

海-气振子厄尔尼诺-南方涛动模型的近似解*

莫嘉琪^{1)2)†} 林一骅³⁾ 林万涛³⁾

1) (安徽师范大学数学系, 芜湖 241000)

2) (上海高校计算科学 E-研究院研究所, 上海 200240)

3) (LASG, 中国科学院大气物理研究所, 北京 100029)

(2009 年 12 月 16 日收到; 2010 年 1 月 5 日收到修改稿)

研究了一类厄尔尼诺-南方涛动(ENSO)的时滞耦合系统振荡的模型. 利用同伦映射方法求出了 ENSO 模型解的渐近展开式, 并讨论了相应问题的渐近性态.

关键词: 非线性, 同伦映射, 厄尔尼诺-南方涛动模型

PACC: 0230

1. 引 言

厄尔尼诺-南方涛动(ENSO)是国际学术界被重视的研究对象^[1-4]林万涛等^[5-11]也研究一类大气物理、海洋气候、动力系统等问题. 海气振子是由于海-气之间的正负反馈. 这种异常简化为对带状表面温度(SST)的梯度变异和南方振荡循环力度, 产生弱信风环绕赤道的作用. 弱信风转向海-气变化, 加强了 SST 的异常. 正的海-气反馈或耦合海-气的不稳定性又导致了赤道太平洋不断变暖.

近来许多学者研究了非线性奇摄动问题. 许多近似方法在发展和优化^[12-18], 如边界层法, 匹配渐近展开法和多重尺度法等. 利用微分不等式等方法, 作者等也研究了一类反应扩散问题^[19], 催化反应系统^[20], 生态环境^[21], 激光^[22], 孤波^[23-26], 海洋科学^[27-31], 大气物理^[32-35]. 本文是用一个简单而特殊的近似方法来考虑 ENSO 模型.

2. ENSO 模型和同伦映射

首先研究一个扰动时滞 ENSO 模型振子. 西太平洋时滞振子是一个非活动区域和在西边界提供负反馈反射波的振荡. 时滞振子模型^[6]由一个具有

正负反馈的常微分时滞方程来表示为

$$\frac{dT}{dt} = AT - DT^3 - BT(t - \delta) + f(t, T), \quad (1)$$

其中 T 为在赤道东太平洋 SST 异常, f 为扰动项, 为其变量在对应的区域内充分光滑, A, B, D 和 δ 为与模型参数相关的数^[1-4].

首先假设 $[H]$: 扰动项 f 为其变量在对应的区域内有界解析函数. 我们先设 $\delta = 0, f = 0$ 并引入变换

$$y = T^{-2}. \quad (2)$$

由(1)式转化为线性方程, 并可得到

$$y = \frac{D}{(A - B)} + C \exp[-2(A - B)t].$$

由(2)式, 我们得到当 $\delta = 0, f = 0$ 时的方程(1)的精确解:

$$\bar{T}(t) = \left[\frac{D}{A - B} + C \exp[-2(A - B)t] \right]^{-\frac{1}{2}}, \quad (3)$$

其中 C 为任意常数.

由(3)式, 若 $A > B$, 则它是一个渐近稳定的解. 即若非时滞的 SST 异常的变化率大于时滞的 SST 异常的变化率时, 当 $t \rightarrow \infty$ 时 SST 异常趋于稳定. 由稳定性理论, 若时滞模型(1)的扰动项 $f(t, T)$ 满足条件

$$\lim_{|T| \rightarrow 0} \frac{|f(t, T)|}{|T|} = 0,$$

* 国家自然科学基金(批准号:40876010)、中国科学院知识创新工程重要方向项目(批准号:KZCX2-YW-Q03-08)、公益性行业(气象)科研专项(批准号:GYHY200806010)、LASG 国家重点实验室专项经费、上海市教育委员会 E-研究院建设计划(批准号:E03004)和浙江省自然科学基金(批准号:Y6090164)资助的课题.

† E-mail: mojiaqi@mail.ahnu.edu.cn

则方程(1)在 $\delta = 0, f = 0$ 时的解(3)与方程(1)的解具有相同的稳定性.

为了得到扰动时滞 ENSO 模型(1)振子的近似解, 首先引入同伦映射 $H(u, s): R \times I \rightarrow R$ [36,37]

$$H(T, p) = LT - L\tilde{T} + p[L\tilde{T} + DT^3 + BT(t - \delta) - f(t, T)], \quad (4)$$

其中 $R = (-\infty, +\infty), I = [0, 1], \tilde{T}$ 为方程(1)的一个初始近似, 它将在下面决定, 线性算子 L 为

$$L \equiv \frac{d}{dt} - A.$$

显然, 由(4)式知, $H(T, 1) = 0$ 与方程(1)相同. 故方程(1)的解 $T(t)$ 就是方程 $H(T, p) = 0$ 当 $p \rightarrow 1$ 时的解.

