  $\times$  15 pixel,光斑的半径为 1.5 pixels,光斑质心在坐标原点,  $Q=0.9$ ,  $F=1.4$ ,  $K=1$ ,暗噪声均值分别为 1, 2, 3 个光子/pixel,读出噪声起伏方差为  $60 e^-$  rms,假定峰值电荷强度为  $7.5 \times 10^5 e^-$ /pixel) (a) 未饱和时,光斑平均入射光子 100 个;(b) 高增益 EMCCD 响应出现饱和时,平均入射光子 3000 个

到饱和, 质心探测误差明显的增大, 也就是当相机的响应达到饱和后暗噪声对质心探测误差的影响随着增益的增大逐渐的变大, 同样暗噪声的变化并没有改变质心探测误差的拐点位置, 在图 4(b) 中仍在增益为 300 左右质心探测误差随着增益的增大开始增大, 这也与所推导的公式相符合.

图 5 是在高增益时响应未饱和以及响应饱和两种情况下不同的入射光子数时质心探测误差与增

以看出质心的探测误差在响应未达到饱和时随着增益的增大而减小, 而在响应达到饱和后随着增益的增大而变大, 分别在增益 300, 250, 200, 100 左右质心的探测误差随着增益的增大出现明显的上升趋势, 这也与所推导的公式相符合.

图 6 是在不同增益下质心探测误差随入射光子数的变化关系图, 可以看出, 在增益为 1 时质心探测误差明显大于大增益的质心探测误差. 增益为 100, 500 和 1000 时, 在入射光子较少的时候质心探测误差的差别很小, 而随着入射光子数的不断增加, 大增益时所引起的质心探测误差要高于较小增益所引起的质心探测误差.

图 6 不同增益下质心探测误差随入射光子数的变化关系图 (仿真条件: 子孔径大小为 15 pixel  $\times$  15 pixel, 光斑的半径为 1.5 pixels, 光斑质心在图像坐标原点,  $Q=0.9$ ,  $F=1.4$ ,  $K=1$ , 读出噪声起伏方差为  $60e^-$  rms, 暗噪声均值和起伏方差均为 1 个光子 / pixel, 假定每个像素的峰值电荷强度为  $7.5 \times 10^5 e^-$  / pixel)

图 5 相机响应未饱和以及高增益时 EMCCD 响应饱和两种情况下不同入射光子数时质心的探测误差与增益的变化关系图 (仿真条件: 子孔径大小为 15 pixel  $\times$  15 pixel, 光斑的半径为 1.5 pixels, 光斑质心在图像的坐标原点,  $Q=0.9$ ,  $F=1.4$ ,  $K=1$ , 读出噪声起伏方差为  $60e^-$  rms, 暗噪声均值和起伏方差均为 1 个光子 / pixel, 假定每个像素的峰值电荷强度为  $7.5 \times 10^5 e^-$  / pixel)

(a) 未饱和时, 平均入射光子数分别为 1, 50, 100, 300; (b) 是高增益响应饱和时, 平均入射光子数分别为 3000, 4000, 5000, 8000

益的变化关系, 从整体上来看, 质心的探测误差随着入射光子数的增加而减小, 由图 5(a) 可以看出, 质心探测误差随着增益的增加而减小, 由图 5(b) 可

## 5. 实验结果分析

实验中采用的是 CASCADE128 + 相机, 使用的是 e2v 技术公司的 L3Vision CCD60 芯片陶瓷封装, 当采用背照明工作模式时的量子效率  $Q > 90\%$ , 靶面大小 128 pixels  $\times$  128 pixels, 每像素大小  $24 \mu\text{m} \times 24 \mu\text{m}$ , 读出频率为 12 MHz, 帧传输模式, 输出图像 16 bit, 峰值电荷为  $7.5 \times 10^5 e^-$  / pixel.

图 7 是对所采集的高照度条件下不同增益连续两百帧图像进行的质心误差的统计, 可以看出在增益比较小的时候质心误差随着增益的增大而减小, 在增益大约为 20 时出现饱和, 质心误差开始随着增益的增大而增大. 这与根据所推导的公式进行理论计算的结果是一致的.

