

具有能量输入/输出的固体层中孤立波的传播及相互作用特性^{*}

满达夫 那仁满都拉[†]

(内蒙古民族大学物理与电子信息学院, 通辽 028043)

(2009 年 3 月 11 日收到, 2009 年 4 月 14 日收到修改稿)

首先利用直接微扰方法, 确定了孤立波的放大或衰减与孤立波的初始幅度以及介质的结构参数之间的关系. 然后利用线性化技术构造出一种四阶精度的差分格式, 并对孤立波在细观结构固体层中传播及不同幅度的孤立波的相互作用进行了数值模拟, 从而得到在适当条件下细观结构固体层中孤立波传播时可以衰减、放大也可以稳定传播, 且相互作用不影响它们这种传播特性.

关键词: 孤立波, 放大, 衰减, 相互作用

PACC: 0340K, 0290

1. 引言

人们长期观测地震波时发现了地震波的放大现象, 详细的频谱分析证明放大现象主要由内部能量引起^[1]. 为了解释这种地震波的放大现象人们引用了断裂力学的概念^[2,3]——伸缩子(dilaton). 伸缩子概念的基本假设是原子之间约束松散介质的负密度涨落(起伏)引起内能的起伏, 也就是说, 伸缩子是短暂的微动力密度涨落, 由于它原子之间约束松散而能够从周围介质吸收能量. 但热力学角度考虑, 不允许伸缩子无限地增加内能, 故必须存在一定的阈值. 当伸缩子中积累的能量达到它的阈值时伸缩子再不能存在, 它破裂而释放储存的能量. 这种破裂意味着一定微裂纹的形成, 而微裂纹的积累最终导致介质的断裂. 我们知道, 在经典理论中把地壳介质一般当作均匀层状介质来处理. 实际上, 地壳介质是一种由许多块状岩体被更薄的界面层连接起来的结构^[1,4], 在长波近似条件下这种结构的介质可看作具有一定细观结构的介质. 波在这种介质中传播时, 波的传播行为受到波的强度和介质细观结构特性的影响. 就是说, 一系列低强度的波可在界面层内产生应力并遗留在界面层内. 这对随后来的波列来讲就形成了一种预应力场. 换句话说来讲, 能量从低强度的波吸收到

介质中, 因而波本身衰减. 随着波的传播, 介质各处形成预应力场且它的分布是不均匀的. 这时对波强度有个阈值, 强度超过这个阈值的波就能够释放界面层中储存的能量而波本身被放大. 因此细观结构固体介质, 比如地壳介质具有明显的频散特性和非线性特性^[5]之外, 还具有能量输入/输出的一种重要特性^[6,7]. 标准的 mKdV 方程不能描述这种介质中孤立波的传播, 必须提出其他模型来描述波传播问题. 文献[1]中研究了细观结构固体层中非线性地震波传播问题, 并根据唯象理论建立了一种基于伸缩子机理的描述非线性波传播的模型

$$u_t + u^n u_x + du_{xxx} = \epsilon f(u), \quad (1)$$

这里 f 是基于伸缩子机理的体力, 它标志着有能量的交换. 它的表达式一般为三次多项式, 即

$$f(u) = -(a_1 u - a_2 u^2 + a_3 u^3), \quad (2)$$

其中 a_1, a_2, a_3 是正常数, ϵ 是小量, d 是频散系数. 基于伸缩子机理的这一模型能够很好地描述像地壳介质这样的细观结构固体层中非线性波传播问题. 因此对该模型的研究具有重要的理论意义和潜在的应用价值, 有望能够解释和说明地震波在地壳介质中传播时产生的一些地震现象. 当 $n = 1$ 时方程(1)是含微扰的 KdV 方程, 它描述有能量交换的非守恒系统中纵波的传播. 文献[1,7,8]中采用伪谱方法研

^{*} 国家自然科学基金(批准号:10862003, 40564001)和内蒙古自治区高等学校科学技术研究基金(批准号: NJZY07139)资助的课题.

