

# 复杂网络中考虑不完全免疫的病毒传播研究\*

王亚奇<sup>1)</sup> 蒋国平<sup>1)2)†</sup>

1) (南京邮电大学控制与智能技术研究中心, 南京 210003)

2) (南京邮电大学自动化学院, 南京 210003)

(2009 年 12 月 9 日收到; 2010 年 1 月 3 日收到修改稿)

复杂网络中不完全免疫包括免疫失败和免疫失效两种情况, 本文研究两者同时存在对网络病毒传播行为的影响, 基于平均场理论, 提出一种新的传播模型. 理论分析表明, 免疫失败和免疫失效同时存在显著降低了网络的传播临界值, 增强了病毒的感染程度. 根据传播临界值与免疫节点密度、免疫成功率以及免疫失效率之间的关系, 给出有效控制网络病毒传播的策略. 通过数值仿真进行验证.

**关键词:** 复杂网络, 病毒传播, 不完全免疫, 传播临界值

**PACC:** 0250, 0565, 0570J

## 1. 引 言

甲型 H1N1 流感在人群中的流行, 计算机病毒在互联网上的肆虐, 以及信息、谣言甚至灾害在社会中的蔓延等都可视为病毒在复杂网络上的传播现象<sup>[1,2]</sup>. 为了刻画病毒在网络中的传播过程, 人们提出了多种病毒传播模型, 其中包括 SIS (susceptible-infected-susceptible) 模型、SIR (susceptible-infected-removed) 模型、SI (susceptible-infected) 模型和 SEIR (susceptible-exposed-infected-removed) 模型等<sup>[3-12]</sup>. 在 SIS 传播模型中, 网络中的每个节点都处于两种可能的状态: 易染状态 (健康状态) S 和感染状态 I. 如果和一个感染节点接触, 一个易染节点就会以一定概率转变为感染状态; 经过有效的治疗后, 被感染节点又将以某种概率恢复为 S. 然而, 在 SIR 传播模型中, 由于被治愈后的感染节点具有终身免疫能力——不具有传染性, 也不会再次被感染, 因此, 网络中的每个节点都处于 3 种可能的状态: S, I 和被移出状态 R.

利用传播模型, 人们首先深入研究了病毒在均匀网络 (节点度分布近似为 Poisson 分布) 上的传播动力学行为<sup>[13]</sup>, 并得出如下重要结论: 在均匀网络中存在正的传播临界值  $\lambda_c = \frac{1}{\langle k \rangle}$ , 这里的  $\langle k \rangle$  为网

络的平均度; 如果有效传播率  $\lambda > \lambda_c$ , 病毒就能够在网络中爆发, 并最终达到某一稳定状态; 反之, 病毒将呈指数快速消亡. 随后, 人们发现许多真实的网络具有无标度特性<sup>[14-16]</sup>, 即网络的节点度分布函数  $P(k)$  具有幂率形式  $P(k) \sim k^{-\gamma}$  ( $2 \leq \gamma \leq 3$ ). 大量有关网络的这种无标度特性对病毒传播过程影响的研究表明: 对于规模较大的无标度网络, 其  $\lambda_c = \frac{\langle k \rangle}{\langle k^2 \rangle} \approx 0$ , 也就是说, 无论病毒的  $\lambda$  多么小, 只要网络的规模足够大时, 病毒始终都能够在网络中传播开. 这完全不同于病毒在均匀网络上的传播规律, 其原因在于两种网络具有不同的连接度分布.

基于病毒传播的机理, 人们便能够借助于各种各样的免疫策略 (如随机免疫、目标免疫、图覆盖免疫和熟人免疫等) 来有效地控制病毒在网络中的传播<sup>[17-21]</sup>, 其中随机免疫对均匀网络比较有效, 而目标免疫则比较适合于无标度网络. 在以往的研究中, 通常认为网络中所有被免疫的节点都获得了免疫能力, 即免疫成功的概率 (免疫效力) 为 1; 并且认为节点一旦被成功免疫, 将不会再次被感染, 即终身具有免疫能力. 然而, 已经有研究指出<sup>[22-29]</sup>, 在许多真实的系统中, 免疫成功的概率通常小于 1, 即存在免疫失败的情况, 这将导致部分被免疫的节点未能获得相应的免疫能力; 同时, 对于免疫成功的节

\* 教育部新世纪优秀人才支持计划 (批准号: NCET-06-0510)、国家自然科学基金 (批准号: 60874091) 和江苏省“六大人才高峰”高层次人才计划 (批准号: SJ209006) 资助的课题.

