

(2 + 1) 维 Korteweg-de Vries 方程的 传播孤子及混沌行为*

吴红玉 马松华[†] 方建平

(浙江丽水学院物理系, 丽水 323000)

(2009 年 12 月 25 日收到; 2010 年 1 月 4 日收到修改稿)

利用一个投射方程和变量分离法, 得到了 (2 + 1) 维 Korteweg-de Vries (KdV) 方程的新显式精确解. 根据得到的孤立波解, 构造出 KdV 方程的传播孤子结构. 利用一个新的混沌系统研究了孤子的混沌行为.

关键词: 投射方程, Korteweg-de Vries 方程, 传播孤子, 混沌行为

PACC: 0230, 0340, 0290

1. 引 言

求解非线性偏微分方程的精确解并研究其局域激发模式一直是非线性理论工作者研究的重要课题. 人们提出了许多行之有效的求解非线性偏微分方程的好方法^[1-14], 如双线性法、齐次平衡法、标准的 Painlevé 截断分析法、波数合并法、投射方程法、变分迭代法和 G'/G 展开法等. 并构造出了许多有意义的相干孤子结构^[15-20] 诸如线孤子、半线孤子、紧致子、环孤子、方孤子、盘孤子、折叠子、泡孤子、钟状孤子和峰孤子等. 非线性系统在一定条件下均有可能产生混沌现象. 因此, 混沌理论的研究有着广泛的应用前景. 例如, 利用混沌可实现保密通讯; 可以探索经济领域的股票、期货的价格波动以及全球的天气变化等. 对混沌现象的研究, 将有助于人们以一种更接近实际的角度认识世界. 过去, 许多学者利用一些著名的混沌动力学系统^[21-24], 如 Lorenz 系统、化学动力学系统、核自旋 (NSG) 系统等研究了若干非线性方程的混沌现象, 如 (2 + 1) 维 Boiti-Leon-Pempinelli 方程, (2 + 1) 维色散长水波方程, (2 + 1) 维破裂孤子方程, (2 + 1) 维 Broer-Kaup-Kupershmidt 方程等.

本文的工作是将投射方程法和变量分离法运

用到 (2 + 1) 维 Korteweg-de Vries (KdV) 方程

$$u_t - u_{xxy} - auu_y - bu_x \partial_x^{-1} u_y = 0 \quad (1)$$

研究其传播孤子, 进而利用一个新的动力学混沌系统研究孤子的混沌行为. 方程 (1) 中的 a 和 b 是任意常数. 文献 [26] 已证明了 KdV 系统的可积性, Lou^[27] 求得了当 $a = b$ 时该系统的变量分离解. 本文将讨论当 $a = 2b$ 时 KdV 系统的精确解.

2. (2 + 1) 维 KdV 方程的精确解

首先, 对方程 (1) 作如下变换: $v = \partial_x^{-1} u_y$, 则可改写为

$$\begin{aligned} u_t - u_{xxy} - 2buv_x - bvu_x &= 0, \\ u_y - v_x &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

投射方程法的基本思想是: 对于给定的一个非线性物理模型

$$P(u, u_t, u_{x_i}, u_{x_i x_j}, \dots) = 0, \quad (3)$$

设它有如下形式的解:

$$u = \sum_{i=0}^n \{A_i(x) \phi^i[q(x)]\}, \quad (4)$$

其中 ϕ 满足

$$\phi' = \sigma \phi + \phi^2, \quad (5)$$

这里 $x = (x_0 = t, x_1, x_2, \dots, x_m)$, $A_i(x)$ 和 $q(x)$ 为待定的 x 的任意函数. 将 (4) 和 (5) 式代入 (3) 式就

* 浙江省自然科学基金 (批准号: Y 604106, Y6100257) 和浙江丽水学院自然科学基金 (批准号: KZ09005) 资助的课题.

