

有边界条件的忆阻元件模型及其性质^{*}

张 旭 周玉泽 闭 强 杨兴华 祖云霄[†]

(北京邮电大学电子工程学院, 北京 100876)
(2009 年 12 月 23 日收到; 2010 年 4 月 12 日收到修改稿)

对第四类基本电路元件——忆阻元件的基本特性进行了研究, 分别建立了无边界条件和有边界条件的忆阻元件的积分形式的数学模型. 对有边界条件的数学模型进行了仿真, 分析了有边界条件下电源频率和掺杂比、初始掺杂宽度等模型参数对电流、电压电流关系、磁链电荷关系等元件特性的影响, 得出了相关的结论.

关键词: 忆阻元件, 边界条件, 数学模型, 性质
PACC: 8160C

1. 引 言

1971 年 Chua 根据电路元件端口变量间关系的结构完整性, 提出了存在直接关联电荷和磁链的第四类基本的无源电路元件——忆阻元件, 并论述了忆阻元件广泛的潜在用途^[1], 随后又于 1976 年对忆阻元件的诸多性质和忆阻系统进行了研究^[2]. 但这一重大发现很快被人们遗忘, 因为并没有实际的无源忆阻元件被制造出来^[3]. 直到 30 多年后的 2008 年, 惠普实验室成功制作出了基于金属和金属氧化物的忆阻元件, 并建立了忆阻元件的微分数学模型^[4], 才使这一话题又回到了人们的视线中^[5-15].

由惠普实验室提出的忆阻元件模型, 能在无边界条件下完全描述单个忆阻元件的电路特性, 但在有边界的条件下, 当元件的状态变量 w 处于边界时, 电流对状态变量不再具有控制作用, 微分模型中的状态变量微分关系不存在. 这说明微分数学模型并不能完全描述这一元件, 据此本文对这一问题进行了研究, 提出了元件的积分模型, 并研究了有边界条件的元件特性, 以及各个参量之间的关系.

2. 有边界条件的忆阻元件模型的建立

2.1. 流控型忆阻元件简介

惠普实验室制作了忆阻元件的基本模型, 对其

修正后的模型如图 1 所示.

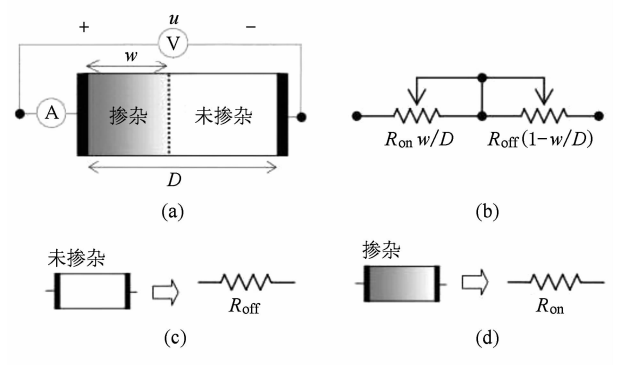


图 1 忆阻元件的基本模型

图 1(a) 中 D 为忆阻元件的长度, w 表示元件的掺杂宽度. 元件总电阻等于掺杂部分电阻与未掺杂部分电阻的阻值之和^[3], 如图 1(b) 所示. 掺杂部分的电阻率小于未掺杂部分的电阻率^[3], 掺杂宽度 w 可以改变. 设元件的瞬时总电阻为 R , 在如图 1(a) 所示电压参考方向下, 当 $u > 0$ 时, 有与 u 参考方向一致(向右)的电流通过元件内部, 掺杂宽度向右移动, w 增大, R 变小; 当 $u < 0$ 时, 有与 u 参考方向相反(向左)的电流通过元件内部, 掺杂宽度向左移动, w 减小, R 变大. 电流与掺杂宽度变化率成线性关系^[3], 图 1(c) 和图 1(d) 是两种极限情况. 图 1(c) 是全部未掺杂的情况, 此时元件的电阻值最大, 用 R_{off} 表示, 图 1(d) 是全部掺杂的情况, 此时元件的电阻值最小, 用 R_{on} 表示.

^{*} 北京邮电大学大学生创新性实验计划资助的课题.
[†] 通讯联系人. E-mail: zuoyx@mail.tsinghua.edu.cn

根据以上模型,惠普实验室得出了微分形式的元件数学模型^[4]为

$$u(t) = \left[R_{\text{on}} \frac{w(t)}{D} + R_{\text{off}} \left(1 - \frac{w(t)}{D} \right) \right] i(t), \quad (1)$$

$$\frac{dw(t)}{dt} = \mu_v \frac{R_{\text{on}}}{D} i(t), \quad (2)$$

(2)式中的 μ_v 是表示离子在均匀场中移动情况的常数.显然,只有 $w(t) \in (0, D)$ 时方程(2)才有意义,而这也恰恰决定了这一模型应用的局限性.

2.2. 无边界条件的忆阻元件积分模型

由于惠普实验室得出的元件数学模型的局限性,因此本文研究电压激励下的有边界条件的忆阻元件模型.

