

# 同时考虑传染媒介和传播延迟的 复杂网络病毒传播行为研究\*

王亚奇<sup>1)</sup> 蒋国平<sup>1)2)†</sup>

1) (南京邮电大学控制与智能技术研究中心, 南京 210003)

2) (南京邮电大学自动化学院, 南京 210003)

(2009 年 11 月 3 日收到; 2009 年 12 月 22 日收到修改稿)

提出一种新的流行病传播模型, 基于平均场理论, 研究传染媒介和传播延迟同时存在对网络中流行病传播行为的影响. 理论分析和仿真结果表明, 传染媒介和传播延迟同时存在显著增强了网络中流行病爆发的危险性, 并加速了流行病的传播. 研究还发现, 对于给定的有效传播率, 均匀网络中流行病的感染程度分别与传染媒介的传染概率和传播延迟呈对数关系, 无标度网络中流行病的感染程度与传染媒介的传染概率呈幂率关系, 而与传播延迟之间则存在线性关系.

**关键词:** 传染媒介, 传播延迟, 均匀网络, 无标度网络

**PACC:** 0250, 0565, 0570J

## 1. 引 言

近年来, 随着复杂网络理论研究的兴起, 流行病在复杂网络中的传播已经成为一个研究热点<sup>[1,2]</sup>. 为了便于研究种群内不同的连接拓扑结构对流行病传播行为的影响, 通常用节点表示种群内的单个个体, 如果任何两个节点之间可以通过某种方式进行接触, 就认为这两个节点之间存在相互连接的边. 当一个健康节点的相邻节点是患病节点时, 流行病就会以一定的概率感染该健康节点, 通过这种方式就可以得到流行病传播网络的拓扑结构. 在此基础上, 人们提出了包括 SIS (susceptible-infected-susceptible) 模型和 SIR (susceptible-infected-removed) 模型在内的多种传播模型来研究流行病的传播行为<sup>[3-5]</sup>, 并得出许多重要结论: 在均匀网络中存在正的传播临界值  $\lambda_c = \frac{1}{\langle k \rangle}$ , 这里的  $\langle k \rangle$  为网络的平均度<sup>[3,4]</sup>. 只有在有效传播率  $\lambda > \lambda_c$  时, 流行病才能够在网络中爆发并流行; 反之, 流行病呈指数消亡. 而对于规模较大的无标度网络<sup>[6-8]</sup>, 其  $\lambda_c = \frac{\langle k \rangle}{\langle k^2 \rangle} \approx 0$ , 因此只要  $\lambda > 0$ , 流行病就都能够在网

络中传播并最终维持在一个稳定状态.

现实生活中, 一个有趣的现象是许多人类的流行病如疟疾、鼠疫和回归热等, 不仅能够通过传染媒介如蚊子、跳蚤和虱子等进行传播<sup>[9]</sup>, 而且在传播过程中还会有传播延迟<sup>[10]</sup>. 所谓传播延迟是指, 患病人群总要经历一段或长或短的时间  $T$  才能被治愈 (如疟疾具有周期性发病的特性), 而在这段时间内, 患病人群始终具有感染能力. 目前, 国内外已经开始关注传染媒介或传播延迟对流行病传播影响的研究: 史红静等<sup>[11]</sup> 借助于 SIS 传播模型, 分析了传染媒介对流行病传播过程的影响, 得出了传染媒介能够促进流行病传播, 但不改变流行病的感染程度等结论; 刘忠信等<sup>[12]</sup> 讨论了引入传播延迟后局域世界中流行病传播特性的变化, 认为传播延迟对局域世界中流行病的传播起到了重要作用; 许新建等<sup>[13]</sup> 则利用 SIS 传播模型研究了传播延迟对流行病传播行为的影响, 发现了小世界 (WS) 网络的  $\lambda_c$  与传播延迟呈幂率关系; Tchuente 等<sup>[14]</sup> 采用 SIR 传播模型, 研究了传播延迟对系统传播动力学行为的影响, 指出了传播延迟的引入降低了系统中流行病的  $\lambda_c$ ; Zaman 等<sup>[15]</sup> 在利用 SIR 模型分析了传播延迟对流行病传播行为影响的基础上, 给出了一种

\* 国家教育部新世纪优秀人才支持计划 (批准号: NCET-06-0510)、国家自然科学基金 (批准号: 60874091) 和江苏省普通高校研究生科研创新计划 (批准号: CX08B-081Z) 资助的课题.

† 通讯联系人. E-mail: jianggp@njupt.edu.cn

控制流行病传播的最优策略; Briat 等<sup>[16]</sup> 构建了一种更加符合实际情况的 SIR 模型, 研究了传播延迟对流行病传播特性的影响, 并在此基础上提出了一种有效的免疫策略.

文献[11—16]研究了存在传染媒介或传播延迟时的网络流行病传播问题, 实际网络中, 传染媒介和传播延迟往往同时存在. 本文提出一种新的 SIS 传播模型 (SIS model with infective medium and spreading delay, 简记为, MD-SIS), 利用平均场理论, 研究传染媒介和传播延迟同时存在对网络中流行病传播特性的影响, 以及两者对流行病传播特性影响程度的异同. 在 MD-SIS 传播模型中, 我们分别用均匀网络和无标度网络来刻画人群中不同个体之间的接触情况, 而传染媒介和人群之间的接触不具有选择性, 因此可以认为流行病在传染媒介和人群中均匀传播. 在流行病传播过程中, 如果人群中的某个个体在  $t$  时刻被感染, 那么该个体将会一直处于感染状态 I 直到  $t + T + 1$  时刻. 一般情况而言, 传播延迟随着人群中个体的差异而有所不同, 这里假设人群中所有被感染个体的传播延迟时间都为  $T$ . 研究表明, 与传染媒介或传播延迟分别单独存在的情况相比, 两者同时存在显著降低了网络的  $\lambda_c$ , 增加了网络中被感染节点的密度. 同时还发现, 和传染媒介相比, 传播延迟对流行病传播行为的影响较大. 此外, 本文还给出有效控制网络中流行病传播的策略, 有助于对流行病在人群中传播的防控.

## 2. MD-SIS 传播模型

首先, 约定人群中的个体用 H 表示, 其数目为  $N$ ; 传染媒介中的个体用 M 表示, 其数目为  $\Omega$ . 因此, 网络中便存在两种不同类型的节点, 并分别由  $N$  个 H 和  $\Omega$  个 M 组成, 而每个 H 和 M 只能处于如下两种状态之一: 易染状态 S, 表示个体不携带流行病, 但容易被流行病感染; 感染状态 I, 表示个体已经被流行病感染, 而且具有传染性. 这里忽略了 H 和 M 内部具体的感染机理, 并假设在流行病传播的初始时刻所有  $\Omega$  个 M 均为健康个体.