[†] 通讯联系人. E-mail: msh6209@yahoo.com.cn

可以得到一组 $A_i(x)$ 和 $q(x)$ 的约束方程. 通过约束方程求得变量 $A_i(x)$ 和 $q(x)$, 再根据投射方程 (4) 如下的孤波解、周期波解和变量分离解就可以确定所求方程的解:

$$\phi = \begin{cases} -\sigma[1 + \tanh(\sigma q/2)]/2 & (\sigma \neq 0) \\ -\sigma[1 + \coth(\sigma q/2)]/2 & (\sigma \neq 0) \\ -\sigma[1 - \tan(\sigma q/2)]/2 & (\sigma \neq 0) \\ -\sigma[1 + \cot(\sigma q/2)]/2 & (\sigma \neq 0) \\ -1/q & (\sigma = 0) \end{cases}. \quad (6)$$

为了更加简便求得 KdV 系统的新解, 首先对 (2) 式作如下变换: $u = Q_x, v = Q_y$, 得到单个方程:

$$Q_{xt} - Q_{xxx} - 2bQ_x Q_{xy} - bQ_{xx} Q_y = 0. \quad (7)$$

将投射方程法用于 (7) 式, 并根据 (4) 式, 设解为

$$Q(x, y, t) = f(x, y, t) + g(x, y, t)\phi(q), \quad (8)$$

这里, f, g 和 q 是 x, y, t 的任意函数, 将 (5) 和 (8) 式代入 (2) 式, 并按 ϕ 的同次幂合并, 提取 ϕ^i ($i = 1, 2, \dots$) 前的系数, 令其等于零, 得到下列方程:

$$4gq_y q_x^3 + bg^2 q_x^2 q_y = 0, \quad (9)$$

$$\begin{aligned} & -18gq_y q_x q_{xx} - 18gq_x^2 q_{xy} - 6g_y q_x^3 \\ & -4bgq_x^2 g_y - 2bg^2 q_{xy} - bg^2 q_{xx} q_y \\ & -8bg_x gq_y q_x - 15bg^2 q_x^2 q_y \sigma \\ & -60gq_y q_x^2 \sigma - 18g_x q_y q_x^2 = 0, \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} & -6gq_x q_{xxy} - 2gq_y q_{xxx} - 12g_y q_x^3 \sigma \\ & -2bg_x^2 q_y - 6gq_{xy} q_{xx} - 6g_x q_y q_{xx} \\ & -6g_{xx} q_y q_x - 12g_x q_x q_{xy} \\ & -36g_x q_y q_x^3 \sigma + 2gq_x q_t - 14bg_x gq_y q_x \sigma \\ & -4bg_x g_y q_x - 7bg_x^2 g_y \sigma - 50gq_y q_x^3 \sigma^2 \\ & -12bg_x^2 q_x^2 q_y \sigma^2 - 4bf_x gq_y q_x - 6g_y q_x q_{xx} \\ & -2bgq_y q_{xy} - bg_{xx} gq_y - 2bg^2 q_{xx} q_y \sigma \\ & -36gq_y q_x q_{xx} \sigma - bgq_{xx} g_y \\ & -36gq_y q_x q_{xx} \sigma - 4bg^2 q_x q_{xy} \sigma - 2bg_x gq_{xy} \\ & -36gq_x^2 q_{xy} \sigma - 6g_{xy} q_x^2 = 0, \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} & -2bg_x g_{xy} + g_x q_t + g_t q_x - 9g_{xy} q_x^3 \sigma \\ & -bg_{xx} g_y - 4bg_x g_y q_x \sigma \\ & -3bg_x^2 q_x^2 q_y \sigma^3 - 2bf_x g_x q_y \\ & -3bg_x^2 g_y \sigma^2 - 6bf_x gq_y q_x \sigma \\ & -6bg_x gq_y q_x \sigma^2 - 2bg_x^2 q_y \sigma \\ & -21g_x q_y q_x^2 \sigma^2 - 2bf_x g_y q_x \\ & + 3gq_x q_t \sigma - 15gq_y q_x^3 \sigma^3 - gq_{xxy} \\ & -3g_{xx} q_{xy} - 3g_x q_{xxy} + gq_{xt} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & -3g_{xy} q_{xx} - 3g_{xxy} q_x - 7g_y q_x^3 \sigma^2 \\ & -g_y q_{xxx} - g_{xxx} q_y - bg_{xx} gq_y \sigma \\ & -2bgq_x q_{xy} \sigma - 9gq_{xy} q_{xx} \sigma \\ & -2bg^2 q_x q_{xy} \sigma^2 - bg^2 q_{xx} q_y \sigma^2 \\ & -9g_x q_y q_{xx} \sigma - 21gq_x^2 q_{xy} \sigma^2 \\ & -bgq_{xx} g_y \sigma - 2bg_x gq_{xy} \sigma - bf_{xx} gq_y \\ & -9g_{xx} q_y q_x \sigma - 2bf_x gq_{xy} \\ & -9gq_x q_{xxy} \sigma - 21gq_y q_x q_{xx} \sigma^2 \\ & -3gq_y q_{xxx} \sigma - 9g_y q_x q_{xx} \sigma \\ & -18g_x q_x q_{xy} \sigma = 0, \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} & -bf_{xx} g_y - 3gq_x q_{xxy} \sigma^2 - 3g_x q_y q_{xx} \sigma^2 \\ & -3gq_x^2 q_{xy} \sigma^3 - 3g_y q_x q_{xx} \sigma^2 - 3gq_{xy} q_{xx} \sigma^2 \\ & -gq_y q_{xxx} \sigma^2 - 3g_{xx} q_y q_x \sigma^2 - 6g_x q_x q_{xy} \sigma^2 \\ & -2bf_x gq_y q_x \sigma^2 - 2bf_x q_y q_x \sigma - 2bf_x g_y q_x \sigma \\ & -gq_y q_x^3 \sigma^4 - 3g_x q_y q_x^2 \sigma^3 + gq_x q_t \sigma^2 \\ & -3g_{xy} q_{xx} \sigma - 2bf_x q_{xy} \sigma \\ & -3gq_y q_x q_{xx} \sigma^3 + g_x q_t \sigma \\ & -bf_{xx} q_y g \sigma - 3g_{xy} q_x^2 \sigma^2 - g_{xxx} q_y \sigma \\ & -3g_{xxy} q_x \sigma - 3g_x q_{xxy} \sigma + gq_{xt} \sigma - 2bf_x g_{xy} \\ & -g_y q_x^3 \sigma^3 + g_{xt} - gq_{xxy} \sigma - g_{xxx} y \\ & -3g_{xx} q_{xy} \sigma - g_y q_{xxx} \sigma + g_t q_x \sigma = 0, \end{aligned} \quad (13)$$

由这些方程可求得:

$$\begin{aligned} f = & \left[\int (q_{xx}^2 q_y + 2q_x q_{xy} q_{xx} - 2q_x q_y q_{xxx} \right. \\ & + q_x^2 q_t - 4q_x^2 q_{xx} q_y \sigma - 2q_x^3 q_{xy} \sigma \\ & \left. - 2q_x^2 q_{xxy} - q_x^4 q_y \sigma^2) dx \right] / 2bq_y q_x^2, \\ g = & -4q_x/b, \end{aligned} \quad (14)$$

从所得到的方程中, 发现有如下变量分离形式的特解:

$$q = \chi(x) + \varphi(y - ct), \quad (15)$$

其中 $\chi \equiv \chi(x)$, $\varphi \equiv \varphi(y - ct)$ 是关于 x 和 $(y - ct)$ 的任意函数.

当 $\sigma \neq 0$, 得到方程 (7) 的孤波解和周期波解:

$$Q_1 = \frac{1}{2b} \left\{ \int \frac{-2\chi_x \chi_{xxx} - \chi_x^4 \sigma^2 - \chi_x^2 (4\chi_{xx} \sigma + c) + \chi_{xx}^2}{\chi_x^2} dx \right. \\ \left. + 4\chi_x \sigma \left[1 + \tanh\left(\frac{1}{2}\sigma(\chi + \varphi)\right) \right] \right\}, \quad (16)$$