† 通讯联系人. E-mail: jianggp@njupt.edu.cn

点,经过一段时间后将会以一定的概率失去免疫能力,即存在免疫失效的情况.在实际网络免疫的过程中,如果考虑免疫失败和免疫失效的影响,病毒的传播行为将发生哪些变化?这些研究具有重要的现实意义.

显然,国内外已经开始关注上述问题.陈奇志等借助于 SIR 传播模型,讨论了免疫失败对免疫效果的影响,得出了免疫成功率决定了网络中被免疫节点的密度等结论<sup>[22]</sup>;史红静等则提出了一种具有不完全免疫的 SIS 传播模型,通过分析该模型在无标度网络中的传播过程,发现了网络的传播临界值与免疫失效率有关<sup>[23]</sup>;Gandon 等采用 SI 传播模型,分析了存在免疫失败的情况下,病毒传播动力学行为的变化<sup>[24]</sup>;Ball 等则基于 SEIR 传播模型,考虑了免疫失败对网络中病毒传播控制效果的影响<sup>[25]</sup>;Wang 等应用 SIR 传播模型,分别研究了在无标度网络采取目标免疫后,免疫失败和被遗漏关键节点对病毒传播过程的影响,得出了网络传播临界值的倒数与免疫成功率呈线性关系等结论<sup>[26]</sup>.

上述文献研究了存在免疫失败或免疫失效情况下的病毒传播特性的变化,然而在实际网络免疫过程中,两者往往同时存在.本文同时考虑免疫失败和免疫失效的存在对病毒传播行为的影响,提出一种新的 SIR 传播模型,在对均匀网络和无标度网络分别实施随机免疫和目标免疫的基础上,利用平均场理论,研究该模型在两种网络上的传播动力学行为.研究表明,同时考虑免疫失败和免疫失效影响的情况下,网络的传播临界值显著降低,而网络中被感染的节点数则明显增加.研究还发现,网络的传播临界值与免疫节点密度、免疫成功率以及免疫失效率有关.通过数值仿真对所得结论进行验证,并给出有效控制网络中病毒传播的策略.希望我们的研究有助于对病毒在人群中的流行,以及病毒在通信网络上传播的防控.

## 2. 免疫失败和免疫失效同时存在的 SIR 传播模型

当病毒开始在网络中出现时,为了有效地控制其传播,通常需要对网络中的部分节点进行免疫.在本文提出的 SIR 传播模型中,我们约定网络中免疫节点密度为  $\alpha$  ( $0 < \alpha < 1$ ),免疫成功率为  $\beta$  ( $0 < \beta < 1$ ),因此,对于一个规模为  $N$  的网络,免疫成

功节点所占的比例为  $\alpha\beta$ .一般情况下,免疫成功率因不同节点之间存在着差异而有所不同,为了分析问题方便,这里假设所有被免疫节点的免疫成功率均为  $\beta$ .

由上述可知,在本文提出的 SIR 传播模型中,网络中的每个节点都处于如下 4 种状态之一: S, I, R 和免疫状态 Im. 和基本 SIR 传播模型相同,在每一个时步,如果和一个感染节点接触,一个易染节点将以传播率  $\gamma$  转变为 I,这里的易染节点包括未被免疫的节点以及免疫失败的节点,并假设这两类节点具有相同的  $\gamma$ ;经过有效的治疗,一个感染节点将以概率  $\delta$  转变为 R. 定义  $\lambda = \frac{\gamma}{\delta}$ ,不失一般性,这里令  $\delta = 1$ ,因为这只影响病毒传播时间尺度的定义.与基本 SIR 传播模型不同之处在于:

由于存在免疫失效的情况,免疫成功的节点经过一个或长或短的时间段后,将会以一定概率失去免疫能力.由此可知,如果和一个感染节点接触,一个免疫成功的节点将会以概率  $\sigma\lambda$  由 Im 转变为 I,为了便于分析问题,这里忽略不同个体之间存在的差异,假设所有免疫成功节点的免疫失效率均为  $\sigma$ .对于已经失去免疫能力且未被感染的节点,这里认为他们仍然处于 Im,即不考虑节点由 Im 转变为 S 的情况,这样处理的结果只会改变处于 S 和 Im 的节点数,而不会改变整个网络中被感染节点的密度,因此不会影响病毒的传播动力学行为.