在 MD-SIS 模型中, 流行病传播的详细过程描述如下. 和基本 SIS 模型相同, 在  $t$  时刻, 一个健康个体 H 如果和人群中其他一个被感染个体接触, 在  $t + 1$  时刻该健康个体 H 将以传播率  $\gamma$  由 S 变为 I. 与基本 SIS 模型不同之处在于:

(1) 在  $t$  时刻被感染的 H 将会一直保持其 I 直到  $t + 1 + T$  时刻, 经过有效的医学治疗, 随后该 H 将以概率  $\delta$  重新恢复为 S. 定义  $\lambda = \frac{\gamma}{\delta}$ , 不失一般性, 这里令  $\delta = 1$ , 因为这只影响流行病传播时间尺度的定义.

(2) 如果在  $t$  时刻叮咬处于 I 的 H, 健康 M 将在  $t + 1$  时刻以传染概率  $\gamma_1$  转变为 I; 由于受到携带流行病个体 M 的叮咬, 在  $t$  时刻处于 S 的个体 H, 将会在  $t + 1$  时刻以传染概率  $\gamma_2$  变为 I. 由于传染媒介的生命周期比人的生命周期小很多, 所以这里忽略了传播延迟对处于 I 的传染媒介的影响, 并假设传染媒介之间不传播疾病.

因此, 在 MD-SIS 模型中, 所有  $N$  个 H 都遵循从  $S \rightarrow I \rightarrow S$  的转换过程, 所有  $\Omega$  个 M 都遵循的转换过程为从  $S \rightarrow I \rightarrow$  死亡 (D). 网络中免疫和死亡 (主要是传染媒介中个体的死亡) 的节点将不再参与流行病的传播过程, 但为了分析问题方便, 我们假设这些节点不被从网络中删除, 即网络中的节点数目  $N + \Omega$  保持不变, 从而保证了网络的拓扑结构不发生变化. 同时, 约定人群中的健康个体和被感染个体均匀混合, 即感染强度与被感染个体 H 的密度成比例.

下面借助于平均场理论<sup>[17]</sup>, 分别研究 MD-SIS 传播模型在均匀网络和无标度网络上的传播动力学行为, 以此来研究传染媒介和传播延迟同时存在对不同网络拓扑结构上流行病传播特性的影响.

### 2.1. MD-SIS 模型在均匀网络上的传播行为

在均匀网络中, 每一个 H 的度  $k$  约等于其平均值  $\langle k \rangle$ . 定义在时刻  $t$  时,  $N$  个 H 中健康个体和被感染个体的密度分别为  $s(t)$  和  $\rho(t)$ , 并满足  $s(t) + \rho(t) = 1$ ;  $\Omega$  个 M 中被感染个体的密度为  $v(t)$ . 当时间  $t$  趋于无穷大时, 被感染 H 和 M 的稳态密度分别记为  $\rho$  和  $v$ . 这里忽略不同 H 的度之间的相关性, 运用文献 [8] 提出的动力学平均场方法可得  $\rho(t)$  和  $v(t)$  的反应方程组为

$$\begin{cases} \partial_t s(t) = \rho_T(t) - \lambda \langle k \rangle s(t) \rho(t) - \gamma_2 s(t) \vartheta(t) \\ \partial_t \rho_0(t) = -\rho_0(t) + \lambda \langle k \rangle s(t) \rho(t) + \gamma_2 s(t) \vartheta(t) \\ \partial_t \rho_1(t) = -\rho_1(t) + \rho_0(t) \\ \dots \\ \partial_t \rho_r(t) = -\rho_r(t) + \rho_{r-1}(t) \\ \partial_t \vartheta(t) = -\vartheta(t) + \gamma_1 [1 - \vartheta(t)] \rho(t). \end{cases} \quad (1)$$

这里的  $0 < \lambda, \gamma_1, \gamma_2 < 1$ , 由于关心的是  $\rho(t) \ll 1$  的情况, 所以在 (1) 式中, 忽略了关于  $\rho(t)$  的其他高阶校正项. 需要说明的是, 若  $\lambda \ll 1$ , 即使不满  $\rho(t) \ll 1$ , (1) 式仍然成立<sup>[3]</sup>. 本文考虑的是  $\rho(t) \ll 1$  的情况, 主要是为了求取网络  $\lambda_c$  的需要, 因为不能保证在  $\rho(t) \ll 1$  的情况下求取的  $\lambda_c \ll 1$ .  $\rho_\tau(t)$  ( $\tau = 0, 1, \dots, T-1, T$ ) 为在  $t - \tau$  时刻 H 的感染密度, 并且满足 (2) 式. 在 (1) 式的第一个方程中, 等号右边第一项考虑的是经过传播延迟  $T$  后, 以单位速率恢复为 S 的被感染个体 H 的密度; 第二项考虑的是在  $t$  时刻, 单个感染个体 H 产生新感染个体 H 的平均密度, 它与  $\lambda$ 、节点度 (这里用  $\langle k \rangle$  代替), 以及和健康个体接触的概率  $s(t)$  成比例; 最后一项考虑的是由于受到携带流行病个体 M 的叮咬, 健康个体 H 以传染概率  $\gamma_2$  由 S 变为 I 的平均密度. (1) 式中第二个到第  $T+2$  个方程表示的是在不同的时刻,  $\rho_\tau(t)$  之间的转换关系; (1) 式中的最后一个方程中, 等号右边第一项考虑的是处于 I 的个体 M 以单位速率死亡, 第二项考虑的是由于叮咬患病个体 H, 个体 M 以传染概率  $\gamma_1$  由 S 转变为 I 的平均密度.

$$\rho(t) = \sum_{\tau=0}^T \rho_\tau(t). \quad (2)$$

把  $s(t) + \rho(t) = 1$  代入 (1) 式中的第一个方程可得

$$\begin{aligned} \partial_t \rho(t) = & -\rho_\tau(t) + \lambda \langle k \rangle [1 - \rho(t)] \rho(t) \\ & + \gamma_2 [1 - \rho(t)] \vartheta(t). \end{aligned} \quad (3)$$