$$Q_2 = \frac{1}{2b} \left\{ \int \frac{-2\chi_x \chi_{xxx} - \chi_x^4 \sigma^2 - \chi_x^2 (4\chi_{xx} \sigma + c) + \chi_{xx}^2}{\chi_x^2} dx \right.$$

$$+ 4\chi_x \sigma \left[1 + \coth \left(\frac{1}{2} \sigma (\chi + \varphi) \right) \right] \Big\}, \quad (17)$$

$$Q_3 = \frac{1}{2b} \left\{ \int \frac{-2\chi_x \chi_{xxx} - \chi_x^4 \sigma^2 - \chi_x^2 (4\chi_{xx} \sigma + c) + \chi_{xx}^2}{\chi_x^2} dx \right. \\ \left. + 4\chi_x \sigma \left[1 - \tanh \left(\frac{1}{2} \sigma (\chi + \varphi) \right) \right] \right\}, \quad (18)$$

$$Q_4 = \frac{1}{2b} \left\{ \int \frac{-2\chi_x \chi_{xxx} - \chi_x^4 \sigma^2 - \chi_x^2 (4\chi_{xx} \sigma + c) + \chi_{xx}^2}{\chi_x^2} dx \right. \\ \left. - 4\chi_x \sigma \left[1 + \cot \left(\frac{1}{2} \sigma (\chi + \varphi) \right) \right] \right\}, \quad (19)$$

当 $\sigma = 0$, 得到方程 (7) 的有理函数解:

$$Q_5 = \frac{1}{2b} \left\{ \int \frac{-2\chi_x \chi_{xxx} - \chi_x^4 \sigma^2 + \chi_{xx}^2}{\chi_x^2} dx - \frac{8\chi_x}{\chi + \varphi} \right\}. \quad (20)$$

将 Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5 分别对 x, y 求一阶导数, 即可得到 KdV 方程 (2) 的孤波解、周期波解和有理函数解:

$$u_1 = \left[-2\chi_x \chi_{xxx} - \chi_x^4 \sigma^2 - \chi_x^2 (4\chi_{xx} \sigma + c) + \chi_{xx}^2 \right] / 2b\chi_x^2 \\ + \left\{ 4\chi_{xx} \sigma \left(1 + \tanh \left[\frac{1}{2} \sigma (\chi + \varphi) \right] \right)^2 \right. \\ \left. + 2\chi_x^2 \sigma^2 \left(1 - \tanh \left[\frac{1}{2} \sigma (\chi + \varphi) \right] \right)^2 \right\} / 2b, \quad (21)$$

$$v_1 = \chi_x \varphi_y \sigma^2 \left\{ 1 - \tanh \left[\frac{1}{2} \sigma (\chi + \varphi) \right] \right\} / b, \quad (22)$$

$$u_2 = \left[-2\chi_x \chi_{xxx} - \chi_x^4 \sigma^2 - \chi_x^2 (4\chi_{xx} \sigma + c) + \chi_{xx}^2 \right] / 2b\chi_x^2 \\ + \left\{ 4\chi_{xx} \sigma \left(1 + \coth \left[\frac{1}{2} \sigma (\chi + \varphi) \right] \right)^2 \right. \\ \left. + 2\chi_x^2 \sigma^2 \left(1 - \coth \left[\frac{1}{2} \sigma (\chi + \varphi) \right] \right)^2 \right\} / 2b, \quad (23)$$

$$v_2 = \chi_x \varphi_y \sigma^2 \left\{ 1 - \coth \left[\frac{1}{2} \sigma (\chi + \varphi) \right] \right\} / b, \quad (24)$$

$$u_3 = \left[-2\chi_x \chi_{xxx} - \chi_x^4 \sigma^2 - \chi_x^2 (4\chi_{xx} \sigma + c) + \chi_{xx}^2 \right] / 2b\chi_x^2 \\ + \left\{ 4\chi_{xx} \sigma \left(1 - \tanh \left[\frac{1}{2} \sigma (\chi + \varphi) \right] \right)^2 \right. \\ \left. - 2\chi_x^2 \sigma^2 \left(1 + \tanh \left[\frac{1}{2} \sigma (\chi + \varphi) \right] \right)^2 \right\} / 2b, \quad (25)$$