在  $t$  时刻,如果和  $k_t$  个感染节点接触,一个易染节点在  $t+1$  时刻被感染的概率为  $\lambda_{t+1} = 1 - (1 - \lambda)^{k_t}$ ,当  $\lambda$  取值较小时有  $\lambda_{t+1} \approx \lambda k_t$ .同理可得,由于受到免疫失效的影响,在  $t$  时刻,如果和  $k_t$  个感染节点接触,一个免疫成功的节点在  $t+1$  时刻被感染的概率为  $\lambda'_{t+1} \approx \sigma\lambda k_t$ .

在本文提出的 SIR 传播模型中,网络中的易染节点将遵循从 S $\rightarrow$ I $\rightarrow$ R 的转换过程,而免疫成功的节点将遵循从 Im $\rightarrow$ I $\rightarrow$ R 的转换过程,并且假设网络中易染节点和被感染节点均匀混合,即感染强度与被感染节点的密度成比例.

下面借助于平均场理论,分别研究本文提出的 SIR 模型在均匀网络和无标度网络上的传播特性,以此来分析免疫失败和免疫失效同时存在的情况下,病毒传播行为的变化.

### 2.1. 所提 SIR 模型在均匀网络上的传播行为

为讨论所提 SIR 模型在均匀网络上的传播行

为,首先约定对均匀网络施加了免疫节点密度为  $\alpha$  的随机免疫,免疫成功率为  $\beta$ . 在均匀网络中,每一个节点的度  $k$  都约等于  $\langle k \rangle$ . 定义在时刻  $t$  时,处于 S, I, R 和 Im 的节点密度分别为  $S(t), \rho(t), R(t)$  和  $I(t)$ , 并满足归一化条件:

$$S(t) + \rho(t) + R(t) + I(t) = 1. \quad (1)$$

忽略网络中不同节点之间的度相关性,运用文献 [17] 提出的方法,由动力学平均场理论可得  $S(t), \rho(t), R(t)$  和  $I(t)$  随时间  $t$  演化的反应方程分别为

$$\frac{d\rho(t)}{dt} = -\rho(t) + \lambda\langle k \rangle \rho(t) S(t) + \sigma\lambda\langle k \rangle \rho(t) I(t), \quad (2)$$

$$\frac{dS(t)}{dt} = -\lambda\langle k \rangle \rho(t) S(t), \quad (3)$$

$$\frac{dI(t)}{dt} = -\sigma\lambda\langle k \rangle \rho(t) I(t), \quad (4)$$

$$\frac{dR(t)}{dt} = \rho(t). \quad (5)$$

这里的  $0 < \lambda, \sigma < 1$ . (2) 式中等号右边第一项考虑的是被感染节点以单位速率转变为 R 态;第二项考虑的是在易染节点中,单个感染节点产生新感染节点的平均密度,它与有效传播率  $\lambda$ 、节点度  $\langle k \rangle$ , 以及和易染节点连接的概率  $S(t)$  成比例;最后一项考虑的是在免疫成功的节点中,由于免疫失效的存在,单个感染节点产生新感染节点的平均密度,它和  $\sigma, \lambda, \langle k \rangle$ , 以及和免疫成功节点连接的概率  $I(t)$  成比例.

病毒在网络中传播的初始时刻,假设被感染节点所占的比例很小,且随机分布在整个网络中. 由于对均匀网络采取了免疫节点密度和免疫成功率分别为  $\alpha$  和  $\beta$  的随机免疫,从而可得初始条件:

$$\begin{aligned} \rho(0) &= 0, \\ R(0) &= 0, \\ S(0) &= 1 - \alpha\beta, \\ I(0) &= \alpha\beta. \end{aligned} \quad (6)$$

结合上述初始条件,由(3)和(4)式可得网络中易染节点和免疫成功节点密度的表达式分别为

$$S(t) = (1 - \alpha\beta) \exp[-\lambda\langle k \rangle \int_0^t \rho(u) du], \quad (7)$$

$$I(t) = \alpha\beta \exp[-\sigma\lambda\langle k \rangle \int_0^t \rho(u) du]. \quad (8)$$

定义辅助函数  $\phi(t)$ , 使其为

$$\phi(t) = \int_0^t \rho(u) du = R(t). \quad (9)$$

由(9)式可知,  $\phi(t)$  即为网络中处于 R 的节点密度  $R(t)$ . 计算(9)式关于时间  $t$  的微分,可得  $\phi(t)$  的一个自洽方程为

$$\begin{aligned} \frac{d\phi(t)}{dt} &= \rho(t) \\ &= 1 - S(t) - R(t) - I(t) \\ &= 1 - (1 - \alpha\beta) \exp(-\lambda\langle k \rangle \phi(t)) \\ &\quad - \phi(t) - \alpha\beta \exp(-\sigma\lambda\langle k \rangle \phi(t)). \end{aligned} \quad (10)$$