(3) 式也可通过把 (1) 式中第二个方程到第  $T+2$  个方程的等号两边分别相加得到. 经过若干个时步演化后, 系统 (1) 进入稳定状态, 令  $\rho_\tau$  ( $\tau = 0, 1, \dots, T-1, T$ ) 为  $\rho_\tau(t)$  的稳态密度值, 由稳态条件  $\partial_t \rho_\tau(t) = 0$  可得

$$\rho_0 = \rho_1 = \dots = \rho_T. \quad (4)$$

把 (4) 式代入 (2) 式可得  $\rho_\tau$  的值为

$$\rho = \frac{-\left(\lambda \langle k \rangle - \lambda \langle k \rangle \gamma_1 + \frac{\gamma_1}{T+1} + \gamma_1 \gamma_2\right) + \sqrt{\left(\lambda \langle k \rangle - \lambda \langle k \rangle \gamma_1 + \frac{\gamma_1}{T+1} + \gamma_1 \gamma_2\right)^2 - 4\lambda \gamma_1 \langle k \rangle \left(\frac{1}{T+1} - \lambda \langle k \rangle - \gamma_1 \gamma_2\right)}}{2\lambda \gamma_1 \langle k \rangle}. \quad (10)$$

由 (10) 式可知, 传播延迟和传染媒介同时存在显著影响了均匀网络中流行病稳态时的感染程度.

## 2. 2. MD-SIS 模型在无标度网络上的传播行为

在无标度网络中, 每个节点的度并不相同, 即

$$\rho_\tau = \frac{\rho}{T+1}. \quad (5)$$

结合 (1), (3) 和 (5) 式, 由稳态条件  $\partial_t \rho(t) = 0$  及  $\partial_t \vartheta(t) = 0$  可得

$$\begin{aligned} -\frac{\rho}{T+1} + \lambda \langle k \rangle (1 - \rho) \rho + \gamma_2 (1 - \rho) \vartheta = & 0, \\ -\vartheta + \gamma_1 (1 - \vartheta) \rho = & 0. \end{aligned} \quad (6)$$

由 (6) 式中第二个等式可得  $\vartheta$  为

$$\vartheta = \frac{\gamma_1 \rho}{1 + \gamma_1 \rho}. \quad (7)$$

由 (7) 式可知,  $\vartheta$  与  $\rho$  有密切联系, 即  $\vartheta$  随着  $\rho$  的增大而单调增大. 然后, 再把 (7) 式代入 (6) 式中的第一个等式可得

$$\begin{aligned} \rho \left[ \lambda \gamma_1 \langle k \rangle \rho^2 + \left( \lambda \langle k \rangle - \lambda \langle k \rangle \gamma_1 \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\gamma_1}{T+1} + \gamma_1 \gamma_2 \right) \rho \right. \\ \left. + \frac{1}{T+1} - \lambda \langle k \rangle - \gamma_1 \gamma_2 \right] = 0. \end{aligned} \quad (8)$$

对应于  $\rho$ , 由 (8) 式可得均匀网络的  $\lambda_c$  为

$$\lambda_c = \frac{1}{\langle k \rangle} \frac{1}{T+1} - \gamma_1 \gamma_2. \quad (9)$$

由 (9) 式可知, 在 MD-SIS 传播模型中,  $\lambda_c$  是一个关于  $T, \gamma_1$  以及  $\gamma_2$  的函数, 这不同于基本 SIS 传播模型. 与只考虑传播延迟或传染媒介的影响相比 (分别对应于  $\lambda_c = 1/[(T+1)\langle k \rangle]$  和  $\lambda_c = (1 - \gamma_1 \gamma_2)/\langle k \rangle$  的情况), 两者同时存在显著降低了均匀网络的  $\lambda_c$ , 从而增大了流行病爆发的危险性. 在 (9) 式中, 若令  $T = \gamma_1 = \gamma_2 = 0$  可得  $\lambda_c = 1/\langle k \rangle$ , 由此可知, 在不考虑传播延迟和传染媒介影响的情况下, 所得到的网络的  $\lambda_c$  将偏大, 这显然会影响我们对网络中流行病传播的防控.

由 (8) 和 (9) 式可知, 当  $\lambda < \lambda_c, \rho = 0$ ; 当  $\lambda \geq \lambda_c$  时, 有

与任意一个 H 相连的其他 H 的数目是不相等的. 因此, 在讨论 MD-SIS 模型在无标度网络上的传播特性时, 必须抛开网络的均匀性假设, 考虑一个度为  $k$  的被感染个体 H 的相对密度  $\rho_k(t)$ , 其稳态值表示

为  $\rho_k$ . 然而, 流行病在 H 和 M 之间的传播仍然可以认为是均匀的, 并且仅由传染概率  $\gamma_1$  和  $\gamma_2$  来决定. 由上可得该系统的动力学平均场反应方程为

$$\begin{aligned} \partial_t \rho_k(t) &= -\rho_{k,T}(t) + \lambda k [1 - \rho_k(t)] \theta(\rho(t)) \\ &\quad + \gamma_2 [1 - \rho_k(t)] \vartheta(t), \\ \partial_t \vartheta(t) &= -\vartheta(t) + \gamma_1 [1 - \vartheta(t)] \theta(\rho(t)). \end{aligned} \quad (11)$$

这里的  $\rho_{k,T}(t)$  表示在  $t - T$  时刻, 度为  $k$  的 H 被感染的相对密度,  $\theta(\rho(t))$  则表示任意一条给定的边与一个被感染 H 相连接的概率, 并约定其稳态值为  $\theta$ . 在计算  $\theta(\rho(t))$  时必须考虑无标度网络的非均匀性. 对于无关联的无标度网络, 任意一条给定的边指向度为  $s$  的个体 H 的概率与  $sP(s)$  成正比, 即随机选择的一条边更有可能连接到度数较高的被感染 H, 因此可以求得  $\theta(\rho(t))$  的表达式为

$$\theta(\rho(t)) = \frac{\sum_k kP(k)\rho_k}{\sum_s sP(s)}. \quad (12)$$

这里的  $P(k)$  为无标度网络中 H 的度分布函数, 则无标度网络中所有被感染 H 的平均密度可表示为

$$\rho(t) = \sum_k P(k)\rho_k. \quad (13)$$

根据稳态条件  $\partial_t \rho_k(t) = 0$  和  $\partial_t \vartheta(t) = 0$ , 由

(11) 式可得

$$\begin{aligned} -\rho_{k,T} + \lambda k(1 - \rho_k)\theta + \gamma_2(1 - \rho_k)\vartheta &= 0, \\ -\vartheta + \gamma_1(1 - \vartheta)\theta &= 0. \end{aligned} \quad (14)$$

由 (14) 式可知, 当系统 (11) 处于稳定状态时,  $\rho_k$  是  $\lambda, \gamma_1, \gamma_2$  和  $T$  的函数, 所以  $\theta$  便为  $\lambda, \gamma_1, \gamma_2$  和  $T$  的隐函数.