图7 在不同的增益下质心误差曲线及理论曲线(理论计算仿真条件:入射光子数 50000,光斑的半径为 1.5 pixels,光斑质心在图像坐标原点,  $Q=0.9$ ,  $F=1.4$ ,  $K=1$ ,读出噪声起伏方差为  $60e^-ms$ ,暗噪声均值和起伏方差均为 1 个光子/pixel,假定每个像素的峰值电荷强度为  $7.5 \times 10^5 e^-/pixel$ )

## 6. 结 论

由于 EMCCD 结构的特点,使得它的噪声源不

同与传统的 CCD 以及 ICCD,因此在自适应光学中,基于 EMCCD 的 H-S 波前传感器与基于普通 CCD 及 ICCD 的 H-S 波前传感器的质心探测误差公式也有所区别.本文首次分析了 EMCCD 的各项噪声源对 H-S 波前传感器的质心探测精度所造成的影响,推导了 EMCCD 的噪声源与质心探测误差的表达式;并详细讨论了增益对质心探测误差的影响,在高增益相机响应未饱和以及高增益时相机响应出现饱和两种情况下分别进行讨论,增益  $G$

$\frac{P_{\max}}{QE \cdot N_{\text{mean}}}$  时质心探测误差随着增益的增大而减小,

而当增益  $G > \frac{P_{\max}}{QE \cdot N_{\text{mean}}}$  时质心探测误差随增益的增大而增大.

此结论对于自适应光学系统中基于 EMCCD 的波前探测器设计及标背景,减阈值等操作具有重要的参考意义.

姜文汉院士对本文提出了很多修改建议,在此表示衷心的感谢.

- [1] Li C H, Xian H, Jiang W H, Rao C H, 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 4199 (in Chinese) [李超宏、鲜浩、姜文汉、饶长辉 2007 物理学报 **56** 4199]
- [2] Jiang W H, Xian H, Yang Z P, Jiang L T, Rao X J, Xu B 1998 *J. Chin. Quantum Electron.* **15** 228 (in Chinese) [姜文汉、鲜浩、杨泽平、姜凌涛、饶学军、许冰 1998 量子电子学报 **15** 228]
- [3] Ning Y, Yu H, Rao C H, Jiang W H 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 4717 (in Chinese) [宁禹、余浩、周虹、饶长辉、姜文汉 2009 物理学报 **58** 4717]
- [4] Ning Y, Zhou H, Yu H, Rao C H, Jiang W H 2009 *Chin. Phys. B* **18** 1089
- [5] Li C H, Xian H, Rao C H 2006 *Opt. Lett.* **31** 2821
- [6] Rao C H, Jiang W H, Ling N 2002 *Opt. Eng.* **41** 534
- [7] Madan S K, Bhaumik B, Vasi J M 1983 *IEEE Trans. Electron*

*Devices*, **ED-30** 694

- [8] Jerram P, Pool P, Bell R, Burt D, Bowling S, Spencer S, Hazelwood M, Moody I 2001 *Sensors and Camera Systems for Scientific, Industrial, and Digital Photography Applications* San Jose, USA, 22—24 Jan. p178
- [9] Tubbs R N, Baldwin J E, Mackay C D, Cox G C 2002 *Astron. Astrophys.* **387** L21
- [10] Cao G R, Yu X 1994 *Opt. Eng.* **33** 2321
- [11] Ma X Y, Rao C H, Zheng H Q, 2009 *Opt. Express* **17**
- [12] Shen F, Jiang W H 2001 *High Power Laser Part. Beams* **13** 397 (in Chinese) [沈锋、姜文汉 2001 强激光与粒子束 **13** 397]
- [13] Hynccek J 2001 *IEEE Trans. Electron. Devices* **48** 2238
- [14] Zhou R Z 1999 *Adaptive Optics* (Beijing: National Defense Industrial Press) p131 (in Chinese) [周仁忠 1999 自适应光学 (北京:国防工业出版社)第 131 页]

# The detection error analysis of Hartmann-Shack wavefront sensor based on electron multiplying charge-coupled devices

Zhang Yan-Yan<sup>1) 2)</sup> Rao Chang-Hui<sup>1)</sup> Li Mei<sup>1)</sup> Ma Xiao-Yu<sup>1) 2)</sup>

1) (*Institute of Optics and Electronics, the Chinese academy of sciences, Chengdu 610029, China*)

2) (*Graduate University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049, China*)

(Received 28 September 2009; revised manuscript received 2 December 2009)

## Abstract

The detection error of Hartmann-Shack (H-S) wavefront sensor is one of the main errors in adaptive optical systems. In this paper, the detection error of H-S wavefront sensor based on the electron multiplying charge-coupled devices (EMCCD) is firstly analyzed and the detection error formula is established. Furthermore, the numerical simulation and experimental results show that the centroid detection error is related to the gain of EMCCD. The centroid detection error decreases with gain increasing when the gain is lower than  $P_{\max} / (Q \cdot N_{\text{mean}})$ . When the gain is higher than  $P_{\max} / (Q \cdot N_{\text{mean}})$ , the centroid detection error increases with the gain increasing, where  $P_{\max}$  is the peak electric charge value of EMCCD,  $Q$  is quantum efficiency,  $N_{\text{mean}}$  is the mean number of incident photons.

**Keywords:** adaptive optics, electron multiplying charge-coupled devices, wave-front sensor, centroid detecting error

**PACC:** 9265, 4285F, 4280Q, 0620D