[†] E-mail: nmrdltl@126.com

究该系统,并初步给出了孤立波在地壳介质中传播时可能会被放大或衰减的结论.当 $n = 2$ 时方程(1)是含微扰的 mKdV 方程,它描述有能量交换的非守恒系统中非线性 SH 波的传播.据我们了解,目前把地壳介质看作均匀层状或各向异性介质来研究地震波传播规律的文献较多^[9-11],而把地壳介质看作细观结构非线性介质来研究的文献较少,特别是对模型方程(1) $n = 2$ 时描述的非线性波的传播问题,还没有文献进行具体研究.

本文利用微扰 mKdV 方程,详细分析了细观结构固体层中孤立波的传播及相互作用特性.首先,利用直接微扰方法研究微扰 mKdV 方程,确定了孤立波的幅度和速度随时间的变化规律.其次,利用线性化技术我们构造了四阶精度的差分格式,并对孤立波在细观结构固体层中的传播特性及相互作用性质进行了数值模拟,进而给出了反映孤立波传播和相互作用规律的模拟结果.

2. 微扰论结果

研究孤子微扰问题的微扰论方法的种类很多,本文利用颜家王等^[12-14]提出的直接微扰方法.当 $n = 2$ 时方程(1)是含微扰项的 mKdV 方程.为了便于求解该方程,我们对独立变量 x, t 作变换 $t \rightarrow 6\sqrt{6}dt, x \rightarrow \sqrt{6}dx$,则方程(1)可简化为

$$u_t + 6u^2 u_x + u_{xxx} = \varepsilon 6\sqrt{6}d f(u), \quad (3)$$

当 ε 为零时方程(3)的精确孤立波解为

$$u(x, t) = a \operatorname{sech}[\alpha(x - a^2 t)]. \quad (4)$$

按直接微扰方法的基本思想,先引进多重尺度时间变量 $t_n = \varepsilon^n t$ ($n = 1, 2, \dots$),则对时间的偏导数相应地变为

$$\partial_t \rightarrow \partial_{t_0} + \varepsilon \partial_{t_1} + \varepsilon^2 \partial_{t_2} + \dots \quad (5)$$

然后将 u 按渐近级数展开为

$$u = u^{(0)} + \varepsilon u^{(1)} + \varepsilon^2 u^{(2)} + \dots \quad (6)$$

将方程(5)和(6)代入方程(3),比较 ε 的各次幂系数即得各级近似方程

$$u_{t_0}^{(0)} + 6(u^{(0)})^2 u_x^{(0)} + u_{xxx}^{(0)} = 0, \quad (7)$$

$$\begin{aligned} & u_{t_0}^{(1)} + 6(u^{(0)})^2 u_x^{(1)} + 12u^{(0)}u_x^{(0)}u^{(1)} + u_{xxx}^{(1)} \\ & = 6\sqrt{6}d f(u^{(0)}) - u_{t_1}^{(0)}, \end{aligned} \quad (8)$$

.....

零级近似方程(7)就是 mKdV 方程.显然它具有(4)式所示的单孤子解,此解可改写为

$$\begin{aligned} u^{(0)}(x, t_0) &= a \operatorname{sech} z \\ z &= \alpha(x - \xi), \\ \xi_{t_0} &= a^2. \end{aligned} \quad (9)$$

由于微扰的影响(9)式中孤子参数 a, ξ 不是常数,是慢时间变量 $t_1, t_2, \dots$ 的函数.利用文献[12]的结果我们可得到孤子参数 a 和 ξ 所满足的如下微分方程:

$$\begin{aligned} a_{t_1} &= \int_{-\infty}^{\infty} -6\sqrt{6}d (a_1 u_0 - a_2 u_0^2 + a_3 u_0^3) \\ &\quad \times \operatorname{sech} z dz, \quad a_{t_0} = 0, \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \xi_{t_1} &= \frac{1}{a^2} \int_{-\infty}^{\infty} -6\sqrt{6}d (a_1 u_0 - a_2 u_0^2 + a_3 u_0^3) \\ &\quad \times z \operatorname{sech} z dz, \quad \xi_{t_0} = a^2, \end{aligned} \quad (11)$$