由上可知,  $\rho_{k,T} = \frac{\rho_k}{T+1}$ , 代入 (14) 式中的一个方程得

$$\begin{aligned} -\frac{\rho_k}{T+1} + \lambda k(1 - \rho_k)\theta + \gamma_2(1 - \rho_k)\vartheta &= 0, \\ \vartheta = \frac{\gamma_1\theta}{1 + \gamma_1\theta}. \end{aligned} \quad (15)$$

然后将 (15) 式中的第二个方程代入第一个方程, 得到  $\rho_k$  为

$$\rho_k = \frac{(T+1)\lambda k\theta(1 + \gamma_1\theta) + \gamma_1\gamma_2\theta}{1 + \gamma_1\theta + (T+1)\lambda k\theta(1 + \gamma_1\theta) + \gamma_1\gamma_2\theta}. \quad (16)$$

结合  $\langle k \rangle$  的表达式  $\langle k \rangle = \sum_s sP(s)$ , 由 (12) 式可求得

$$\theta = \frac{\sum_k \frac{kP(k)\rho_k}{\sum_s sP(s)}}{\langle k \rangle} = \frac{1}{\langle k \rangle} \sum_k kP(k) \frac{(T+1)\lambda k\theta(1 + \gamma_1\theta) + \gamma_1\gamma_2\theta}{1 + \gamma_1\theta + (T+1)\lambda k\theta(1 + \gamma_1\theta) + \gamma_1\gamma_2\theta}. \quad (17)$$

显然, (17) 式中有一个平凡解  $\theta = 0$ , 这对应于网络中流行病未能爆发的情况. 若使得流行病能够在网络中大范围传播, (17) 式必须存在一个关于  $\theta$  的非平凡解, 即  $\theta \neq 0$ , 则需要满足如下条件

$$\left. \frac{d}{d\theta} \left( \frac{1}{\langle k \rangle} \sum_k kP(k) \frac{(T+1)\lambda k\theta(1 + \gamma_1\theta) + \gamma_1\gamma_2\theta}{1 + \gamma_1\theta + (T+1)\lambda k\theta(1 + \gamma_1\theta) + \gamma_1\gamma_2\theta} \right) \right|_{\theta=0} \geq 1. \quad (18)$$

进一步化简 (18) 式可得出

$$\frac{\sum_k kP(k) [(T+1)\lambda k + \gamma_1\gamma_2]}{\langle k \rangle} \geq 1. \quad (19)$$

由 (19) 式可以求出无标度网络的  $\lambda_c$  的表达式为

$$\lambda_c = \frac{(1 - \gamma_1\gamma_2)\langle k \rangle}{(T+1)\langle k^2 \rangle}. \quad (20)$$

这里的  $\langle k^2 \rangle = \sum_k k^2 P(k)$ . 在 (20) 式中, 当  $T = \gamma_1 = \gamma_2 = 0$ , 即在不考虑传播延迟和传染媒介影响的情况下可得,  $\lambda_c = \frac{\langle k \rangle}{\langle k^2 \rangle}$ , 由此可知, 传播延迟和

传染媒介同时存在显著降低了无标度网络的  $\lambda_c$ .

作为无标度网络的一个特例, 现在考虑有限规模的无标度网络<sup>[18]</sup>, 即 BA 网络. 在 BA 网络中, H

的度分布为  $P(k) = 2m^2 k^{-3}$ , 这里的  $m$  为人群中连接到每个个体 H 的其他个体的最小数目. 考虑  $k$  连续取值的情况<sup>[18,19]</sup>, 可得  $\langle k \rangle = \int_m^\infty kP(k) dk = 2m$ . 引入 BA 网络中的最大连接度  $K_c$ , 当  $K_c \rightarrow \infty$ ,  $\langle k^2 \rangle \approx \int_m^{K_c} k^2 P(k) dk = 2m^2 \ln\left(\frac{K_c}{m}\right)$ , 由此可得 BA 无标度网络中的  $\lambda_c$  为

$$\lambda_c \approx \frac{(1 - \gamma_1\gamma_2)}{(T+1)m \ln\left(\frac{K_c}{m}\right)}. \quad (21)$$

由文献 [20] 可知,  $K_c$  的大小取决于 BA 无标度网络中个体 H 的总数  $N$ , 即  $K_c \approx mN^{\frac{1}{2}}$ , 并代入 (21) 式可得  $\lambda_c$  与  $N$  之间的对应关系表达式为

$$\lambda_c \approx \frac{2(1 - \gamma_1\gamma_2)}{(T + 1)m\ln N} \quad (22)$$

由(22)式可知,对于给定的  $T, \gamma_1$  以及  $\gamma_2$ , 若 BA 网络的节点数  $N \rightarrow \infty$ , 网络的  $\lambda_c \rightarrow 0$ , 这和基本 SIS 传播模型一致. 不同的是这里的  $\lambda_c$  与  $T, \gamma_1$  以及  $\gamma_2$  有关. 与单独考虑传播延迟或传染媒介存在的情况相比(分别对应于  $\lambda_c = \frac{2}{(T + 1)m\ln N}$  和  $\lambda_c = \frac{2(1 - \gamma_1\gamma_2)}{m\ln N}$  的情况), 两者同时存在显著增强了

BA 网络中流行病爆发的危险性. 在(22)式中, 若不考虑传染媒介和传播延迟的影响, 可得 BA 无标度网络的  $\lambda_c$  为  $\frac{2}{m\ln N}$ , 由此可知, 两者同时存在使得

BA 无标度网络的  $\lambda_c$  减小为原来的  $\frac{1 - \gamma_1\gamma_2}{T + 1}$ , 这必将进一步降低 BA 网络抵抗流行病传播的能力.