令

3. 扰动 ENSO 模型的近似解

$$T = \sum_{i=0}^{\infty} T_i(t) p^i. \quad (5)$$

将(5)式代入 $H(T, p) = 0$, 按 p 展开非线性项并使方程的两边 p 的同次幂的系数相等, 对 p 的零次幂有

$$L(T_0) = L(\tilde{T}_0). \quad (6)$$

选择初始近似解 $\tilde{T}(t)$ 为方程当 $\delta = 0, f = 0$ 时的解 $\bar{T}_0(t)$. 利用方程组(3)和(6), 有

$$T_0(t) = \left[\frac{D}{A-B} + C \exp[-2(A-B)t] \right]^{-\frac{1}{2}}. \quad (7)$$

可以证明, 在假设 $[H]$ 和选定初始近似 $\tilde{T}(t)$ 为(7)式的条件下, 由同伦映射关系式 $H(T, p) = 0$ 得到的级数(5)式在 $p \in [0, 1]$ 上是一致收敛的级数 [36,37].

在 $H(T, p) = 0$ 中, 对 p 的一次幂有

$$L(T_1) = B(T_0(t) - T_0(t - \delta)) + f(t, T_0(t)). \quad (8)$$

由(8)式得

$$T_1(t) = \int_0^t (B(T_0(\tau) - T_0(\tau - \delta)) + f(\tau, T_0(\tau)) \exp A(t - \tau)) d\tau. \quad (9)$$

在 $H(T, p) = 0$ 中, 对 p 的二次幂有

$$L(T_2) = -BT_1(t - \delta) - 3DT_0^2(t)T_1(t) + f_T(t, T_0(t))T_1(t). \quad (10)$$

由(10)式得

$$T_2(t) = \int_0^t (-BT_1(\tau - \delta) - 3DT_0^2(\tau)T_1(\tau) + f_T(\tau, T_0(\tau))T_1(\tau)) \times \exp[A(t - \tau)] d\tau. \quad (11)$$

利用(5), (7), (9)和(11)式, 得到扰动模型(1)带有 $T(0) = 1$ 的解的近似展开式

$$T_{\text{hom}}(t) = \left[\frac{D}{A-B} + \left(1 + \frac{D}{A-B} \right) \times \exp[-2(A-B)t] \right]^{-\frac{1}{2}} + \int_0^t (BT_0(\tau) - BT_0(\tau - \delta) - BT_1(\tau - \delta) + f(\tau, T_0(\tau) - 3DT_0^2(\tau)T_1(\tau)) + f_T(\tau, T_0(\tau))T_1(\tau)) \times \exp A(t - \tau) d\tau. \quad (12)$$

利用上述同伦映射(4)式, 可得到扰动 ENSO 方程(1)的更高次的近似解.

4. 例

为了简单起见, 现仅考虑一个无时滞的简单 ENSO 模型的例子. 设 $f(t, T) = r \sin T$, 其中 r 为常数且 $\delta = 0$, 这时扰动 ENSO 模型(1)为

$$\frac{dT}{dt} = (A - B)T - DT^3 + r \sin T. \quad (13)$$

由(12)式不难得到扰动 ENSO 模型(13)在 $T(0) = 1$ 时的二次近似解 T_{hom} 为

$$T_{\text{hom}}(t) = \left[\frac{D}{A-B} + \left(1 + \frac{D}{A-B} \right) \exp[-2(A-B)t] \right]^{-\frac{1}{2}} - B \int_0^t \left\{ \left[\frac{D}{A-B} + \left(1 + \frac{D}{A-B} \right) \exp[-2(A-B)\tau] \right]^{-\frac{1}{2}} - \left[\frac{D}{A-B} + \left(1 + \frac{D}{A-B} \right) \exp[-2(A-B)(\tau - \delta)] \right]^{-\frac{1}{2}} + r \sin \left[\frac{D}{A-B} + \left(1 + \frac{D}{A-B} \right) \exp[-2(A-B)\tau_1] \right]^{-\frac{1}{2}} \right\} \exp[A(t - \tau)] d\tau$$