这里 u_0 是 $u^{(0)}$,代入方程(10)和(11)积分可得

$$\begin{aligned} a_{t_1} &= -6\sqrt{6}d \left(2a_1 a - \frac{\pi}{2} a_2 a^2 + \frac{4}{3} a_3 a^3 \right), \\ a_{t_0} &= 0, \end{aligned} \quad (12)$$

$$\xi_{t_1} = 0, \quad \xi_{t_0} = a^2. \quad (13)$$

下面我们利用上述结果,在微扰作用下讨论孤立波的幅度和速度的变化规律.前面已经给出 $\xi_{t_1} = 0$,这说明孤子的速度不会随慢时间变量而变化.孤子幅度为 $A = \alpha(t_1)$,代入方程(12)后对 t_1 做逆变换得如下方程:

$$A_{t_1} = -A \left(\frac{4}{3} a_3 A^2 - \frac{\pi}{2} a_2 A + 2a_1 \right). \quad (14)$$

由(10)式可得 $A_t = A_{t_0} + \varepsilon A_{t_1} = \varepsilon A_{t_1}$ 代入方程(14)得

$$A_t = -\frac{1}{\varepsilon} A (A - A_1)(A - A_2), \quad (15)$$

这里

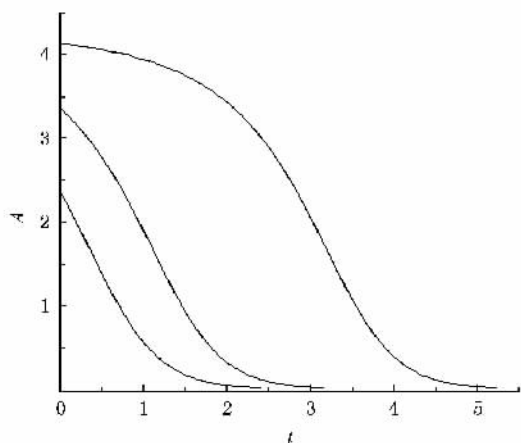
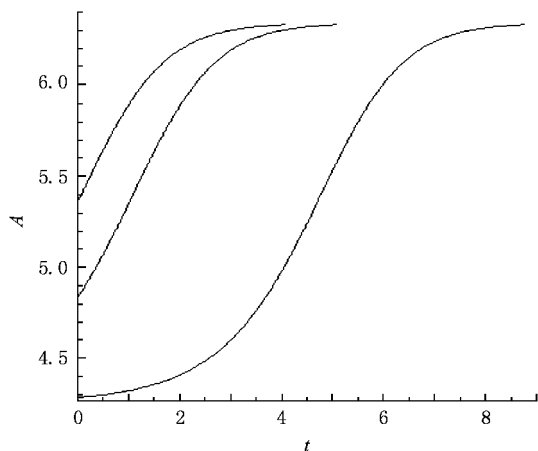
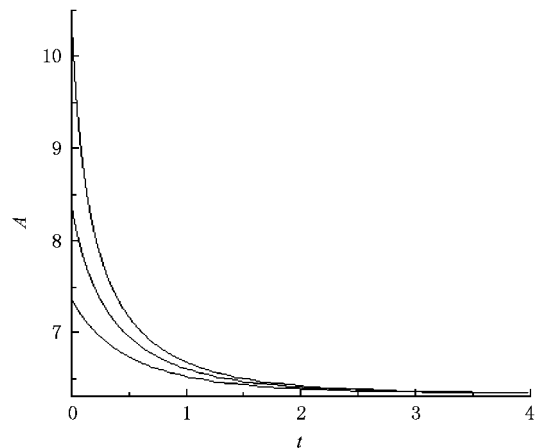
$$A_1 = \frac{1}{16} \frac{3\pi a_2 - \sqrt{9\pi^2 a_2^2 - 384 a_1 a_3}}{a_3}, \quad (16)$$

$$A_2 = \frac{1}{16} \frac{3\pi a_2 + \sqrt{9\pi^2 a_2^2 - 384 a_1 a_3}}{a_3}. \quad (17)$$