当系统处于稳定状态时,即  $t \rightarrow \infty$  时,  $\rho(\infty) = 0$ . 因此,由(9)式可得

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{d\phi(t)}{dt} = 0. \quad (11)$$

结合(10)和(11)式可求出稳态时  $\phi(\infty)$  为

$$\begin{aligned} \phi(\infty) &= 1 - (1 - \alpha\beta) \exp(-\lambda\langle k \rangle \phi(\infty)) \\ &\quad - \alpha\beta \exp(-\sigma\lambda\langle k \rangle \phi(\infty)) \\ &\equiv F(\phi(\infty)), \end{aligned} \quad (12)$$

这里的  $F(\phi(\infty))$  为辅助函数. 显然, (12) 式中有一个平凡解  $\phi(\infty) = 0$ , 而当  $\phi(\infty) = 0$  时, 由(9)式可知,  $R(\infty) = 0$ , 这表明当病毒传播达到稳定状态时, 不存在被感染的节点, 进而说明病毒不曾在网络中传播. 要使病毒能够在网络中大范围传播, (12) 式必须存在一个关于  $\phi(\infty)$  的非平凡解, 即  $\phi(\infty) \neq 0$ , 则需要满足条件:

$$\left. \frac{dF(\phi(\infty))}{d\phi(\infty)} \right|_{\phi(\infty)=0} \geq 1. \quad (13)$$

进一步化简(13)式可得

$$\lambda\langle k \rangle (1 - \alpha\beta + \alpha\beta\sigma) \geq 1. \quad (14)$$

定义  $R(\infty)$  为稳态时病毒的感染程度. 对应于  $R(\infty)$ , 由(14)式得出均匀网络的  $\lambda_c$  为

$$\lambda_c = \frac{1}{[1 - \alpha\beta(1 - \sigma)]\langle k \rangle}. \quad (15)$$

由(15)式可知,  $\lambda_c$  是一个关于  $\alpha, \beta$  以及  $\sigma$  的函数. 与只考虑存在免疫失败或免疫失效的情况相比(分别对应于  $\lambda_c = \frac{1}{(1 - \alpha\beta)\langle k \rangle}$  和  $\lambda_c = \frac{1}{[1 - \alpha(1 - \sigma)]\langle k \rangle}$  的情况), 两者的同时存在显著降低了网络的  $\lambda_c$ , 从而增大了病毒爆发的危险性. 在(15)式中, 当  $\beta = 1, \sigma = 0$  时, 即在不考虑免疫失败和免疫失效影响的情况下可得

$$\lambda_c = \frac{1}{(1 - \alpha)\langle k \rangle}. \quad (16)$$

对比(15)式和(16)式可知, 在均匀网络免疫的过程中, 对于给定的  $\alpha$ , 若不考虑免疫失败和免疫失效的影响, 所获得的  $\lambda_c$  将会偏大. 由此可知, 我们通

常过高估计了实际获得的免疫效果,显然这不利于病毒的防控. 为了较好地控制网络中病毒的传播,就应该免疫更多的节点,同时还要尽可能避免免疫失败,并减少免疫失效的影响.

在病毒的  $\lambda$  已知的情况下,对于给定的  $\sigma$  和  $\beta$ ,若想获得预期的免疫效果,相应的  $\alpha$  可由(15)式计算得出

$$\alpha = \frac{\lambda \langle k \rangle - 1}{\beta(1 - \sigma)\lambda \langle k \rangle}. \quad (17)$$

当  $\lambda < \lambda_c$  时,  $R(\infty) = 0$ ; 当  $\lambda \geq \lambda_c$  时,由(9)和(12)式可得

$$R(\infty) = 1 - (1 - \alpha\beta) \exp(-\lambda \langle k \rangle R(\infty)) - \alpha\beta \exp(-\sigma\lambda \langle k \rangle R(\infty)). \quad (18)$$

在忽略有关  $R(\infty)$  高阶项的情况下,利用 Maclaurin 展开公式进一步化简(18)式可得

$$R(\infty) \approx [1 - \alpha\beta(1 - \sigma)]\lambda \langle k \rangle R(\infty) - \frac{1}{2}(1 - \alpha\beta + \alpha\beta\sigma^2) \times [\lambda \langle k \rangle R(\infty)]^2. \quad (19)$$