$$\begin{aligned}
 & - \int_0^t \int_0^{\tau-\delta} \left\{ B \left[\frac{D}{A-B} + \left(1 + \frac{D}{A-B} \right) \exp[-2(A-B)\tau_1] \right] \right\}^{-\frac{1}{2}} \\
 & - B \left[\frac{D}{A-B} + \left(1 + \frac{D}{A-B} \right) \exp[-2(A-B)(\tau_1-\delta)] \right] \right\}^{-\frac{1}{2}} \\
 & + \sin \left[\frac{D}{A-B} + \left(1 + \frac{D}{A-B} \right) \exp[-2(A-B)\tau_1] \right]^{-\frac{1}{2}} \exp[A(\tau-\tau_1)] d\tau_1 \\
 & + \int_0^t \int_0^{\tau} \left\{ 3D \left[\frac{D}{A-B} + \left(1 + \frac{D}{A-B} \right) \exp[-2(A-B)\tau] \right]^{-1} \right. \\
 & \left. + r \cos \left[\frac{D}{A-B} + \left(1 + \frac{D}{A-B} \right) \exp[-2(A-B)\tau] \right]^{-\frac{1}{2}} \right\} \\
 & \times \left\{ B \left[\frac{D}{A-B} + \left(1 + \frac{D}{A-B} \right) \exp[-2(A-B)\tau_1] \right] \right\}^{-\frac{1}{2}} \\
 & - B \left[\frac{D}{A-B} + \left(1 + \frac{D}{A-B} \right) \exp[-2(A-B)(\tau_1-\delta)] \right] \right\}^{-\frac{1}{2}} \\
 & + \sin \left[\frac{D}{A-B} + \left(1 + \frac{D}{A-B} \right) \exp[-2(A-B)\tau_1] \right]^{-\frac{1}{2}} \exp[A(\tau-\tau_1)] d\tau_1. \tag{14}
 \end{aligned}$$

利用上述同伦映射 (4) 式, 还可得到扰动 ENSO 方程 (13) 的更高次的近似解.

5. 精度比较

为了说明利用同伦映射方法得到的近似解 T_{hom} 的精度, 我们仅考虑在扰动方程 (13) 中的 r 为正的小参数的情形. 因 r 为小参数, 也能用摄动方法^[38] 得到方程 (13) 在 $T_{\text{per}}(0) = 1$ 时的渐近解 T_{per} . 事实上, 设解 T_{per} 为

$$T_{\text{per}} = \sum_{i=0}^{\infty} \bar{T}_i r^i. \tag{15}$$

由方程 (13) 和 (15) 式, 可得

$$\bar{T}_0(t) = \left[\frac{D}{A-B} + C \exp[-2(A-B)t] \right]^{-\frac{1}{2}}, \tag{16}$$

$$\begin{aligned}
 \bar{T}_1(t) = & \int_0^t \sin \left[\frac{D}{A-B} + C \exp[-2(A-B)t] \right]^{-\frac{1}{2}} \\
 & \times \int_0^{\tau} \left[\exp \left(A-B - \frac{D^2}{A-B} \right. \right. \\
 & \left. \left. + CD \exp(-2(A-B)t) \right) \right] \\
 & \times (\tau - \tau_1) d\tau_1 d\tau. \tag{17}
 \end{aligned}$$

由 (15) — (17) 式, 得到了方程 (13) 在 $T_{\text{per}}(0) = 1$ 时的渐近解为

$$T_{\text{per}}(t) = \left[\frac{D}{A-B} + C \exp[-2(A-B)t] \right]^{-\frac{1}{2}}$$

$$\begin{aligned}
 & + r \int_0^t \sin \left[\frac{D}{A-B} + C \exp[-2(A-B)t] \right]^{-\frac{1}{2}} \\
 & \times \int_0^{\tau} \left[\exp \left(A-B - \frac{D^2}{A-B} \right. \right. \\
 & \left. \left. + CD \exp(-2(A-B)t) \right) \right] (\tau - \tau_1) d\tau_1 d\tau \\
 & + O(r^2) \quad (0 < r \ll 1). \tag{18}
 \end{aligned}$$

现比较方程 (13) 的同伦映射解 T_{hom} 和摄动解 T_{per} .

不妨在模型 (13) 中设 $A = 4, B = 1.5, D = 0.1, \delta = 0$. 于是由 (14) 和 (18) 式利用数值模拟方法, 分别得到当 $r = 0.5$ 和 $r = 0.1$ 时的模拟曲线图分别如图 1 和 2 所示.