首先考虑初始条件,设初始状态不为0,即 $w(t)|_{t=0} \neq 0$,并设电压激励在 $t \geq 0^+$ 时刻开始作用,即

$$u(t)|_{t=0^-} = 0, u(t)|_{t=0^+} \neq 0,$$

$$i(t)|_{t=0^-} = 0, i(t)|_{t=0^+} \neq 0.$$

因为通过元件的电荷量为电流的积分,不能产生突变,所以 $q(t)|_{t=0} = 0$.

由(2)式整理得

$$i(t) = \frac{D}{\mu_v R_{\text{on}}} \cdot \frac{dw(t)}{dt}. \quad (3)$$

将(3)式代入(1)式得

$$u(t) = \left[R_{\text{on}} \frac{w(t)}{D} + R_{\text{off}} \left(1 - \frac{w(t)}{D} \right) \right] \frac{D}{\mu_v R_{\text{on}}} \cdot \frac{dw(t)}{dt}. \quad (4)$$

在不考虑边界条件下对方程(4)两边进行积分得

$$\begin{aligned} \int_0^t u(t) dt &= \left(\frac{1}{2\mu_v} - \frac{R_{\text{off}}}{2R_{\text{on}}\mu_v} \right) w^2(t) + \frac{DR_{\text{off}}}{R_{\text{on}}\mu_v} w(t) \\ &+ \left[\frac{R_{\text{off}}}{2R_{\text{on}}\mu_v} w^2(0) - \frac{1}{2\mu_v} w^2(0) \right. \\ &\left. - \frac{DR_{\text{off}}}{R_{\text{on}}\mu_v} w(0) \right]. \end{aligned} \quad (5)$$

可见,(5)式是一个关于 $w(t)$ 的二阶代数方程,求解可得

$$w(t) = \pm \sqrt{\int_0^t \frac{u(t) dt}{A} + \frac{B^2}{4A^2} - \frac{C}{A} - \frac{B}{2A}},$$

其中

$$A = \frac{1}{2\mu_v} - \frac{R_{\text{off}}}{2R_{\text{on}}\mu_v},$$

$$B = \frac{DR_{\text{off}}}{R_{\text{on}}\mu_v},$$

$$C = \frac{R_{\text{off}}}{2R_{\text{on}}\mu_v} w^2(0) - \frac{1}{2\mu_v} w^2(0) - \frac{DR_{\text{off}}}{R_{\text{on}}\mu_v} w(0).$$

当有边界时, w 的取值范围是0到 D .由于参数 $-\frac{B}{2A} > D$,为使 w 在取值范围之内,方程右边第一项取负号,由此得到掺杂宽度 w 与电压 u 的关系如下:

$$w(t) = - \sqrt{\int_0^t \frac{u(t) dt}{A} + \frac{B^2}{4A^2} - \frac{C}{A} - \frac{B}{2A}}. \quad (6)$$

用类似的方法得到电流、电荷与激励电压 u 之间的关系如下:

$$i(t) = - \frac{D}{2\mu_v R_{\text{on}} A} \cdot \frac{1}{\sqrt{\int_0^t \frac{u(t) dt}{A} + \frac{B^2}{4A^2} - \frac{C}{A}}} u(t), \quad (7)$$

$$\begin{aligned} q(t) &= \int_{-\infty}^t i(t) dt = \int_0^t i(t) dt \\ &= \frac{D}{\mu_v R_{\text{on}}} [w(t) - w(0)]. \end{aligned} \quad (8)$$

最后,得到 ψ - q 的关系方程为

$$\begin{aligned} \psi(t) &= \int_0^t u(t) dt = \left(\frac{\mu_v R_{\text{on}}^2}{2D^2} - \frac{R_{\text{off}}\mu_v R_{\text{on}}}{2D^2} \right) \\ &\times [q^2(t) - q^2(0)] \\ &+ \left(R_{\text{off}} + \frac{R_{\text{on}} - R_{\text{off}}}{D} w(0) \right) \\ &\times [q(t) - q(0)]. \end{aligned} \quad (9)$$

令

$$\alpha = \frac{R_{\text{on}}\mu_v (R_{\text{on}} - R_{\text{off}})}{2D^2},$$

$$\beta = R_{\text{off}} + \frac{R_{\text{on}} - R_{\text{off}}}{D} w(0),$$

$$\gamma = -\alpha q^2(0) - \beta q(0),$$

整理得到

$$\psi(t) = \alpha q^2(t) + \beta q(t) + \gamma. \quad (10)$$

由(10)式可以看出,磁链与电荷之间的关系是过原点的二次方函数关系,符合忆阻元件定义的非线性关系.因此,可以使用积分模型描述忆阻元件在无边界条件时的特性.

2.3. 有边界时元件积分模型的修正

如前所述,方程(2)在 $w(t) \in (0,D)$ 条件下才成立,当超出这个范围时,例如,某时刻 $w(t) = 0$ 或 $w(t) = D$,则此时的忆阻元件等效为一个无记忆的线性电阻元件,阻值分别为 R_{off} 或 R_{on} .我们将这两种状态分别称为最大电阻状态和最小电阻状态,并统称为边界状态.