从而由(19)式解得  $R(\infty)$  为

$$R(\infty) \approx \frac{2[1 - \alpha\beta(1 - \sigma)]\lambda \langle k \rangle - 2}{[1 - \alpha\beta(1 - \sigma^2)]\lambda^2 \langle k \rangle^2}. \quad (20)$$

(20)式表明对于均匀网络,在本文提出的 SIR 传播模型中,  $R(\infty)$  是关于  $\lambda, \alpha, \beta$  和  $\sigma$  的函数,这显然与其他 SIR 传播模型不同. 因此,对于给定的  $\lambda$  和  $\alpha$ ,免疫失败和免疫失效同时存在影响了病毒的传播行为,从而减弱了随机免疫在均匀网络中的免疫效果.

## 2.2. 所提 SIR 模型在无标度网络上的传播行为

为讨论所提 SIR 模型在无标度网络上的传播特性,首先假设对无标度网络中度  $k > k_c$  的节点实施了目标免疫,这里定义  $k_c$  为被免疫节点的度临界值. 对于规模比较大的无标度网络,免疫过程中难免会遗漏一些难以被发现的关键节点. 为了表明被遗漏关键节点的存在,对于度  $k > k_c$  的节点,我们随机选取比例为  $\alpha$  的节点进行免疫,即免疫节点密度为  $\alpha$ ,而被遗漏关键节点的比例则为  $1 - \alpha$ ,同时假设免疫成功率为  $\beta$ . 由于无标度网络中每一个节点的度并不相同,我们约定在时刻  $t$  时,度为  $k$  的节点处于 S, I, R 和 Im 的相对密度分别为  $S_k(t), \rho_k(t), R_k(t)$  和  $I_k(t)$ , 并且满足归一化条件:

$$S_k(t) + \rho_k(t) + R_k(t) + I_k(t) = 1. \quad (21)$$

由动力学平均场理论可得  $S_k(t), \rho_k(t), R_k(t)$  和  $I_k(t)$  随时间  $t$  演化的反应方程为

$$\frac{d\rho_k(k)}{dt} = \begin{cases} -\rho_k(t) + \lambda k \theta(t) S_k(t) \\ \quad + \sigma \lambda k \theta(t) I_k(t) & (k > k_c), \\ -\rho_k(t) + \lambda k \theta(t) S_k(t) & (k \leq k_c), \end{cases} \quad (22)$$

$$\frac{dS_k(k)}{dt} = -\lambda k \theta(t) S_k(t), \quad (23)$$

$$\frac{dI_k(k)}{dt} = \begin{cases} -\sigma \lambda k \theta(t) I_k(t) & (k > k_c), \\ 0 & (k \leq k_c), \end{cases} \quad (24)$$

$$\frac{dR_k(k)}{dt} = \rho(t). \quad (25)$$

这里的  $\theta(t)$  表示任意一条给定的边与一个被感染节点相连接的概率. 在计算  $\theta(t)$  时必须考虑无标度网络的非均匀性. 对于无关联的无标度网络(忽略不同节点之间的度相关性),任意一条给定的边指向度为  $s$  节点的概率与  $sP(s)$  成比例<sup>[11,30]</sup>,即随机选择的一条边更有可能连接到度数较高的感染节点,从而可以求得  $\theta(t)$  的表达式为

$$\theta(t) = \frac{\sum_k k P(k) \rho_k(t)}{\sum_s s P(s)} = \frac{\sum_k k P(k) \rho_k(t)}{\langle k \rangle}. \quad (26)$$

这里  $\langle k \rangle = \sum_s s P(s)$ . 假设病毒在网络中传播的初始时刻被感染节点所占的比例很小,并且随机分布在整个网络中;同时考虑到被遗漏关键节点和免疫失败的存在,因此可得初始条件:

$$\begin{aligned} \rho_k(0) &= 0, \\ R_k(0) &= 0, \\ S_k(0) &= \begin{cases} 1 - \alpha\beta & (k > k_c) \\ 1 & (k \leq k_c) \end{cases}, \\ I_k(0) &= \begin{cases} \alpha\beta & (k > k_c) \\ 0 & (k \leq k_c) \end{cases}. \end{aligned} \quad (27)$$