$$v_3 = \chi_x \varphi_y \sigma^2 \left\{ 1 + \tanh \left[\frac{1}{2} \sigma (\chi + \varphi) \right] \right\} / b, \quad (26)$$

$$u_4 = \left[-2\chi_x \chi_{xxx} - \chi_x^4 \sigma^2 - \chi_x^2 (4\chi_{xx} \sigma + c) + \chi_{xx}^2 \right] / 2b\chi_x^2 \\ + \left\{ -4\chi_{xx} \sigma \left(1 + \cot \left[\frac{1}{2} \sigma (\chi + \varphi) \right] \right)^2 \right. \\ \left. + 2\chi_x^2 \sigma^2 \left(1 + \cot \left[\frac{1}{2} \sigma (\chi + \varphi) \right] \right)^2 \right\} / 2b, \quad (27)$$

$$v_4 = \chi_x \varphi_y \sigma^2 \left\{ 1 + \cot \left[\frac{1}{2} \sigma (\chi + \varphi) \right] \right\} / b, \quad (28)$$

$$u_5 = - \left[-\chi_{xx}^2 + \chi_x^2 c + 2\chi_x \chi_{xxx} \right] / 2b\chi_x^2$$

$$+ 4\chi_{xx} / b (\chi + \varphi) - 4\chi_x^2 / b (\chi + \varphi)^2, \quad (29)$$

$$v_5 = -4\varphi_y \chi_x / b (\chi + \varphi)^2. \quad (30)$$

其中 $\chi \equiv \chi(x)$, $\varphi \equiv \varphi(y - ct)$ 是关于 x 和 $(y - ct)$ 的任意函数.

3. (2+1) 维 KdV 方程的传播孤子

由于 (21) — (30) 式中都包含有任意函数 χ 和 φ , 使得系统的解变的相当丰富. 如设 $\chi = kx$, $\varphi = l(y - ct)$, 所有上述解则转化为行波解. 本文的这一部分以 (24) 式为例, 讨论孤波解 v_2 的传播孤子局域激发. 为图示方便, 令

$$V = v_2 = \frac{1}{b} \chi_x \varphi_y \sigma^2 \left\{ 1 - \coth \left[\frac{1}{2} \sigma (\chi + \varphi) \right] \right\}^2. \quad (31)$$

由于 (31) 式中的 χ 和 φ 的任意性, 不妨取 χ 和 φ 为如下形式:

$$\chi = 1 + \exp(x), \quad \varphi = 1 + \exp(y - ct), \quad (32)$$

于是可以得到一个 dromion 孤子演化情况, 如图 1 所示, 取 $b = 1, c = 1, \sigma = 1$, 时间分别为 $t = -4, t = 0, t = 4$. 从图 1 中看到, dromion 孤子随时间向 y 方向移动, 其传播速度、振幅和形状都不发生变化.

4. (2+1) 维 KdV 方程孤子的混沌行为

(31) 式中的任意函数不仅能够构建出系统的丰富局域结构, 还能够揭示系统的混沌行为. 前不久, Lü 等^[28] 研究得到了一个新的动力学混沌系统 (LCC):

$$m_\xi = -12m + ln, \\ n_\xi = -5n + ml, \\ l_\xi = 4.5l - mn. \quad (33)$$

这里 m, n 和 l 是 ξ 的函数 ($\xi = x$ 或 $\xi = y - ct$). 初始条件为

$$m(0) = 2, \\ n(0) = -3, \\ l(0) = 2. \quad (34)$$

图 2 描绘的是 LCC 动力学混沌系统的解. 下面利用 LCC 动力学混沌系统来研究 (2+1) 维 KdV 系统中孤子的混沌现象.