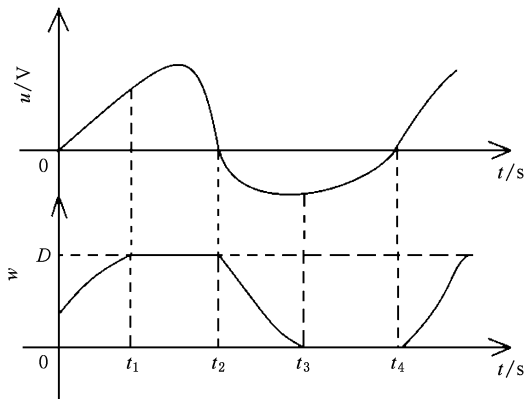


图2 w 与 u 关系示意图

图2是状态变量 w 在激励电压下达到最大电阻状态和最小电阻状态的示意图.如图2所示,在 $[0-t_1]$, $[t_2-t_3]$ 等时间段内, $w(t) \in (0,D)$,方程(2)适用,而在时间段 $[t_1-t_2]$ 和 $[t_3-t_4]$,元件分别处于最大电阻状态和最小电阻状态,此时 w 与 u 无关,方程(2)不再适用.当元件处于这两种状态时,其电阻不受电流控制,所以必须对积分模型进行修正.

根据元件的瞬时状态是否满足(2)式,将时间轴分成 N 段,对其中满足(2)式的 N_1 个时间段的电压值进行积分,然后求和得到

$$\int_0^t u(t) dt = \sum_{i=1}^{N_1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} u_i(t) dt, \tag{11}$$

其中,对每一个满足(2)式的时间段 $[t_i-t_{i+1}]$ 上的

电压积分 $\int_{t_i}^{t_{i+1}} u_i(t) dt$ 进行修正,即

$$\begin{aligned} \int_{t_i}^t u_i(t) dt = & \left(\frac{1}{2\mu_v} - \frac{R_{\text{off}}}{2R_{\text{on}}\mu_v} \right) w^2(t) + \frac{DR_{\text{off}}}{R_{\text{on}}\mu_v} w(t) \\ & + \left[\frac{R_{\text{off}}}{2R_{\text{on}}\mu_v} w^2(t_i) - \frac{1}{2\mu_v} w^2(t_i) \right. \\ & \left. - \frac{DR_{\text{off}}}{R_{\text{on}}\mu_v} w(t_i) \right]. \end{aligned} \tag{12}$$

可以看出,对(11)式所述的变上限积分函数,

在修正的(12)式中,积分下限0变为 t_i ,这是分段积分导致积分下限变化的结果,而且由于边界条件的限定, $w(t_i)$ 只能是0或 D ,并要求 $t_i \neq 0$.相应地,(7),(8),(9),(10)式中的电压积分关系都应被修正.根据欧姆定律可写出流过元件的电流的分段表示形式为

$$i(t) = \begin{cases} -\frac{D}{2\mu_v R_{\text{on}} A} \frac{1}{\sqrt{\frac{\int_{t_i}^t u(t) dt}{A} + \frac{B^2}{4A^2} - \frac{C}{A}}} u(t), \\ w \in (0,D), \\ u(t)/R_{\text{off}}, & w = 0, \\ u(t)/R_{\text{on}}, & w = D. \end{cases} \tag{13}$$

这样就得到了有边界条件的忆阻元件积分模型.

3. 激励和模型参数对元件特性的影响

影响元件特性的参数很多,本文研究在具有现实意义的正弦电压激励下,激励电压频率 f 、掺杂电阻比和初始掺杂宽度 w_0 对元件特性的影响.对相对掺杂宽度 w/D 、电流 i 、电压电流关系 $u-i$ 、电荷磁链关系 $\psi-q$ 等进行仿真及分析.

掺杂电阻比定义为元件在最大电阻状态下和最小电阻状态下的电阻值之比.它是描述元件所掺杂质情况的重要指标.本文用 R_{rate} 表示掺杂电阻比,即 $R_{\text{rate}} = R_{\text{off}}/R_{\text{on}}$.

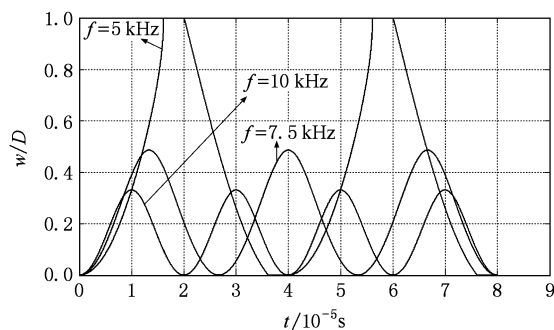
3.1. 正弦电压激励的频率对元件特性的影响

3.1.1. 对 w/D 的影响

图3所示为不同电压频率下 $w/D-t$ 的关系曲线.可以看出,当正弦电压激励的频率减小时, w/D 的变化幅度增大.由(6)式可知,这是由于 w 的变化范围受到电压激励积分的影响.频率减小,每次单向流过元件的电流时间变长,流过元件的电荷量增加.因此 w 的变化范围随电压频率的减小而增大.当频率减小到一定程度时,元件处于最大电阻状态或最小电阻状态,此时元件变为无记忆的线性电阻.