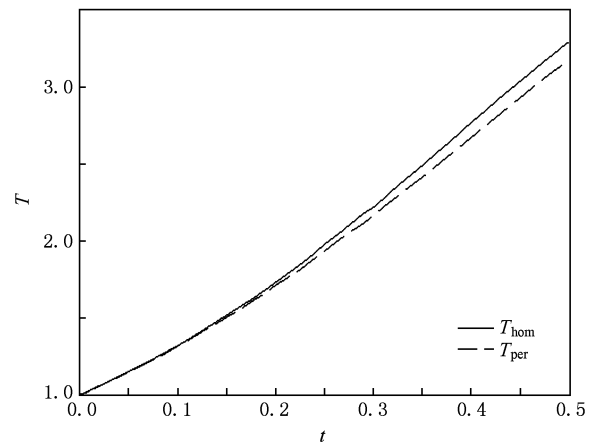


图 1 同伦映射解 T_{hom} 与摄动解 T_{per} 的比较 $r = 0.5$

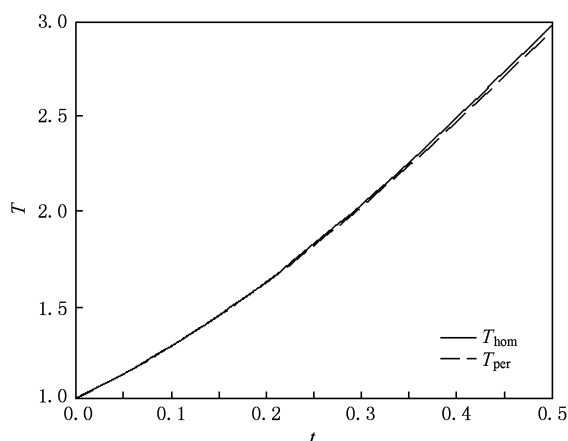


图 2 同伦映射解 T_{hom} 与摄动解 T_{per} 的比较 $r = 0.1$

由图 1 和图 2 不难看出方程 (13) 利用同伦映射方法得到的近似解取 $r = 0.1$ 时比取 $r = 0.5$ 时更

精确.

6. 结 论

(1) 由精度的比较, 可以看出利用同伦映射方法得到的 (12) 式 T_{hom} 是非线性 ENSO 模型 (1) 解的一个好的近似展开式.

(2) ENSO 是一个复杂的自然现象. 因此我们需要把它简化为海-气振子的基本模型, 然后利用近似解法去求解它. 同伦映射方法就是一个简单而有效的方法.

(3) 同伦映射方法是一个近似方法, 它不同于一般的数值方法. 通过同伦映射方法得到的解的展开式还能进行解析运算. 于是由 (12) 式可进一步研究在赤道太平洋上的温度异常的其他定性、定量方面的性态.