在 (31) 式中, 利用 LCC 动力学混沌系统, 取任意函数为如下形式:

$$\chi(x) = 1 + 0.1m(x),$$

$$\varphi(y, t) = 1 + 0.1\exp(y - ct), \quad (35)$$

于是可以得到如图 3(a) 所示的混沌线孤子(取 $t =$

$2, b = 1, c = 1, \sigma = 1$). 从图 3(a) 可以看到, 虽然在 y 方向还是局域的, 而在 x 方向, 函数 V 的图像中孤子的波峰、形状都已呈现混沌行为.

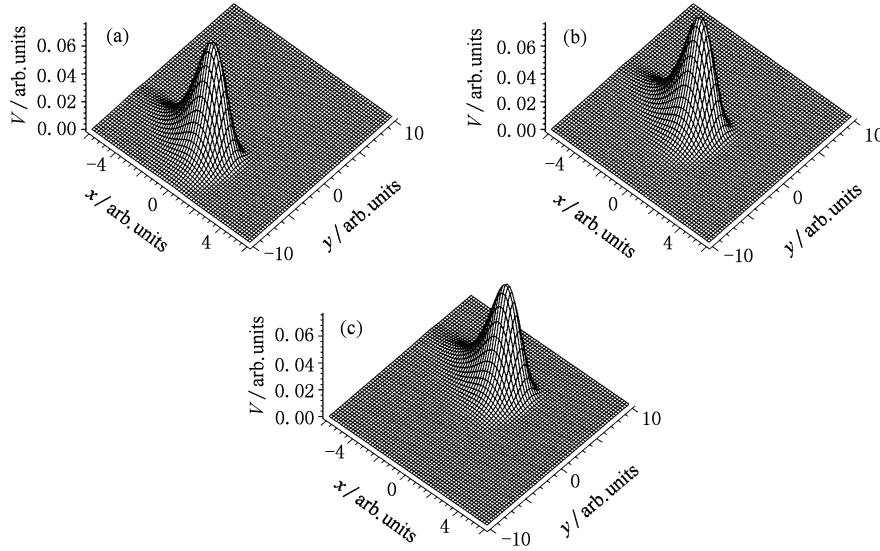


图 1 由(31)式利用(32)式得到的 dromion 传播孤子 取 $b = 1, c = 1, \sigma = 1$, 时间分别为 $t = -4, t = 0, t = 4$

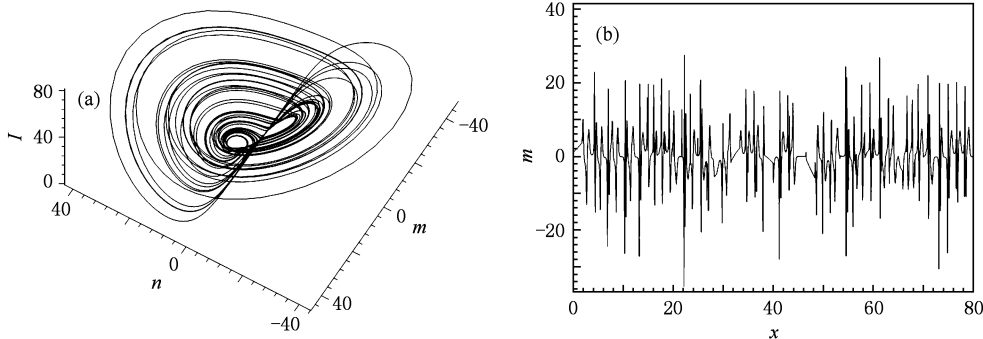


图 2 由(31)式利用(33)式得到的 LCC 动力学混沌系统的解 (a) 三维混沌吸引子, (b) 根据(a)图描绘的混沌解 m 随 x 的变化图形

此外, 如果利用 LCC 动力学混沌系统, 取任意函数为如下形式:

$$\chi(x) = 1 + 0.1m(x),$$

$$\varphi(y, t) = 1 + 0.1m(y - ct), \quad (36)$$

可以得到如图 3(b) 所示的混沌解(取 $t = 2, b = 1, c = 1, \sigma = 1$). 从图 3(b) 可以看到, 函数 V 不论在 x 方向还是 y 方向都呈现混沌行为. 为了说明图 3(b) 所示的混沌图像是大量孤子的峰值所为, 我们将图 3(b) 中心微小部位进行放大, 如图 3(c) 所示. 从图 3 中清楚地看出这是 dromion 孤子结构.