3.1.2. 对 i 的影响

图4为不同电压频率下 $i-t$ 关系曲线.可以看出,在频率为5 kHz时,元件能够达到最大电阻状态和最小电阻状态.元件处于最小电阻状态时,元件电阻最小,电流随电压迅速变化,并达到一个很大

图3 频率对 w/D 的影响

的电流峰值. 而在频率为 7.5 kHz 和 10 kHz 时, 元件不会达到最大电阻状态和最小电阻状态, 此时电流的波形接近电压的波形. 频率越高, 电流的波形越接近电压的波形, 电流值越小. 这体现出了有边界的忆阻元件模型具有天然的低通滤波特性.

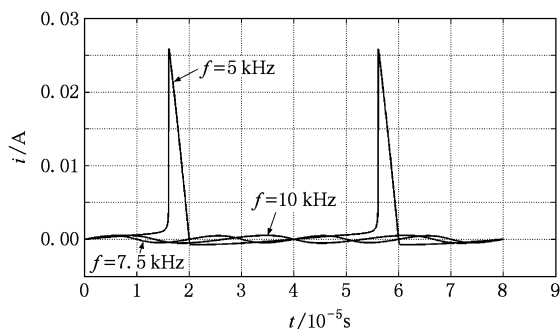


图4 频率对电流的影响

由 3.1.1 分析可知, 在频率升高时, w 的变化范围减小. 因此, 频率越高, 元件就越接近于无记忆的线性电阻, 这与电流仿真结果一致.

3.1.3. 对 $u-i$ 关系的影响

图 5 为不同电压频率下 $u-i$ 关系曲线. 可以看出, 在达到边界状态之一的最小电阻状态时, 电流急剧增加, 而未达到边界状态时, 电流随电压缓慢变化. 同时, 相同激励下, 元件未达到边界状态的电流电压波形较达到最小电阻状态时的电流电压波形的变化小. 为了显示清晰, 图中 $f = 7.5$ kHz 和 10 kHz 情况下的电流值放大了 30 倍.

通过对比可以看出, 频率越高, 电压电流波形就越接近于直线, 即电压电流的关系就越接近线性关系.

3.1.4. 对 $\psi-q$ 关系的影响

图 6 为不同电压频率下 $\psi-q$ 关系曲线. 可以看出, 不同电压频率下 $\psi-q$ 关系曲线重合在一起, 所

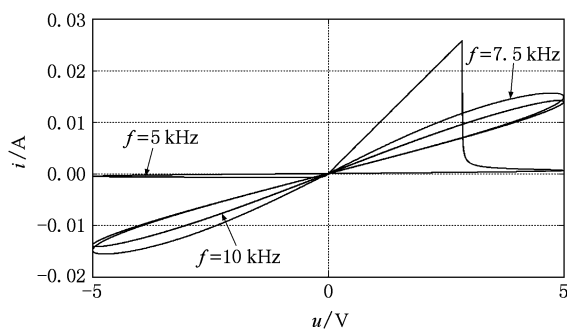


图5 频率对与电压电流关系的影响

以, $\psi-q$ 关系不受电压激励频率的影响, 这与 (10) 式的结果是一致的.

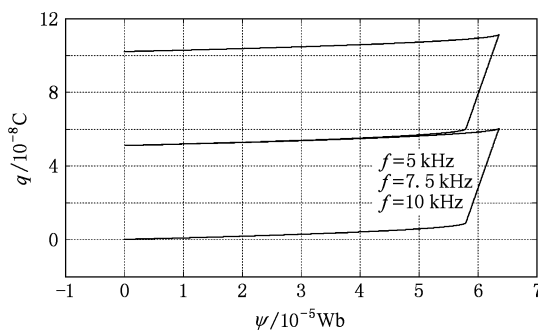


图6 频率对磁链电荷关系的影响

3.2. 掺杂电阻比 R_{rate} 对元件特性的影响

3.2.1. 对 w/D 的影响

图 7 为不同 R_{rate} 下 $w/D-t$ 的关系曲线. 由图可知, 当 R_{on} 一定而 R_{rate} 增大时, w/D 曲线的幅值减小. 另外, R_{rate} 越小, 元件越容易达到边界状态. 由于在 R_{on} 一定时, 改变 R_{rate} 的值相当于改变了 R_{off} 的值, 因此, 由 (1) 式可知: 在相同电压激励下, R_{off} 的值越小, 电流的幅值越大. 同时, 由 (2) 式可知: 通过忆阻元件的电流越大, w 的时间变化率就越大, 即在一定时间内 w 的变化范围越大. 所以, 当 R_{off} 较小时, 元件达到边界状态的可能性越大. 因此, 理论分析与仿真结果相符.