对(15)式进行 A 从 A_0 到 A , t 从 0 到 t 的积分可得

$$\begin{aligned} t &= \frac{1}{\varepsilon A_2 (A_1 - A_2)} \ln \left(\frac{A - A_2}{A_0 - A_2} \right) - \frac{1}{\varepsilon A_1 (A_1 - A_2)} \\ &\quad \times \ln \left(\frac{A - A_1}{A_0 - A_1} \right) - \frac{1}{\varepsilon A_1 A_2} \ln \left(\frac{A}{A_0} \right), \end{aligned} \quad (18)$$

这里 A_0 为初始幅度 $0 < \varepsilon \ll 1$. 当 $a_1 = 1.0, a_2 = 0.5, a_3 = 0.0556$ 时 $A_1 \approx 4.2570, A_2 \approx 6.3374$. 取不同初始幅度 A_0 时,孤立波幅度 A 随时间变量的变化

图 1 $A_0 < A_1$ 时孤立波衰减并趋于零图 2 $A_1 < A_0 < A_2$ 时放大并趋于 A_2 图 3 $A_0 > A_2$ 时孤立波衰减并趋于 A_2

容易看出孤立波的幅度变化规律,即孤立波的放大或衰减规律.这就是,如果初始幅度 $A_0 < A_1$,则孤立波衰减并趋于零,如果初始幅度在 $A_1 < A_0 < A_2$,则孤立波被放大并趋于 A_2 ,如果初始幅度 $A_0 > A_2$,则孤立波衰减并趋于 A_2 .

3. 数值模拟结果

数值方法是研究非线性波动方程的主要手段,目前已有多种数值计算方法.其中有限差分方法是思想简捷明了、格式构造方便灵活、易于模拟各种物理性质的有效方法.该方法在非线形波动方程的数值模拟方面有着广泛的应用,这些年在理论和实践上都取得了很大的进展^[15].目前对于 KdV 方程和 mKdV 方程有多种差分格式^[16—20],但对于微扰 KdV 方程和微扰 mKdV 方程,能够适用的有效格式甚少.为此,本文利用文献[18—20]中提出的对非线性项进行线性化处理技术,给出了微扰 mKdV 方程的如下四阶精度的差分格式:

$$au_{m-3}^{n+1} - bu_{m-2}^{n+1} + cu_{m-1}^{n+1} + u_m^{n+1} + du_{m+1}^{n+1} + eu_{m+2}^{n+1} - au_{m+3}^{n+1} = h, \quad (19)$$

其中

$$\begin{aligned} a &= \frac{d\Delta t}{16\Delta x^3}, \\ b &= \frac{\Delta t}{24\Delta x}(u_{m-2}^n)^2 - \frac{d\Delta t}{2\Delta x^3}, \\ c &= \frac{13d\Delta t}{16\Delta x^3} - \frac{\Delta t}{3\Delta x}(u_{m-1}^n)^2, \\ d &= \frac{\Delta t}{3\Delta x}(u_{m+1}^n)^2 - \frac{13d\Delta t}{16\Delta x^3}, \\ e &= \frac{d\Delta t}{2\Delta x^3} - \frac{\Delta t}{24\Delta x}(u_{m+2}^n)^2, \\ h &= u_m^n - \frac{\Delta t d}{16\Delta x^3} [8(u_{m+2}^n - u_{m-2}^n) - (u_{m+3}^n - u_{m-3}^n) - 13(u_{m+1}^n - u_{m-1}^n)] \\ &\quad + \frac{\Delta t}{72\Delta x^3} [(u_{m-2}^n)^3 - 8(u_{m-1}^n)^3 + 8(u_{m+1}^n)^3 - (u_{m+2}^n)^3] \\ &\quad + \epsilon \Delta t [a_1 u_m^n - a_2 (u_m^n)^2 + a_3 (u_m^n)^3]. \end{aligned}$$