5. 结 论

孤立子和混沌理论, 是非线性科学研究的两个重要方面. 本文利用一个新的辅助方程结合变量分离方法, 得到了 $(2 + 1)$ 维 Korteweg-de Vries 系统的精确解, 包括孤波解、周期波解和有理函数解. 孤子的种类是多种多样的, 孤子随时间变化的形态也是多种多样的, 有的孤子波幅随时间作周期性变化, 还有的孤子寿命很短, 在短时间内波幅趋向于零.

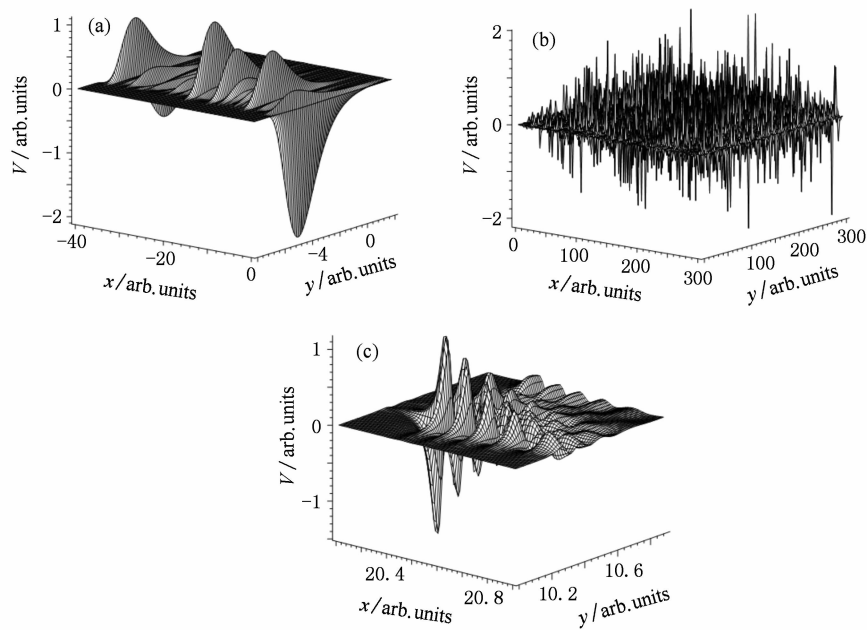


图3 由(31)式利用(35)式得到的混沌线孤子 (取 $t = 2, b = 1, c = 1, \sigma = 1$), (a)混沌线孤子, (b)由(31)式利用(36)式得到的混沌解(取 $t = 2, b = 1, c = 1, \sigma = 1$), (c)(b)图中心微小部位的放大图像

本文根据孤波解 v_2 得到的孤子,其形状大小始终保持不变,且随时间作匀速直线运动,人们称之为“传播孤子”.过去,许多学者利用 Lorenz 混沌系统、化学动力学混沌系统、核自旋(NSG)混沌系统等研究了若干非线性方程的混沌现象.这里,我们利用一个新的混沌动力学系统——LCC 系统,研究了(2 +

1)维 Korteweg-de Vries 方程的混沌行为,得到了孤子的混沌图像,在研究混沌现象的过程中,将混沌解(图3(b))的中心部位放大观察,清楚的看到混沌图象中众多的“峰针”实际上都是孤立子.

作者对张解放教授的建议和指导表示感谢.