3.2.2. 对 i 的影响

图 8 为不同 R_{rate} 下的 $i-t$ 关系曲线. 可以看出, $R_{\text{rate}} = 100$ 和 125 时与 $R_{\text{rate}} = 200$ 时的 $i-t$ 曲线不同. $R_{\text{rate}} = 100$ 和 125 时, 元件会达到最小电阻状态, 而 $R_{\text{rate}} = 200$ 时不会达到最小电阻状态. 元件未达到最小电阻状态时, 电阻较大, 流过的电流较小, 而达到最小电阻状态时, 电流很大, 电流图像呈现正弦波

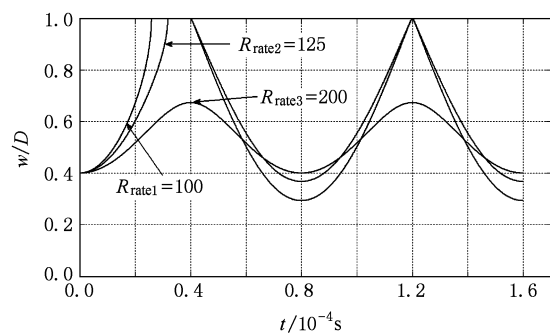


图 7 掺杂电阻比对 w/D 的影响

的形状,说明元件是无记忆的线性电阻. R_{rate} 越小,元件越早达到边界状态.

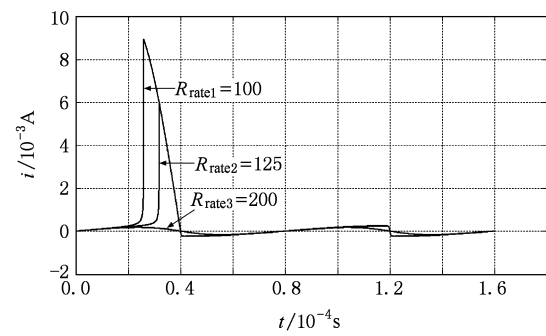


图 8 掺杂电阻比对电流的影响

3.2.3. 对 $u-i$ 关系的影响

图 9 为不同 R_{rate} 下的 $u-i$ 关系曲线. 由 (13) 式可知,元件达到最小电阻状态时的电流远大于未达到最小电阻状态时的电流. 由于在 R_{on} 一定的条件下, R_{rate} 主要受 R_{off} 的影响. 而由 (1) 式可知,当 R_{off} 增大时,在相同电压激励下流过元件的电流减小,所以元件达到最小电阻状态的可能性变小. 因此在图 9 中, $R_{\text{rate}} = 100$ 和 125 时的电流远大于 $R_{\text{rate}} = 200$ 时的电流. 但当电压改变极性时,元件均返回非最小电阻状态,此时三条曲线几乎重合.

3.2.4. 对 $\psi-q$ 关系的影响

图 10 为不同 R_{rate} 下的 $\psi-q$ 关系曲线. 可以看出:在未达到边界状态时,若 R_{rate} 增大,则 $\psi-q$ 曲线的斜率减小. 因为在 R_{on} 一定的条件下,当 R_{rate} 增大时,对应着 R_{off} 增大. 由 (1) 式可知, R_{off} 的增大使同一电压激励下的电流减小,则 q 随之减小,但 ψ 并没有改变. 因此 $\psi-q$ 曲线的斜率随 R_{rate} 的增大而减小. 元件达到边界状态时, $\psi-q$ 曲线变成直线,这是由于在边界状态下,忆阻元件变为无记忆的线性电阻元件. 而在 R_{on} 一定时,忆阻元件有相同的最小电阻状

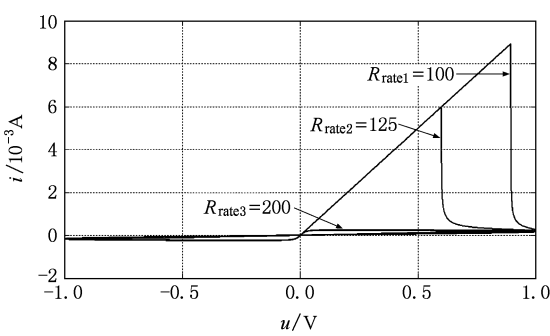


图 9 掺杂电阻比对 $u-i$ 关系的影响

态阻值,所以 $R_{\text{rate}} = 100$ 和 125 时对应的直线部分的斜率相同.

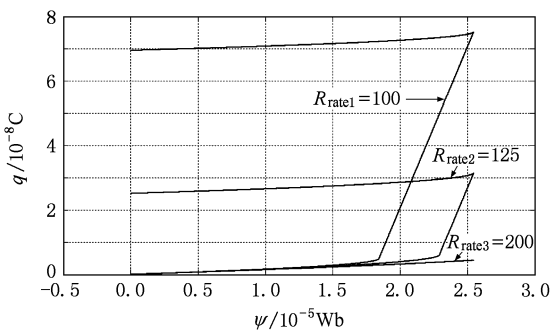


图 10 掺杂电阻比对 $\psi-q$ 关系的影响

3.3. 初始掺杂宽度 w_0 对元件特性的影响

元件掺杂宽度的初始值 w_0 是一个可以预置的变量,研究这一变量的性质,对元件的初始化非常有益. 本文用 $w_{\text{rate}} = w_0/D$ 表示元件的初始相对掺杂宽度. 显然, $w_{\text{rate}} = 1$ 表示元件处于最小电阻状态. $w_{\text{rate}} = 0$ 表示元件处于最大电阻状态. 下面的研究均以相同的电压激励和忆阻元件的其他参数均相同作为前提条件.