当  $\lambda > \lambda_c$  时, 把  $P(k)$  和  $\langle k \rangle$  的表达式代入(17)式, 可得

$$\begin{aligned} \frac{1}{m} &= \int_m^\infty \frac{(T + 1)\lambda k(1 + \gamma_1\theta) + \gamma_1\gamma_2}{k^2[1 + \gamma_1\theta + (T + 1)\lambda k\theta(1 + \gamma_1\theta) + \gamma_1\gamma_2\theta]} dk \\ &= \int_m^\infty \left( \frac{A}{k} + \frac{B}{k^2} + \frac{C}{1 + \gamma_1\theta + (T + 1)\lambda k\theta(1 + \gamma_1\theta) + \gamma_1\gamma_2\theta} \right) dk \\ &= A \ln k \Big|_m^\infty - \frac{B}{k} \Big|_m^\infty + \frac{C}{(T + 1)\lambda\theta(1 + \gamma_1\theta)} \ln[1 + \gamma_1\theta + (T + 1)\lambda k\theta(1 + \gamma_1\theta) + \gamma_1\gamma_2\theta] \Big|_m^\infty \\ &= A \ln \frac{k}{1 + \gamma_1\theta + (T + 1)\lambda k\theta(1 + \gamma_1\theta) + \gamma_1\gamma_2\theta} \Big|_m^\infty + \frac{B}{m} \\ &= A \ln \frac{1 + \gamma_1\theta + (T + 1)\lambda m\theta(1 + \gamma_1\theta) + \gamma_1\gamma_2\theta}{m(T + 1)\lambda\theta(1 + \gamma_1\theta)} + \frac{B}{m}, \end{aligned} \quad (23)$$

这里的  $A = \frac{(T + 1)\lambda(1 + \gamma_1\theta)^2}{(1 + \gamma_1\theta + \gamma_1\gamma_2\theta)^2}$ ,  $B = \frac{(1 + \gamma_1\theta + \gamma_1\gamma_2\theta)(1 + \gamma_1\theta + \gamma_1\gamma_2\theta - \gamma_1\gamma_2)}{m(T + 1)\lambda(1 + \gamma_1\theta)^2}$ ,  $C = -\frac{\gamma_1\gamma_2}{1 + \gamma_1\theta + \gamma_1\gamma_2\theta} - \frac{(T + 1)^2\lambda^2\theta(1 + \gamma_1\theta)^3}{(1 + \gamma_1\theta + \gamma_1\gamma_2\theta)^2}$ .

随后再把  $A, B$  和  $C$  代入(23)式, 可得关于变量  $\theta$  的一个等式

$$\ln\left(1 + \frac{1 + \gamma_1\theta + \gamma_1\gamma_2\theta}{m(T + 1)\lambda\theta(1 + \gamma_1\theta)}\right)$$

(24)式中的  $\theta$  有唯一解, 因为该式中等号右边为  $\theta$  的单调递增函数, 而等号左边为  $\theta$  的单调递减函数; 并且, 当  $\theta = 0$  时, 等号左边大于右边, 而当  $\theta = 1$  时, 等号左边小于右边.

再把  $P(k)$  的表达式代入(13)式可得

$$\begin{aligned} \rho &= \sum_k P(k)\rho_k = \sum_k 2m^2k^{-3} \frac{(T + 1)\lambda k\theta(1 + \gamma_1\theta) + \gamma_1\gamma_2\theta}{1 + \gamma_1\theta + (T + 1)\lambda k\theta(1 + \gamma_1\theta) + \gamma_1\gamma_2\theta} \\ &= 2m^2\theta \int_m^\infty \frac{(T + 1)\lambda k(1 + \gamma_1\theta) + \gamma_1\gamma_2}{k^3[1 + \gamma_1\theta + (T + 1)\lambda k\theta(1 + \gamma_1\theta) + \gamma_1\gamma_2\theta]} dk. \end{aligned} \quad (25)$$

若  $\int_m^\infty \frac{ax + b}{x^2(cx + d)} dx = \frac{1}{m}$ , 则容易求得

$$\int_m^\infty \frac{ax + b}{x^3(cx + d)} dx = \frac{a - c}{md} + \frac{b}{2m^2d},$$

并结合(23)和(25)式可得  $\rho$  的表达式为

$$\rho = 2m^2\theta \left[ \frac{(T + 1)\lambda(1 + \gamma_1\theta) - (T + 1)\lambda\theta(1 + \gamma_1\theta)}{m(1 + \gamma_1\theta + \gamma_1\gamma_2\theta)} \right.$$

$$\left. + \frac{\gamma_1\gamma_2}{2m^2(1 + \gamma_1\theta + \gamma_1\gamma_2\theta)} \right] = \theta \frac{2m(T + 1)\lambda(1 + \gamma_1\theta)(1 - \theta) + \gamma_1\gamma_2}{1 + \gamma_1\theta + \gamma_1\gamma_2\theta}. \quad (26)$$

这里的  $\theta$  为(24)式的解.

结合(24)和(26)式可知, 传播延迟和传染媒介同时存在明显改变了 BA 网络中流行病的传播动力

学行为.

### 3. 仿真结果与讨论

下面分别以 WS 网络和 BA 无标度网络为例, 对上述理论分析所得结论进行可视化. 在可视化过程中, 着重对传播延迟或传染媒介分别单独存在, 以及两者同时存在的情况进行分析比较, 以便进一步讨论两者同时存在对流行病传播行为的影响. 网络参数的选取如下: 在 WS 网络中令  $\langle k \rangle = 6$ ; 在 BA 网络中约定  $m = 2$ .

#### 3.1. WS 小世界网络

图 1 描述了在  $\lambda = \gamma_1 = \gamma_2 = 0.05, T = 2$ , 以及人群中个体 H 的初始感染密度  $\rho(0) = 0.0015$  的情况下,  $\rho(t), \rho_\tau(t) (\tau = 0, 1, 2)$ , 以及  $\vartheta(t)$  随时间  $t$  的演化关系. 由图 1 可知, 当  $\lambda = 0.05 < 1/\langle k \rangle \approx 0.17$  时, 对于基本 SIS 传播模型,  $\rho$  应当为 0, 即流行病不能在网络中传播开; 然而, 在 MD-SIS 传播模型中, 流行病不但能在人群和传染媒介中传播扩散, 而且最终还会达到某一稳定状态 ( $\rho > 0, \vartheta > 0$ ). 这表明传染媒介和传播延迟的同时存在大幅降低了 WS 网络的  $\lambda_c$ , 使得流行病能够以很小的传播率  $\lambda$  在人群中大范围传播, 并最终趋于稳定状态. 此外, 图 1 还显示出  $\rho_\tau(t)$  之间所存在的演化关系: 当演化时间  $t$  的取值比较小时, 有  $\rho_0(t) > \rho_1(t) > \rho_2(t)$  (如图 1 中的插图所示); 但是随着演化时间  $t$  的增加,  $\rho_\tau(t)$  最终将会达到稳定状态, 且有  $\rho_0 = \rho_1 = \rho_2$ .