方程(19)是线性差分方程组,它的系数矩阵为大型稀疏七对角带形矩阵,因此我们可以采用直接解法.我们选取 $a_1 = 1$, $a_2 = 0.5$, $a_3 = 0.0556$, $d = 0.5$ 和 $\epsilon = 0.1$, 空间步长 $\Delta x = 0.1-0.05$, 时间步长 $\Delta t = 10^{-5}-10^{-6}$, 初始条件取为 mKdV 方程的解 $u(x, t =$

$0) = \sqrt{6}d \operatorname{sech}d(x - x_0)$ 这里 x_0 表示初始位置. 为了和微扰方法得到的结果相比较, 我们选择三种不同的初始幅度进行了数值模拟, 结果如图 4、图 5、图 6 和图 7 所示.

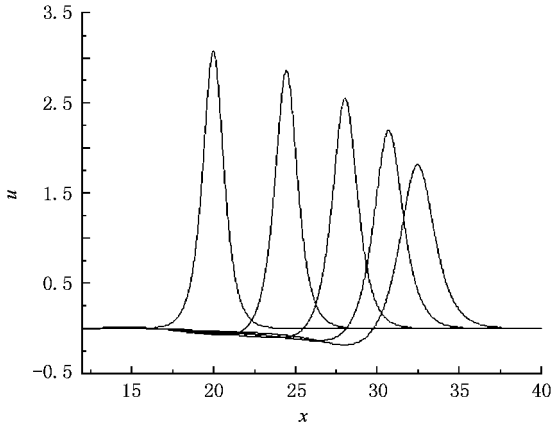


图 4 $A_0 < A_1$ 时孤立波衰减并趋于零

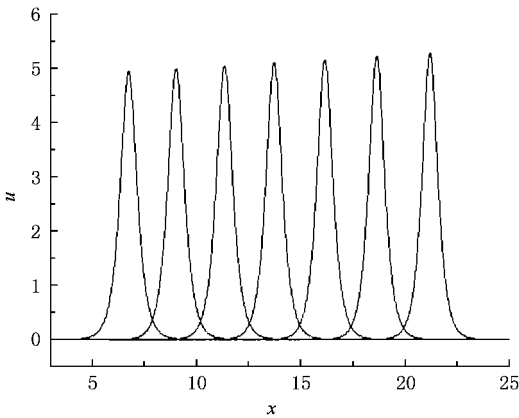


图 5 $A_1 < A_0 < A_2$ 时放大并趋于 A_2

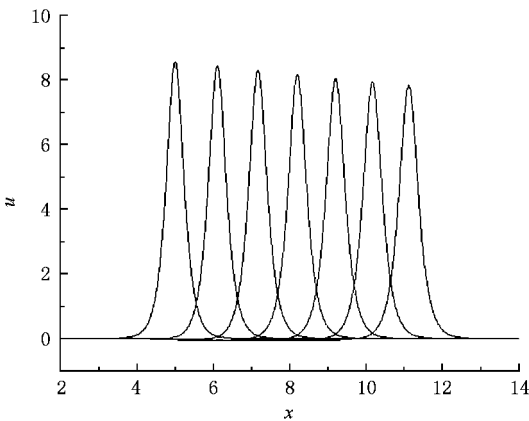


图 6 $A_0 > A_2$ 时孤立波衰减并趋于 A_2

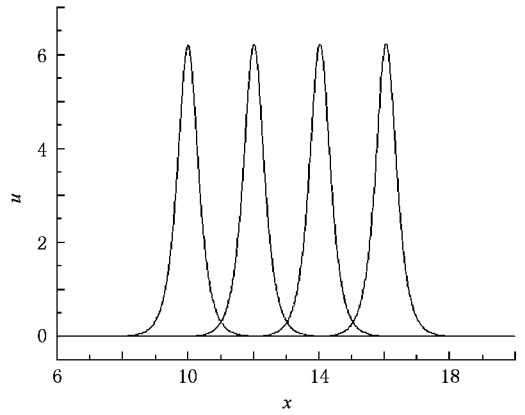


图 7 衰减或放大后的稳定传播

图 4 表示的是初始振幅为 3.12, 初始位置在 20 时的孤立波的传播图像, 由于初始幅度 $A_0 < A_1$, 孤立波衰减并趋于零. 图 5 表示的是初始振幅为 5.00, 初始位置在 7 时的孤立波传播图像, 由于 $A_1 < A_0 < A_2$, 孤立波被放大并趋于 A_2 , 然后可以稳定传播. 