结合上述初始条件,由(23)和(24)式可得易染节点和免疫成功节点密度的表达式分别为

$$S_k(t) = \begin{cases} (1 - \alpha\beta) \exp(-\lambda k \int_0^t \theta(u) du) & (k > k_c) \\ \exp(-\lambda k \int_0^t \theta(u) du) & (k \leq k_c) \end{cases} \quad (28)$$

$$I_k(t) = \begin{cases} \alpha\beta \exp(-\sigma \lambda k \int_0^t \theta(u) du) & (k > k_c) \\ 0 & (k \leq k_c) \end{cases} \quad (29)$$

定义辅助函数  $\phi(t)$ , 用来表示 (28) 和 (29) 式中对  $\theta(t)$  的积分, 即

$$\begin{aligned}\phi(t) &= \int_0^t \theta(u) du \\ &= \frac{1}{\langle k \rangle} \sum_k kP(k) \int_0^t \rho_k(u) du \\ &= \frac{1}{\langle k \rangle} \sum_k kP(k) R_k(t).\end{aligned}\quad (30)$$

由 (30) 式可知,  $\phi(t)$  即为任意给定的一条边与一个处于 R 节点相连的概率. (30) 式两端对时间  $t$  求导, 可得  $\phi(t)$  的一个自洽方程为

$$\begin{aligned}\frac{d\phi(t)}{dt} &= \frac{1}{\langle k \rangle} \sum_k kP(k) \rho_k(t) \\ &= \frac{1}{\langle k \rangle} \sum_k kP(k) [1 - S_k(t) - R_k(t) - I_k(t)] \\ &= 1 - \frac{1}{\langle k \rangle} \sum_k kP(k) S_k(t) - \phi(t) \\ &\quad - \frac{1}{\langle k \rangle} \sum_k kP(k) I_k(t).\end{aligned}\quad (31)$$

当  $t \rightarrow \infty$  时, 即系统处于稳定状态时,  $\rho_k(\infty) = 0$ , 由 (30) 式可得

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{d\phi(t)}{dt} = 0.\quad (32)$$

令  $k_l$  和  $k_u$  分别为无标度网络的最小度和最大度, 同时假设  $k_{c+1} = k_c + 1$ . 由 (31) 和 (32) 式可得

$$\begin{aligned}\phi(\infty) &= 1 - \frac{1}{\langle k \rangle} \sum_k kP(k) S_k(\infty) \\ &\quad - \frac{1}{\langle k \rangle} \sum_k kP(k) I_k(\infty) \\ &= 1 - \frac{1}{\langle k \rangle} \sum_{k_l}^{k_c} kP(k) e^{-\lambda k \phi(\infty)} \\ &\quad - \frac{1 - \alpha\beta}{\langle k \rangle} \sum_{k_{c+1}}^{k_u} kP(k) e^{-\lambda k \phi(\infty)} \\ &\quad - \frac{\alpha\beta}{\langle k \rangle} \sum_{k_{c+1}}^{k_u} kP(k) e^{-\sigma \lambda k \phi(\infty)} \\ &\equiv F(\phi(\infty)).\end{aligned}\quad (33)$$

这里的  $F(\phi(\infty))$  为辅助函数. 显然,  $\phi(\infty) = 0$  为 (33) 式的一个平凡解, 而当  $\phi(\infty) = 0$  时, 由 (30) 式可知,  $R(\infty) = 0$ , 这表明当病毒传播达到稳定状态时, 不存在被感染的节点, 进而说明病毒不曾在网络中传播. 要使病毒能够在网络中大范围传播, (33) 式必须存在一个关于  $\phi(\infty)$  的非平凡解, 即  $\phi(\infty) \neq 0$ , 则需要满足条件:

$$\left. \frac{dF(\phi(\infty))}{d\phi(\infty)} \right|_{\phi(\infty)=0} \geq 1.\quad (34)$$

结合 (33) 和 (34) 式可得

$$\begin{aligned}&\left. \frac{dF(\phi(\infty))}{d\phi(\infty)} \right|_{\phi(\infty)=0} \\ &= \frac{\lambda}{\langle k \rangle} \left( \sum_{k_l}^{k_c} k^2 P(k) + (1 - \alpha\beta) \sum_{k_{c+1}}^{k_u} k^2 P(k) \right. \\ &\quad \left. + \alpha\beta\sigma \sum_{k_{c+1}}^{k_u} k^2 P(k) \right) \\ &= \frac{\lambda}{\langle k \rangle} \left( \sum_{k_l}^{k_u} k^2 P(k) - \alpha\beta \sum_{k_{c+1}}^{k_u} k^2 P(k) \right. \\ &\quad \left. + \alpha\beta\sigma \sum_{k_{c+1}}^{k_u} k^2 P(k) \right) \\ &= \frac{\lambda}{\langle k \rangle} \left( \sum_{k_l}^{k_u} k^2 P(k) \right. \\ &\quad \left. - \alpha\beta(1 - \sigma) \sum_{k_{c+1}}^{k_u} k^2 P(k) \right) \\ &\geq 1.\end{aligned}\quad (35)$$