3.3.1. 对 w/D 的影响

w/D 随初始参杂宽度的变化如图 11 所示. 可以看出,元件会达到最小电阻状态,且同一元件在不同初始掺杂宽度下第一次离开最小电阻状态之后 $w/D-t$ 曲线重合,并且再次到达最小电阻状态时不会停留,而是马上离开. 这是由于忆阻元件的相对掺杂宽度是随电压激励的极性而定的,而不同初始掺杂宽度的元件,达到最小电阻状态后相对掺杂宽度保持不变,并在电压激励的极性变化时刻开始减小. 此时,根据分段积分模型,各元件具有相同的初始状态值. 又由于同一元件其掺杂电阻比、元件宽

度等其他参数一致,所以在此之后其相对掺杂宽度变化完全相同,各条曲线重叠成一条曲线,即不同初始状态的元件,在达到最小电阻状态后, w/D 具有相同的变化规律.

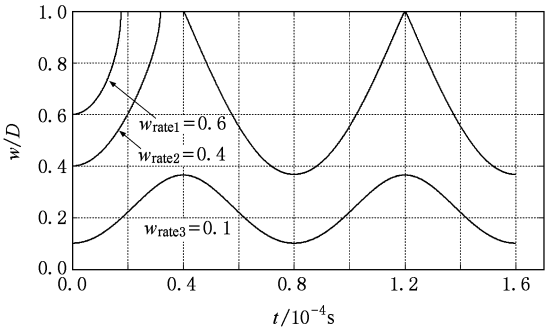


图 11 初始掺杂宽度对 w/D 的影响

另外,由 w_{rate1} 曲线还可以看出,电压激励相同时,并不能使初始掺杂宽度比较小的忆阻元件达到最小电阻状态,而且由于 w_{rate} 比较小,元件的掺杂宽度变化也比较小,其波形与正弦激励波形基本相同.

3.3.2. 对 i 的影响

$i-t$ 曲线随初始掺杂宽度的变化如图 12(a) 所示. 可以看出, w_{rate1} 和 w_{rate2} 的初始掺杂宽度比较大,元件均达到最小电阻状态. 当两个忆阻元件达到最小电阻状态后,电流曲线重合,并且在此之后一直重合. 在电流反向之前,由于此时元件具有无记忆线性电阻元件的特性,所以,电流曲线为正弦的一部分. 而未达到最小电阻状态的曲线 w_{rate3} , 由于一直保持较小的电流,掺杂宽度变化不大,导致波形与激励波形一致.

为了使曲线看得更清楚,在 w_{rate1} 的电流基础上加了 $3 \times 10^{-3} \text{ A}$ 的直流分量,在 w_{rate3} 的电流基础上加了 $-3 \times 10^{-3} \text{ A}$ 的直流分量,此时的波形图 12(b) 所示. 可以看出,在忆阻元件达到最小电阻状态(称为越界)之后到激励由正变负这一区间,电流波形和电压波形一致,说明此时忆阻元件具有无记忆线性电阻元件性质. 在此之后,达到最小电阻状态的两曲线波形变化趋势完全一样.

3.3.3. 对 $u-i$ 关系的影响

$u-i$ 曲线随初始掺杂宽度的变化如图 13 所示. 可以看出,在达到最小电阻状态时,忆阻元件的阻值很小,电流很大,且电流与电压成线性关系.

3.3.4. 对 $\psi-q$ 关系的影响

$\psi-q$ 曲线随初始掺杂宽度的变化如图 14 所示.