图 6 表示的是初始振幅为 8.47, 初始位置在 5 时的孤立波传播图像, 由于 $A_0 > A_2$, 孤立波衰减并趋于 A_2 , 之后还可以稳定传播. 图 7 是孤立波放大或衰减之后的稳定传播图像. 由此可见, 数值方法给出的孤立波传播时幅度的变化规律与前面用微扰方法所得到的结果十分吻合. 因此, 利用此格式对微扰 mKdV 方程进行数值模拟是有效的. 两种方法给出的结果反映, 细观结构固体层中孤立波可以衰减、放大也可以稳定传播. 孤立波被放大还是衰减取决于孤立波的初始幅度以及固体介质的结构参数.

下面我们对细观结构固体层中传播孤立波的相互作用进行数值分析. 图 8 表示的是初始幅度分别为 4.85 和 2.77 的两个孤立波的相互作用情况. 图 9 表示的是初始幅度分别为 7.79 和 4.85 的两个孤立波的相互作用情况. 我们容易看出幅度 $A_0 < A_1$ 的孤立波还是衰减并趋于零, 幅度 $A_1 < A_0 < A_2$ 的孤立波还是被放大并趋于 A_2 , 然后稳定传播, 而幅度 $A_0 > A_2$ 的孤立波还是衰减并趋于 A_2 , 然后还能稳定传播. 我们还研究了其他情况, 所得到的结果与上述结果类此. 由此可见, 在细观结构固体层中孤立波的相互作用不会影响孤立波的衰减、放大及稳定传播的基本规律.

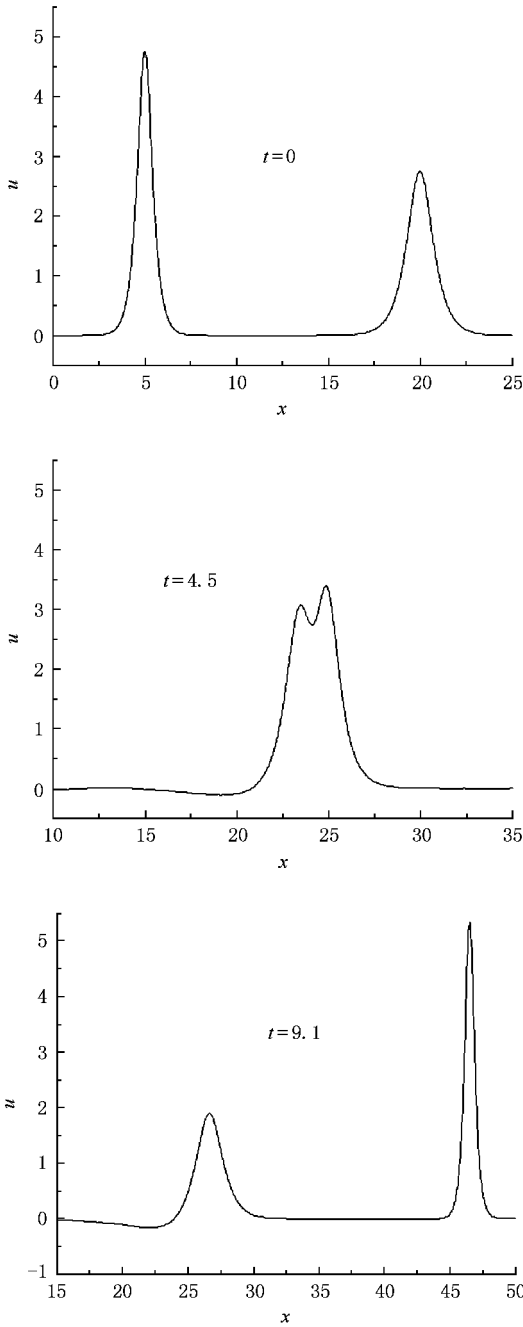


图 8 初始幅度 $A_1 < A_0 < A_2$ 和 $A_0 < A_1$ 的两个孤立波的相互作用

4. 结 论

细观结构固体层中非线性波传播问题可用含微扰项的 mKdV 方程来描述. 由于微扰项的存在, 对该方程的精确求解具有很大的难度. 本文首先利用直接微扰方法, 得到了孤立波的放大或衰减与孤立波的初始幅度以及介质的结构参数之间的关系. 然后利用线性化技术构造出了一种四阶精度的差分格式,