对应于  $R(\infty)$ , 由 (35) 式解得无标度网络的  $\lambda_c$  为

$$\lambda_c = \frac{\langle k \rangle}{\sum_{k_l}^{k_u} k^2 P(k) - \alpha\beta(1 - \sigma) \sum_{k_{c+1}}^{k_u} k^2 P(k)}.\quad (36)$$

作为无标度网络的一个特例, 现在考虑网络规模为  $N$  的 BA 无标度网络模型<sup>[31]</sup>. 在 BA 网络中, 节点的度分布为  $P(k) = 2m^2 k^{-3}$ , 这里的  $m$  为与网络中任意一个节点相连的最少节点数. 考虑  $k$  连续取值的情况, 可得  $\langle k \rangle = \int_m^\infty kP(k) dk = 2m$ . 由文献 [32] 可知,  $k_u$  的大小取决于网络的节点数  $N$ , 即  $k_u \approx mN^{\frac{1}{2}}$ , 由此可得 BA 网络的  $\lambda_c$  为

$$\lambda_c^{-1} = \frac{1}{2} m \ln N - \alpha\beta(1 - \sigma) m \ln \frac{mN^{\frac{1}{2}}}{k_{c+1}}.\quad (37)$$

由 (37) 式可知, 对于给定的  $\alpha, \beta, \sigma$  和  $k_{c+1}$ , 若 BA 网络的节点数  $N \rightarrow \infty$ , 网络的  $\lambda_c \rightarrow 0$ , 这和基本 SIR 传播模型一致. 不同的是这里的  $\lambda_c$  与  $\alpha, \beta$  和  $\sigma$  有关. 与单独考虑免疫失败或免疫失效的影响相比

(分别对应于  $\lambda_c^{-1} = \frac{1}{2} m \ln N - \alpha\beta m \ln \frac{mN^{\frac{1}{2}}}{k_{c+1}}$  和  $\lambda_c^{-1} =$

$\frac{1}{2} m \ln N - \alpha(1 - \sigma) m \ln \frac{mN^{\frac{1}{2}}}{k_{c+1}}$  的情况), 两者的同时存在显著降低了网络的  $\lambda_c$ . 由于  $0 < \alpha < 1$ , (37) 式还表明被遗漏关键节点的存在进一步降低了网络的  $\lambda_c$ . 因此, 在对 BA 网络施加目标免疫时, 为了取得较好的免疫效果, 我们就应该尽可能提高  $\beta$ , 并减

少免疫失效以及被遗漏关键节点产生的影响.

在(37)式中,若令  $\beta = 1, \sigma = 0$ , 即不考虑免疫失败和免疫失效的影响可得

$$\lambda_c^{-1} = \frac{1}{2} m \ln N - \alpha m \ln \frac{mN^{\frac{1}{2}}}{k_{c+1}}. \quad (38)$$

对比(37)和(38)式可以看出,在对网络实施目标免疫的过程中,对于给定的节点度  $k_{c+1}$  和  $\alpha$ , 由于受到免疫失败和免疫失效的影响,使得我们通常过高估计了实际获得的免疫效果,这显然会影响到对病毒的防治. 因此,在  $\lambda$  已知的情况下,对于给定的  $\alpha, \beta$  和  $\sigma$ , 为了获得预期的免疫效果,可由(37)式求出相应的免疫节点的  $k_c$  为

$$k_c = mN^{\frac{1}{2}} \exp\left(\frac{2 - m\lambda \ln N}{2\alpha\beta(1 - \sigma)m\lambda}\right) - 1. \quad (39)$$