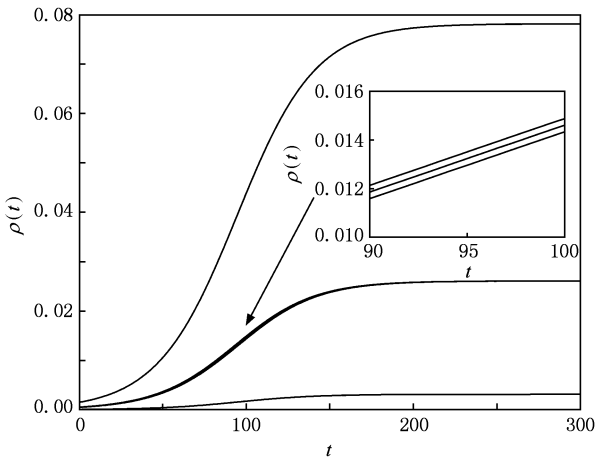


图 1 流行病的感染程度与时间  $t$  的演化关系 由上而下各曲线依次对应  $\rho(t), \rho_0(t), \rho_1(t), \rho_2(t), \theta(t)$

图 2 显示了在传播延迟和传染媒介共同作用下,  $\lambda_c$  随  $T$  和  $\gamma_1(\gamma_2)$  的变化情况. 由图 2 可知, 随着  $T$  和  $\gamma_1(\gamma_2)$  的不断增大, WS 网络的  $\lambda_c$  将迅速减小到 0, 这表明与传播延迟或传染媒介单独存在的情况相比, 两者同时存在对 WS 网络的  $\lambda_c$  产生的影响明显增大. 此外, 图 2 还表明,  $\lambda_c$  沿着  $T$  下降的趋势明显大于沿着  $\gamma_1(\gamma_2)$  下降的趋势, 这说明传播延迟  $T$  对 WS 网络的  $\lambda_c$  的影响较大.

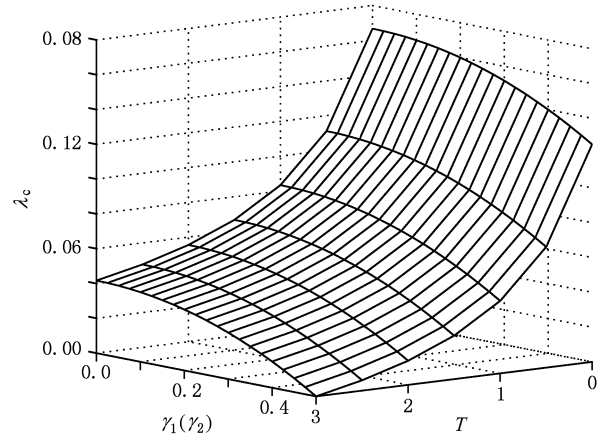


图 2  $\lambda_c$  与  $\gamma_1(\gamma_2)$  和  $T$  的关系

图 3 给出了对应于不同的有效传播率  $\lambda, \rho$  的变化曲线. 从图 3 可以看出, 与传播延迟或传染媒介分别单独存在 (分别对应于  $T = 1, \gamma_1 = \gamma_2 = 0$  和  $T = 0, \gamma_1 = \gamma_2 = 0.4$ ), 以及两者都不存在 ( $T = \gamma_1 = \gamma_2 = 0$ ) 相比, 两者同时存在 ( $T = 1, \gamma_1 = \gamma_2 = 0.4$ ) 显著降低了均匀网络的  $\lambda_c$ , 增大了  $\rho$ . 从生物学角度来看, 在传播延迟和传染媒介的作用下, 流行病在人群中爆发的可能性增大, 传播的速度也显著加快, 并且最终仍然会达到稳定状态.

图 4 和图 5 分别比较了传播延迟  $T$  和传染媒介的传染概率  $\gamma_1(\gamma_2)$  与  $\rho$  之间的变化关系. 由图 4 和图 5 可知, 在  $\lambda$  取值较小的情况下 ( $\lambda = 0.001$ ), 随着  $T$  和  $\gamma_1(\gamma_2)$  的增加, 仍然可以获得较大的  $\rho$ . 因此, 与单独考虑传播延迟或传染媒介的影响相比, 两者同时存在显著增加了网络中被感染 H 的数目. 此外, 我们还发现, 对于给定的  $\lambda = 0.001, \rho$  分别与  $\ln T$  和  $\ln \gamma_1(\gamma_2)$  呈近似线性关系, 即有  $\rho \sim \ln T$  和  $\rho \sim \ln \gamma_1(\gamma_2)$ , 并且传播延迟  $T$  的变化能够引起  $\rho$  更大的变化, 即传播延迟对 WS 网络上流行病传播行为的影响较大.