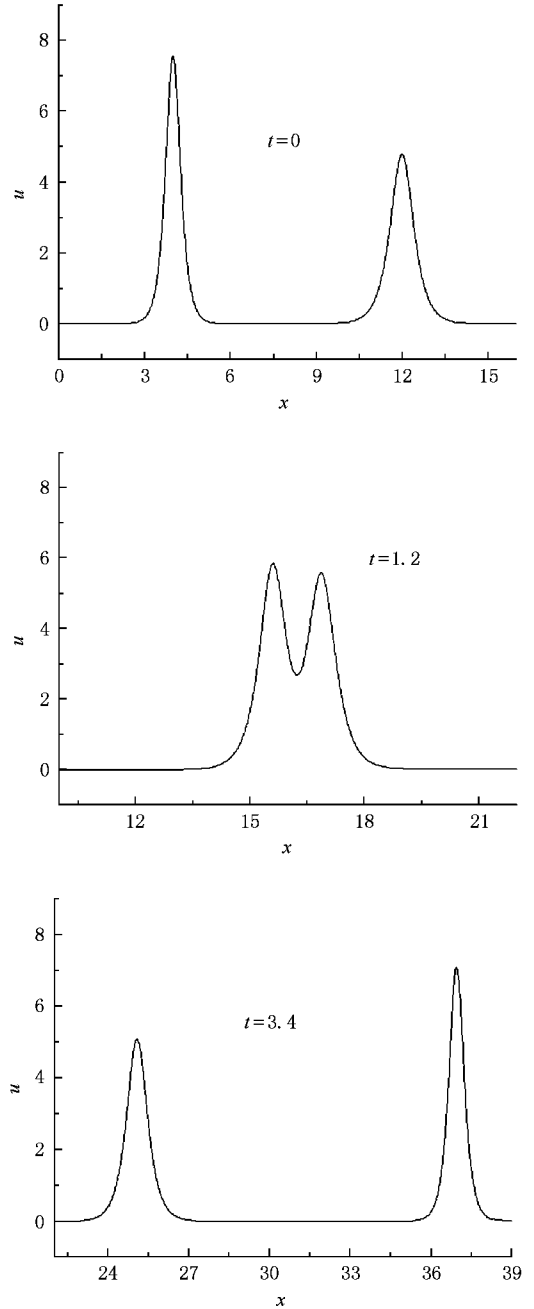


图 9 初始幅度 $A_0 > A_2$ 和 $A_1 < A_0 < A_2$ 的两个孤立波的相互作用

并对孤立波在细观结构固体层中被放大或衰减特性进行了数值模拟, 所得结果与微扰方法得到的结果符合得很好. 同时对细观结构固体层中传播的不同初始幅度的孤立波的相互作用进行了数值模拟, 结果表明, 在适当条件下细观结构固体层中孤立波传播时可以衰减、放大也可以稳定传播, 孤立波的相互作用不会影响它们这种传播特性. 这些结果对解释和说明地震波在地壳介质中传播时产生的一些地震现象, 具有重要的理论意义和潜在的应用价值.