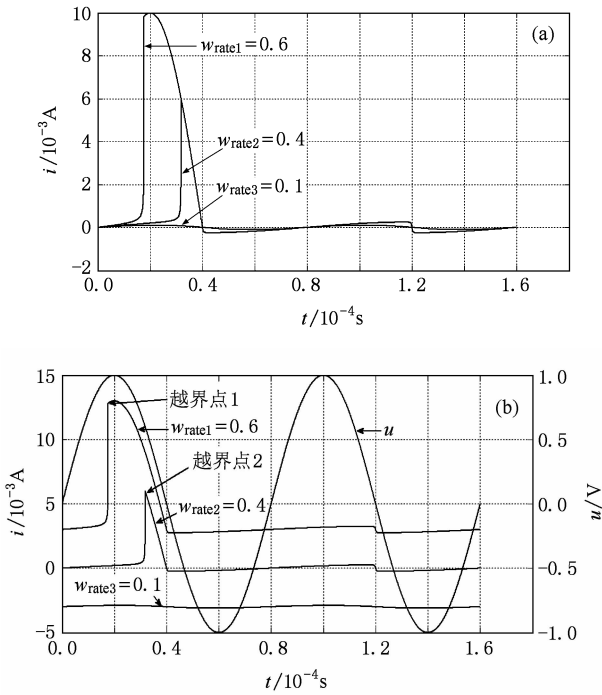


图 12 (a) 初始掺杂宽度对电流的影响;(b) 初始掺杂宽度对电流的影响

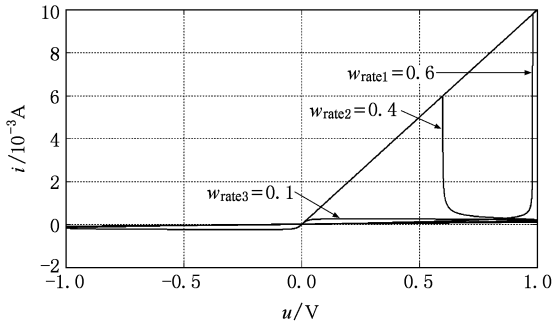


图 13 初始掺杂宽度对 $u-i$ 关系的影响

可以看出,在元件达到最小电阻状态时,曲线随初始掺杂宽度的增加而变陡. 例如,对 w_{rate1} 曲线,在达

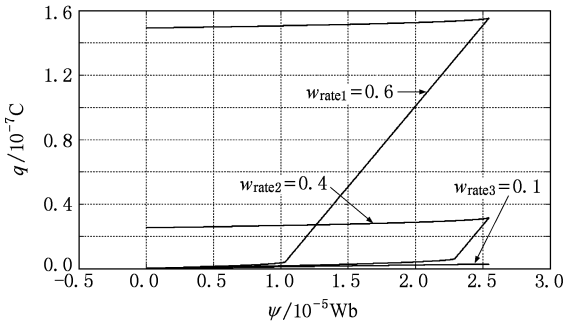


图 14 初始掺杂宽度对 $\psi-q$ 关系的影响

到最小电阻状态之前, ψ - q 曲线有一定的弯曲度, 在最小电阻状态时, 忆阻元件变为无记忆线性电阻元件, ψ - q 曲线变为直线. 由于达到最小电阻状态后, 元件阻值较小, 电流很大, q 快速增加. 但当忆阻元件从最小电阻状态变回非最小电阻状态之后, 由于忆阻元件再次到达最小电阻状态的时刻为孤立点, 所以电流的积分值不变, 故曲线在较高的位置做往复的二次曲线运动.

4. 结 论

本文研究了有边界条件的忆阻元件模型, 并通过仿真验证了该数学模型的正确性. 同时还进一步说明: 有边界条件的忆阻元件模型更接近于真实的元件, 能更好的描述元件的特性. 通过仿真还得到了忆阻元件的 4 个重要特性:

1. 掺杂电阻比越小, 忆阻元件与无记忆线性电阻元件的特性越接近.

2. 从数学模型上来说, 有边界的忆阻元件在实际构成电路时, 具有很好的一致性, 这主要体现在: 对于单个忆阻元件, 经过适当的初始化(例如, 通过改变电流使元件处于最大电阻状态或最小电阻状态)之后, 在相同的激励下, 元件的时域响应保持不变.

3. 正弦电压激励的频率越大, 忆阻元件与无记

忆线性电阻元件的特性越接近.

4. 掺杂比很高的忆阻元件具有端口特性差异很大的最大电阻状态和最小电阻状态.

根据以上四点结论可以设想, 只要在制作工艺上能使实际忆阻元件接近有边界条件的忆阻元件模型, 则该元件将在以下几方面得到应用. 第一, 通过存储忆阻元件的边界状态来存储信息位的逻辑状态, 所以忆阻元件可以用来构成单个存储器. 第二, 当用多个忆阻元件构成相同结构的存储阵列时, 只要在工艺上保证它们的物理特性一致, 并且使用前进行适当的初始化操作, 则各个元件的端口特性可保持很好的一致性, 方便外部电路对其进行并行的读取和写入操作, 所以可以用忆阻元件制作新一代的存储器阵列. 第三, 高频工作条件下, 忆阻元件可以在两种边界状态之间进行高速转换, 并且速度越高, 存储器性能越好, 所以用忆阻元件构成的存储器读写速度将比传统存储器更高. 第四, 从数学模型中可以看到, 忆阻元件存储信息的改变是靠电流实现的, 在存储信息不改变的时候, 电路的功耗几乎为零, 所以用忆阻元件构成的存储器将比传统存储器功耗更低^[16-30]. 第五, 由于忆阻元件是纳米尺度的^[3], 所以忆阻元件构成的存储器比传统的存储器具有更小的体积. 因此, 可以大胆预测, 未来可以用忆阻元件制造出速度更快、功耗更低、体积更小的忆阻存储器.