#### 3.2. BA 无标度网络

图 6 画出了  $\rho$  和  $\lambda$  之间的对应关系. 从图 6 可

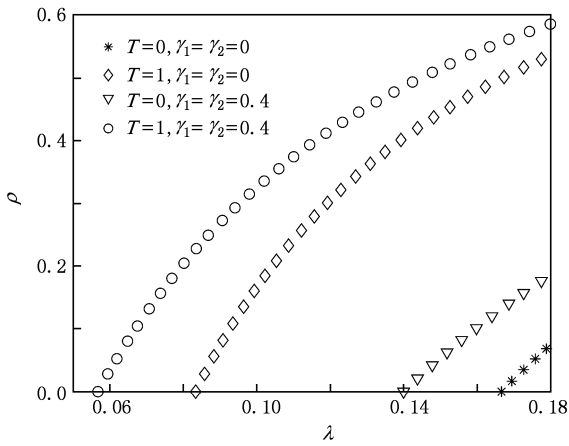


图3 WS网络中感染密度  $\rho$  与有效传播率  $\lambda$  的对应关系

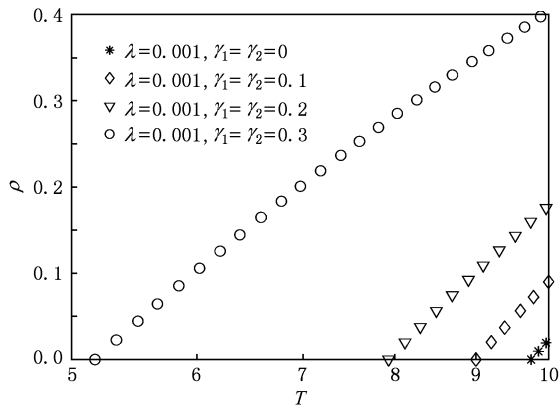


图4 WS网络中感染密度  $\rho$  与  $T$  的对数关系图

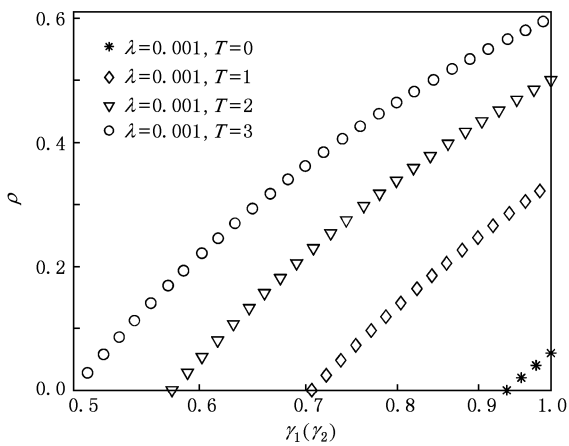


图5 WS网络中感染密度  $\rho$  随  $\gamma_1(\gamma_2)$  的对数变化曲线

知,在  $T$  和  $\gamma_1(\gamma_2)$  取值不同的情况下,  $\lambda_c$  几乎消失,即  $\lambda_c \approx 0$ , 并且系统最终都会达到稳定状态,这和基本 SIS 模型在 BA 无标度网络中的传播行为一

致,不同的是传播延迟和传染媒介的存在能够显著加速网络中流行病的传播,并且与传播延迟或传染媒介单独存在的影响相比,两者同时对流行病传播特性的影响较大. 这一结论也与实际情况相符,一个处于 I 的 H,如果携带的流行病具有比较长的感染期,那么该个体感染其他健康个体的概率就会增加,从而造成更多健康 H 被感染. 同时,传染媒介的存在必将进一步加速感染群体的扩大.

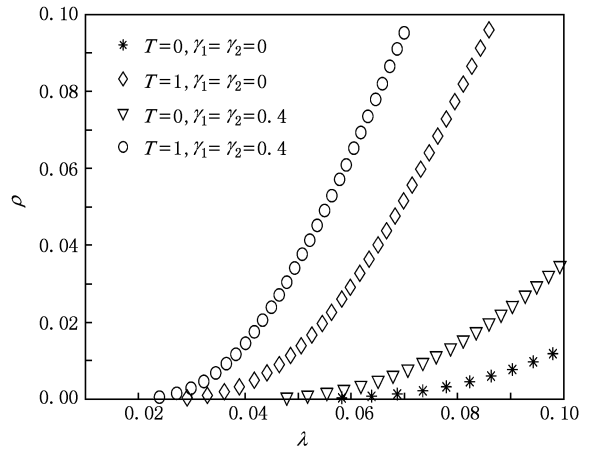


图6 BA 无标度网络中感染密度  $\rho$  随  $\lambda$  的变化情况

图7和图8分别给出了BA网络中,  $\rho$  与传播延迟  $T$  和传染媒介的传染概率  $\gamma_1(\gamma_2)$  之间的对应关系. 图7和图8表明,在传播延迟和传染媒介同时存在的情况下,对于给定的  $\lambda = 0.001$ ,  $\rho$  与  $T$  呈幂率关系,而与  $\gamma_1(\gamma_2)$  则为线性关系,即有  $\ln \rho \sim \ln T$ ,  $\rho \sim \gamma_1(\gamma_2)$ . 由此可知,传播延迟对流行病在BA网络上传播行为的影响大于传染媒介产生的影响;与单独考虑传播延迟或传染媒介的影响相比,两者同时存在将会显著促进流行病在网络中的传播,从而大幅增加网络中被感染的节点数目. 在  $\lambda$  取值确定的情况下,对于不同的  $\gamma_1(\gamma_2)$ , 图7中各条直线的斜率都基本相等;对于不同的  $T$ ,图8中每条直线的斜率也分别相同.

对比图4和7可知,在  $T$  和  $\lambda$  取值相同的情况下,随着  $\gamma_1(\gamma_2)$  取值的变化,  $\rho$  在WS网络中的变化幅度大于在BA网络中的变化幅度. 由此可知,传染媒介对流行病在WS网络上传播行为的影响较大,而对流行病在BA网络上传播行为的影响较小. 对比图5和8,可以得出类似的结论,即在  $\gamma_1(\gamma_2)$  和  $\lambda$  取值相同的情况下,传播延迟  $T$  对流行病在WS网络上传播特性的影响强于对流行病在BA网络上传播行为的影响. 出现上述两种情况的主要原

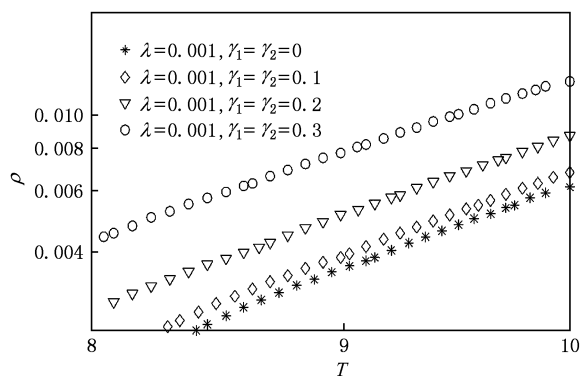


图 7 BA 无标度网络中分别取对数后的感染密度  $\rho$  与  $T$  的对应关系

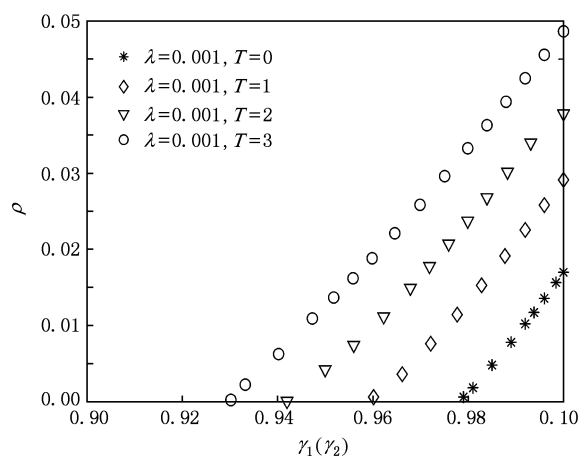


图 8 BA 无标度网络中感染密度  $\rho$  随  $\gamma_1(\gamma_2)$  的变化情况

因在于 WS 网络和 BA 网络具有不同的网络拓扑结构. 在 BA 网络中, 当 H 的数目  $N$  较大时,  $\lambda_c \approx 0$ ,  $(1 - \gamma_1\gamma_2)/(T + 1) \times 0 = 0$ , 所以传染媒介和传播延迟的引入对 BA 网络的  $\lambda_c$  的改变不大, 因此,  $\gamma_1(\gamma_2)$  或  $T$  的变化对  $\rho(t)$  改变程度的影响较小. 在 WS 网络中则存在正的  $\lambda_c$ , 传染媒介和传播延迟的共同作用大幅降低了  $\lambda_c$ , 增大了流行病在网络上传播的概率, 所以  $\rho(t)$  对于  $\gamma_1(\gamma_2)$  或  $T$  的变化更加敏感.