- [1] Zhang D J 2003 *Chaos Soliton. Fract.* **18** 31
- [2] Zhang D J 2005 *Chaos Soliton. Fract.* **23** 1333
- [3] Zhang S L, Zhu X N, Wang Y M, Lou S Y 2008 *Commun. Theor. Phys.* **49** 829
- [4] Zhang S L, Lou S Y 2007 *Commun. Theor. Phys.* **48** 385
- [5] Taogetusang, Sirendaoerji 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 2121 (in Chinese) [套格图桑、斯仁道尔吉 2009 物理学报 **58** 2121]
- [6] Taogetusang, Sirendaoerji 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 5887 (in Chinese) [套格图桑、斯仁道尔吉 2009 物理学报 **58** 5887]
- [7] Ma Y L, Li B Q, Sun J Z 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 7402 (in Chinese) [马玉兰、李帮庆、孙践知 2009 物理学报 **58** 7402]
- [8] Mo J Q, Zhang W J, Chen X F 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 7397 (in Chinese) [莫嘉琪、张伟江、陈贤峰 2009 物理学报 **58** 7397]
- [9] Zhang J F, Meng J P 2004 *Commun. Theor. Phys.* **41** 655
- [10] Lou S Y 1996 *Commun. Theor. Phys.* **26** 487
- [11] Lou S Y, Tang X Y, Li J 2001 *Eur. Phys. J. B* **22** 473
- [12] Lai D W C, Chow K W 1999 *J. Phys. Soc. Jpn.* **65** 1847
- [13] Lai D W C, Chow K W 2001 *J. Phys. Soc. Jpn.* **70** 666
- [14] Fang J P, Zheng C L, Chen L Q 2004 *Commun. Theor. Phys.* **42** 175
- [15] Ma S H, Qiang J Y, Fang J P 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 0620 (in Chinese) [马松华、强继业、方建平 2007 物理学报 **56** 0620]
- [16] Fang J P, Zheng C L, Zhu J M 2005 *Commun. Theor. Phys.* **44** 203
- [17] Ma S H, Wu X H, Fang J P, Zheng C L 2006 *Z. Naturforsch.* **61a** 249
- [18] Lou S Y 1998 *Phys. Rev. Lett.* **80** 5027
- [19] Fang J P, Zheng C L, Zhu J M 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 2990 (in Chinese) [方建平、郑春龙、朱加民 2005 物理学报 **54** 2990]
- [20] Huang L, Sun J A, Dou F Q, Duan W S, Liu X X 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 0611 (in Chinese) [黄磊、孙建安、豆福全、段文山、刘兴霞 2007 物理学报 **56** 0611]

- [21] Ma S H, Fang J P 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 5611 (in Chinese)
[马松华、方建平 2006 物理学报 **55** 5611]
- [22] Ma S H, Fang J P, Hong B H, Zheng C L 2009 *Chaos Soliton. Fract.* **40** 1352
- [23] Ma S H, Fang J P, Zheng C L 2008 *Z. Naturforsch.* **63a** 121
- [24] Ma S H, Fang J P, Zheng C L 2008 *Chin. Phys. B* **17** 2767
- [25] Fang J P, Zheng C L 2005 *Chin. Phys.* **4** 670
- [26] Calogero F 1975 *Lett. Nuovo Cimento.* **14** 443
- [27] Lou S Y, Ruan H Y 2001 *J. Phys. A* **34** 305
- [28] Lü J, Cheng G, Chen D 2004 *Int. J. Bifur. Chaos* **20** 1507

Propagating solitons and chaotic behaviour of $(2 + 1)$ -dimensional Korteweg-de Vries system*

Wu Hong-Yu Ma Song-Hua[†] Fang Jian-Ping

(Department of Physics, Zhejiang Lishui College, Lishui 323000, China)

(Received 25 December 2009; revised manuscript received 4 January 2010)

Abstract

With a projective equation and a linear variable separation method, new exact solutions of the $(2 + 1)$ -dimensional Korteweg-de Vries system (KdV) is derived. Based on the derived solitary wave excitation, we obtain the propagating solitons and study the chaotic behaviours with a new chaotic system.

Keywords: projective equation, Korteweg-de Vries system, propagating soliton, chaotic behaviours

PACC: 0230, 0340, 0290

* Project supported by the Natural Science Foundation of Zhejiang Province, China (Grant Nos. Y604106, Y6100257) and the Natural Science Foundation of Zhejiang Lishui University, China (Grant No. KZ09005).

[†] Corresponding author. E-mail: msh6209@yahoo.com.cn