[1] Chua L O 1971 *IEEE trans. on Circuit theory* **CT-18** 507
 [2] Chua L O 1976 *Proceedings of the IEEE* **64** 209
 [3] Dmitri B S, Gregory S S, Duncan R S, Stanley W 2008 *Nature* **453** 80
 [4] James M, He T 2008 *Nature* **453** 42
 [5] Gergel H N, Hamadani B, Dunlap B, Suehle J, Richter C, Hacker C, Gundlach D 2009 *IEEE* **30** 706
 [6] Wey T A, Benderli S 2009 *Electronics Letters* **45** 1103
 [7] Wang X B, Chen Y R, Xi H W, Li H, Dimitrov D 2009 *Electron Device Letters of IEEE* **30** 294
 [8] Chen G 2008 *Circuits and Systems IEEE* **8** 55
 [9] Shkabko A, Aguirre M H, Marozau I, Lippert T, Weidenkaff A 2009 *Applied Physics Letters* **95** 152109
 [10] Di Ventra M, Pershin Y V, Chua L O 2009 *Proceedings of the IEEE* **97** 1717
 [11] Driscoll T, Kim H T, Chae B G, Di V M, Basov D N 2009 *Applied Physics Letters* **95** 043503
 [12] Smerieri A, Berzina T, Erokhin V, Fontana M. P 2008 *Journal of Applied Physics* **104** 114513

[13] Chen X M, Wu G H, Bao D H 2008 *Applied Physics Letters* **93** 093501
 [14] Goknar I C 2008 *IEEE of Antennas and Propagation Magazine* **50** 215
 [15] Williams R 2008 *IEEE* **45** 28
 [16] Yang X S, Zhao Y 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 3188 (in Chinese) [羊新胜、赵 勇 2008 物理学报 **57** 3188]
 [17] He L, Hu X, Yin L, Xu H Y, Xu X L, Guo J D, Li C Y, Yin D L 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 417 (in Chinese) [贺 丽、胡 翔、尹 澜、许恒毅、徐晓林、郭建栋、李传义、尹道乐 2009 物理学报 **58** 417]
 [18] Su X P, Bao J, Yan S K, Xu X G, Jiang Y 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 2509 (in Chinese) [苏喜平、包 瑾、闫树科、徐晓光、姜 勇 2008 物理学报 **57** 2509]
 [19] Li B Q, Liu Y H, Feng Y C 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 477 (in Chinese) [李炳乾、刘玉华、冯玉春 2008 物理学报 **57** 477]
 [20] Jin L, Zhu L, Li L, Xie Z W 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 8577 (in Chinese) [金 莲、朱 林、李 玲、谢征微 2009 物理学报 **58** 8577]

[21]

Zhu F, Jiao F, Quan S W, Hao J K, Zhao K 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 876 (in Chinese) [朱 凤、焦 飞、全胜文、郝建奎、赵 夔 2009 物理学报 **58** 876]

[22]

Fan F, Ban C Y, Wang Y, Ba Q X, Cui J Z 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 628 (in Chinese) [樊 飞、班春燕、王 洋、巴启先、崔建忠 2009 物理学报 **58** 68]

[23]

Xu X Y, Qian L J, Hu J G 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 2023 (in Chinese) [许小勇、钱丽洁、胡经国 2009 物理学报 **58** 2023]

[24]

Cao X, Li X M, Gao X D, Yu W D, Liu X J, Zhang Y W, Chen Lidong, Cheng Xinhong 2009 *Journal of Applied Physics* **106** 073723

[25]

Song Y W, Sun H 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 7178 (in Chinese) [宋亚舞、孙 华 2008 物理学报 **57** 7178]

[26]

Zhang M X, Tian X L, Guo F X 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 6080 (in Chinese) [张明晓、田学雷、郭风祥 2009 物理学报 **58** 6080]

[27]

Jiang D D, Du J M, Gu Y, Feng Y J 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 566 (in Chinese) [蒋冬冬、杜金梅、谷 岩、冯玉军 2008 物理学报 **57** 566]

[28]

Xu J F, Fan Y F, Chen W, Zhai Q Y 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 644 (in Chinese) [徐锦锋、范于芳、陈 妮、翟秋亚 2009 物理学报 **58** 644]

[29]

Peng X D, Zhu T, Wang F W 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 3274 (in Chinese) [彭先德、朱 涛、王芳卫 2009 物理学报 **58** 3274]

[30]

Feng C W, Cai L, Li Q 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 2462 (in Chinese) [冯朝文、蔡 理、李 芹 2008 物理学报 **57** 2462]

The mathematical model and properties of memristor with border constraint^{*}

Zhang Xu Zhou Yu-Ze Bi Qiang Yang Xing-Hua Zu Yun-Xiao[†]

(School of Electronic Engineering, Beijing University of Posts and Telecommunications, Beijing 100876, China)

(Received 23 December 2009; revised manuscript received 12 April 2010)

Abstract

The properties of memristor as the fourth basic circuit element are studied. The mathematical models in integral form for memristors with and without border constraint are developed. The simulation is done for the memristor with border constraint. The influences of the source frequency and model parameters on the memristor's properties are analyzed and some conclusions are drawn. The model parameters considered include the doping ratio and the initial doping width, and their influence on the current, voltage-current relation and flux-charge relation of the memristor are investigated.

Keywords: memristor, border constraint, mathematical model, property

PACC: 8160C

^{*} Project supported by the Student Innovation Fund of BUPT.
[†] Corresponding author. E-mail: zuyx@mail.tsinghua.edu.cn