- [1] Engelbrecht J , Khamidullin Y 1988 *Phys. Earth Planet. Inter.* **50** 39
- [2] Zhurkov S N 1983 *Sov. Phys. Solid State* **25** 1797
- [3] Petrov V A 1983 *Sov. Phys. Solid State* **25** 1800
- [4] Engelbrecht J , Peipman T 1992 *Wave Motion* **16** 173
- [5] Engelbrecht J 1983 *Nonlinear Wave Processes of Deformation in Solids* (Boston : Pitman)
- [6] Sadoyski M A , Nikolaev A V 1982 *Vestn. Akad. Nauk SSSR* **1** 57
- [7] Savina N G , Tipisev S Ya , Lin'kov E M , Yanovskaya T B 1984 *Izv. Akad. Nauk SSSR Fiz. Zemli* **8** 3
- [8] Porubov A V , Gursky V V , Maugin G A 2003 *Proc. Estonian Acad. Sci. Phys. Math.* **52** 85
- [9] Du Q Z 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 4428 (in Chinese) [杜启振 2004 物理学报 **53** 4428]
- [10] Du Q Z , Liu L L , Sun J B 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 6143 (in Chinese) [杜启振、刘莲莲、孙晶波 2007 物理学报 **56** 6143]
- [11] Liu J X , Cui Z W , Wang K X 2007 *Chin. Phys.* **16** 2180
- [12] Yan J R , Tang Y 1996 *Phys. Rev. E* **54** 6816
- [13] Zhao Y M , Yan J R 1999 *Acta Phys. Sin.* **48** 1976 (in Chinese) [赵永明、颜家壬 1999 物理学报 **48** 1976]
- [14] Pan L X , Yu H Y , Yan J R 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 1316 (in Chinese) [潘留仙、俞慧友、颜家壬 2008 物理学报 **57** 1316]
- [15] Zhang W S 2006 *Finite difference methods for partial differential equation in science computation* (Beijing : Higher Education Press) [张文生 2006 科学计算中的偏微分方程有限差分法 (北京 : 高等教育出版社)]
- [16] Li Y , Li X 1995 *Journal of Sichuan University (Natural Science Edition)* **32** 632 (in Chinese) [黎 益、黎 薰 1995 四川大学学报 (自然科学版) **32** 632]
- [17] Li J Y , Abudurexiti Abuduwalli 2007 *Chinese Journal of Engineering Mathematics* **24** 1137 [李家永、阿不都热西提 阿不都外力 2007 工程数学学报 **24** 1137]
- [18] Cao Q J 1997 *Journal of Liaoning Normal University (Natural Science Edition)* **20** 1 (in Chinese) [曹庆杰 1997 辽宁师范大学学报 (自然科学版) **20** 1]
- [19] Zhang T D , Zuo J M , Lu T C , Cao Q J 2006 *Chinese Journal of Engineering Mathematics* **23** 780 [张天德、左进明、鲁统超、曹庆杰 2006 工程数学学报 **23** 780]
- [20] Zhang T D , Lu T C , Zuo J M , Cao Q J 2006 *J. Sys. Sci. & Math. Scis.* **25** 658 (in Chinese) [张天德、鲁统超、左进明、曹庆杰 2005 系统科学与数学 **25** 658]

Propagation and interaction property of solitary waves in a solid layer with energy influx^{*}

Mandafu Naranmandula[†]

(College of Physics and Electronic Information , Inner Mongolia University for Nationalities , Tongliao 028043 , China)

(Received 11 March 2009 ; revised manuscript received 14 April 2009)

Abstract

First , the relationships between the amplification or the attenuation of solitary waves and the initial amplitude of solitary waves as well as the structure parameters of the media are determined by direct perturbation method. Second , the solitary wave propagation in a microstructured solid layer is solved numerically using a four-order difference scheme constructed by linearization technique , and also the interaction of the solitary waves with different amplitudes are simulated. As a result , it is demonstrated that the solitary waves , under proper conditions , could be amplified or attenuated , even the solitary waves can propagate steadily in the microstructured solid layer , and the interaction of solitary waves does not influence their propagation characteristics.

Keywords : solitary wave , amplification , attenuation , interaction

PACC : 0340K , 0290

^{*} Project supported by the National Natural Science Foundation of China(Grant Nos. 10862003 , 40564001) and the Higher School Science and Technology Research Foundation of Inner Mongolia Autonomous Region(Grant No. NJZY07139).

[†] E-mail : nrmddl@126.com