由上述理论分析和仿真结果可知, 与传染媒介或传播延迟单独存在的情况相比, 两者的共同作用显著增大了流行病爆发的可能性, 增强了流行病的感染程度. 因此, 为了较好地控制流行病的传播, 不仅要尽可能缩短流行病的传播延迟, 而且还要设法减少患病人群与传染媒介的接触. 这就要求医疗机构对患病人群进行及时的隔离, 并给予有效的医学治疗. 由于传播延迟对流行病传播特性的影响较大, 能否及时有效地对患病人群实施治疗将在很大程度上影响对流行病传播控制的效果.

#### 4. 结 论

本文提出了一种具有传染媒介和传播延迟的 SIS 传播模型 (MD-SIS), 基于平均场理论, 分别研究了该模型在均匀网络和无标度网络上的传播动力学行为. 经研究发现: 传染媒介和传播延迟的同时存在加速了流行病在复杂网络中的传播, 增强了流行病的感染强度; 其次, 在均匀网络中, 随着传染媒介的传染概率和传播延迟的增加, 网络的传播临界值  $\lambda_c$  逐渐消失; 在无标度网络中, 当传播率一定时, 流行病的感染程度与传播延迟呈幂率关系, 而与传染媒介的传染概率呈线性关系; 再次, 与传染媒介的影响相比, 传播延迟对流行病传播行为的影响较大; 此外, 传染媒介和传播延迟对无标度网络上传播行为的影响小于对均匀网络上传播行为的影响. 传染媒介和传播延迟对流行病传播特性的影响值得进一步深入研究. 为了便于分析问题, 本文只考虑了人群中每个个体的传播延迟都相同, 以及传染媒介之间不传播疾病的情况, 而实际情况却是传播延迟会因不同个体之间存在着差异而有所不同, 并且传染媒介之间同样存在疾病传播的可能性. 因此, 今后应进一步考虑更为复杂的情况. 另外, 根据流行病的传播特性设计出有效的免疫策略也是一个值得关注的问题.

[1] Newman M E J 2003 *SIAM Rev.* **45** 167  
 [2] Boccaletti S, Latora V, Moreno Y, Chavez M, Hwang D U 2006 *Phys. Rep.* **424** 175  
 [3] Anderson R M, May R M 1992 *Infectious Diseases of Humans: Dynamics and Control* (Oxford: Oxford University Press)  
 [4] Bailey N T J 1993 *The Mathematical Theory of Infectious Diseases*

(Berlin: Springer-Verlag)

[5] Wang Y, Zheng Z G 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 4421 (in Chinese) [王 延、郑志刚 2009 物理学报 **58** 4421]  
 [6] Pastor-Satorras R, Vespignani A 2001 *Phys. Rev. Lett.* **86** 3200  
 [7] Lloyd A L, May R M 2001 *Science* **292** 1316  
 [8] Pastor-Satorras R, Vespignani A 2001 *Phys. Rev. E* **63** 066117

- [9] Masuda N, Konno N 2006 *J. Theor. Biol.* **243** 64
- [10] Riley S, Fraser C, Donnelly C, Ghani A, Abu-Raddad L 2003 *Science* **300** 1961
- [11] Shi H J, Duan Z S, Chen G R 2008 *Physica A* **387** 2133
- [12] Barthelemy M, Barrat A, Pastor-Satorras R, Vespignani A 2004 *Phys. Rev. Lett.* **92** 178
- [13] Xu X J, Chen G R 2009 *Int. J. of Bifur. Chaos* **19** 623
- [14] Tchuenche J M, Nwagwo A, Levins R 2007 *Math. Meth. Appl. Sci.* **30** 733
- [15] Zaman G, Kang Y H, Jung H 2009 *Biosystems* **98** 43
- [16] Briat C, Varriest E L 2009 *Biomed. Signal Process. Contr.* **4** 272
- [17] Huang W, Jiang R, Hu M B, Wu Q S 2009 *Chin. Phys. B* **18** 1306
- [18] Barabási A L, Albert R, Jeong H 1999 *Physica A* **272** 173
- [19] Barabási A L, Albert R 1999 *Science* **286** 509
- [20] Takeuchi Y, Ma W B, Beretta E 2000 *Nonlinear Anal.* **42** 931

## Spreading of epidemics in complex networks with infective medium and spreading delay<sup>\*</sup>

Wang Ya-Qi<sup>1)</sup> Jiang Guo-Ping<sup>1)2)†</sup>

1) (Center for Control and Intelligence Technology, Nanjing University of Posts and Telecommunications, Nanjing 210003, China)

2) (College of Automation, Nanjing University of Posts and Telecommunications, Nanjing 210003, China)

(Received 3 November 2009; revised manuscript received 22 December 2009)

### Abstract

In this paper, we propose a new susceptible-infected-susceptible (SIS) model with infective medium and spreading delay (MD-SIS) to study epidemic spreading in networks based on the mean-field theory. Theoretical analysis and simulation results show that the existence of infective medium and spreading delay can significantly enhance the risk of outbreak of epidemics and accelerate the epidemic spreading in the networks. For a given propagation rate, we found that the epidemic prevalence on the homogeneous network varies logarithmically with infection probability of infective medium and spreading delay respectively, and the epidemic prevalence on the scale-free network has a power-law relation with infection probability of infective medium, but a linear relation with spreading delay.

**Keywords:** infective medium, spreading delay, homogeneous network, scale-free network

**PACC:** 0250, 0565, 0570J

---

\* Project supported by the Program for New Century Excellent Talents in Universities of China (Grant No. NCET-06-0510), the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 60874091) and the Scientific Innovation Program for University Research Students in Jiangsu Province, China (Grant No. CX08B-081Z).

† Corresponding author. E-mail: jianggp@njupt.edu.cn