- [1] Feng G L, Dong W J, Jia X J, Cao H X 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 1181 (in Chinese) [封国林、董文杰、贾晓静、曹洪兴 2002 物理学报 **51** 1181]
- [2] Liu S K, Fu Z T, Liu S D, Zhao Q 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 10 (in Chinese) [刘式适、付遵涛、刘式达、赵强 2002 物理学报 **51** 10]
- [3] Feng G L, Dai X G, Wang A H, Chou J F 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 606 (in Chinese) [封国林、戴新刚、王爱慧、丑纪范 2001 物理学报 **50** 606]
- [4] Wang C Z 2001 *Adv. Atmos. Sci.* **18** 674
- [5] Lin W T, Ji Z Z, Wang B, Yang X Z 2000 *Chin. Sci. Bull.* **45** 1358
- [6] Lin W T, Ji Z Z, Li S L, Yang X Z 2000 *Prog. Nat. Sci.* **10** 936 (in Chinese) [林万涛、季仲贞、李双林、严晓仲 2000 自然科学进展 **10** 936]
- [7] Lin W T, Ji Z Z, Wang B 2001 *Acta Aerodyn. Sin.* **19** 348 (in Chinese) [林万涛、季仲贞、王斌 2001 空气动力学报 **19** 348]
- [8] Lin W T, Ji Z Z, Wang B 2001 *Adv. Atmos. Sci.* **18** 413
- [9] Lin W T, Ji Z Z, Wang B 2001 *Adv. Atmos. Sci.* **18** 604
- [10] Lin W T, Ji Z Z, Wang B 2002 *Adv. Atmos. Sci.* **19** 699
- [11] Lin W T, Ji Z Z, Wang B, Zhang X 2002 *Prog. Nat. Sci.* **12** 1326 (in Chinese) [林万涛、季仲贞、王斌、张昕 2002 自然科学进展 **12** 1326]
- [12] Bartier J P 2006 *Asymptotic Anal.* **46** 325
- [13] Duehring D, Huang W Z 2007 *J. Dyn. Diff. Eq.* **19** 457
- [14] Guarguaglini F R, Natalini R 2007 *Commun. Part. Diff. Eq.* **32** 163
- [15] Hovhannisyanyan G, Vulanovic R 2008 *Nonlinear Stud.* **15** 297
- [16] Abid I, Jleli M, Trabelsi N 2008 *Anal. Appl. Singap.* **6** 213
- [17] Graef J R, Kong L 2008 *Math. Proc. Camb. Philos. Soc.* **145** 489
- [18] Barbu L, Cosma E 2009 *J. Math. Anal. Appl.* **351** 392
- [19] Mo J Q 1989 *Sci. Chin. Ser. A* **32** 1306
- [20] Mo J Q, Lin W T 2008 *J. Sys. Sci. Complex.* **21** 119
- [21] Mo J Q, Wang H 2007 *Acta Ecologica Sin.* **27** 4366
- [22] Mo J Q 2009 *Sci. Chin. Ser. G* **39** 568
- [23] Mo J Q 2009 *Chin. Phys. Lett.* **26** 010204
- [24] Mo J Q 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 695 (in Chinese) [莫嘉琪 2009 物理学报 **58** 695]
- [25] Mo J Q 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 2930 (in Chinese) [莫嘉琪 2009 物理学报 **58** 2930]
- [26] Mo J Q, Zhang W J, He M 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 3233 (in Chinese) [莫嘉琪、张伟江、何铭 2006 物理学报 **55** 3233]
- [27] Mo J Q, Lin W T, Wang H 2008 *Chin. Geographical Sci.* **18** 193
- [28] Mo J Q, Lin W T, Wang H 2007 *Prog. Nat. Sci.* **17** 230
- [29] Mo J Q, Lin W T, Lin Y H 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 3127 (in Chinese) [莫嘉琪、林万涛、林一骅 2007 物理学报 **56** 3127]
- [30] Mo J Q, Lin Y H, Lin W T 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 6692 (in Chinese) [莫嘉琪、林一骅、林万涛 2009 物理学报 **58** 6692]
- [31] Mo J Q, Lin W T, Wang H 2007 *Chin. Phys.* **16** 951
- [32] Mo J Q, Lin W T 2008 *Chin. Phys. B* **17** 370
- [33] Mo J Q, Lin W T 2008 *Chin. Phys. B* **17** 743
- [34] Mo J Q, Lin W T, Lin Y H 2009 *Chin. Phys. B* **18** 3624
- [35] Liao S J 2004 *Beyond Perturbation: Introduction to the Homotopy Analysis Method* (New York: CRC Press).

[36] He J H 2002 *Approximate Analytical Methods in Engineering and Sciences* (Zhengzhou: Henan Science and Technology Press) (in Chinese) [何吉欢 2002 工程和科学中的近似分析方法 (郑

州: 河南科学技术出版)]

[37] De Jager E M, Jiang F R 1996 *The Theory of Singular Perturbation* (Amsterdam: North-Holland Publishing)

Approximate solution of sea-air oscillator for El Niño-southern oscillation model^{*}

Mo Jia-Qi^{1)2)†} Lin Yi-Hua³⁾ Lin Wan-Tao³⁾

1) (Department of Mathematics, Anhui Normal University, Wuhu 241000, China)

2) (Division of Computational Science, E-Institutes of Shanghai Universities, at SJTU, Shanghai 200240, China)

3) (ALSG, Institute of Atmospheric Physics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100029 China)

(Received 6 December 2009; revised manuscript received 5 January 2010)

Abstract

A class of time delayed coupled system of the El Niño-southern oscillation (ENSO) model is considered. By using the homotopic mapping method, the approximate expansion of the solution for the ENSO model is obtained and the asymptotic behavior of solution of corresponding problem is studied.

Keywords: nonlinear, homotopic mapping method, El Niño-southern oscillation model

PACC: 0230

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 40876010), the Main Direction Program of the Knowledge Innovation Project of Chinese Academy of Sciences (Grant No. KZCX2-YW-Q03-08), the Special Scientific Research Fund of Meteorological Public Welfare Profession of China (Grant No. GYHY200806010), the LASG State Key Laboratory Special Fund, the Foundation of E-Institutes of Shanghai Municipal Education Commission (Grant No. E03004) and the Natural Science Foundation of Zhejiang Province (Grant No. Y6090164).

† E-mail: mojiaqi@mail.ahnu.edu.cn