利用连续理论可得  $R(\infty)$  的表达式为

$$\begin{aligned} R(\infty) &= \sum_k P(k) R_k(\infty) \\ &= \sum_k P(k) [1 - S_k(\infty) - I_k(\infty)] \\ &= 1 - \sum_k P(k) S_k(\infty) - \sum_k P(k) I_k(\infty) \\ &= 1 - 2m^2 \sum_{k_1}^{k_c} k^{-3} e^{-\lambda k \phi(\infty)} \\ &\quad - 2m^2 (1 - \alpha\beta) \sum_{k_{c+1}}^{k_u} k^{-3} e^{-\lambda k \phi(\infty)} \\ &\quad - 2m^2 \alpha\beta \sum_{k_{c+1}}^{k_u} k^{-3} e^{-\sigma \lambda k \phi(\infty)} \\ &= 1 - 2m^2 \sum_{k_1}^{k_u} k^{-3} e^{-\lambda k \phi(\infty)} \\ &\quad + 2m^2 \alpha\beta \sum_{k_{c+1}}^{k_u} k^{-3} e^{-\lambda k \phi(\infty)} \\ &\quad - 2m^2 \alpha\beta \sum_{k_{c+1}}^{k_u} k^{-3} e^{-\sigma \lambda k \phi(\infty)}. \quad (40) \end{aligned}$$

为了进一步化简(40)式,对于规模较大的无标度网络可以假设  $k_u \rightarrow \infty$  [33]. 从而(40)式可表示为

$$\begin{aligned} R(\infty) &= 1 - 2m^2 \int_{k_1}^{\infty} k^{-3} e^{-\lambda k \phi(\infty)} dk \\ &\quad + 2m^2 \alpha\beta \int_{k_{c+1}}^{\infty} k^{-3} e^{-\lambda k \phi(\infty)} dk \\ &\quad - 2m^2 \alpha\beta \int_{k_{c+1}}^{\infty} k^{-3} e^{-\sigma \lambda k \phi(\infty)} dk. \quad (41) \end{aligned}$$

令  $z_1 = \lambda k_1 \phi(\infty), z_2 = \lambda k_{c+1} \phi(\infty), z_3 = \sigma \lambda k_{c+1} \phi(\infty)$ , 并代入(41)式可得

$$\begin{aligned} R(\infty) &= 1 - \frac{2m^2 z_1^2}{k_1^2} \int_{z_1}^{\infty} x^{-3} e^{-x} dx \\ &\quad + \frac{2m^2 \alpha\beta z_2^2}{k_{c+1}^2} \int_{z_2}^{\infty} x^{-3} e^{-x} dx \\ &\quad - \frac{2m^2 \alpha\beta z_3^2}{k_{c+1}^2} \int_{z_3}^{\infty} x^{-3} e^{-x} dx. \quad (42) \end{aligned}$$

(42)式中的定积分可以表示为如下不完全 Gamma 函数的形式

$$\Gamma(\alpha, z) = \int_z^{\infty} t^{\alpha-1} e^{-t} dt. \quad (43)$$

并且当  $z \rightarrow 0$  时,不完全 Gamma 函数  $\Gamma(\alpha, z)$  具有性质:

$$\Gamma(\alpha + 1, z) = \alpha \Gamma(\alpha, z) + z^\alpha e^{-z}, \quad (44)$$

$$\Gamma(0, z) = -r_E - \ln(z) + z + o(z^2). \quad (45)$$

这里的  $r_E$  为 Euler 常数[34]. 当  $\lambda \rightarrow \lambda_c$  时,由(30)式可得  $\phi(\infty) \rightarrow 0$ , 从而有  $z_1 \rightarrow 0, z_2 \rightarrow 0, z_3 \rightarrow 0$ . 忽略(42)–(45)式中的高阶项,并化简(42)式可得

$$\begin{aligned} R(\infty) &= 1 - 2\left(\frac{1}{2} - z_1\right) + \frac{2m^2 \alpha\beta}{k_{c+1}^2} \left(\frac{1}{2} - z_2\right) \\ &\quad - \frac{2m^2 \alpha\beta}{k_{c+1}^2} \left(\frac{1}{2} - z_3\right). \quad (46) \end{aligned}$$

再把  $z_1 = \lambda k_1 \phi(\infty), z_2 = \lambda k_{c+1} \phi(\infty), z_3 = \sigma \lambda k_{c+1} \phi(\infty)$  代入(46)式进一步化简得

$$\begin{aligned} R(\infty) &= 2m\lambda \phi(\infty) - \frac{2m^2 \alpha\beta \lambda \phi(\infty)}{k_{c+1}} \\ &\quad + \frac{2m^2 \alpha\beta \sigma \lambda \phi(\infty)}{k_{c+1}} \\ &= 2m\lambda \phi(\infty) \left[1 - \frac{\alpha\beta(1 - \sigma)m}{k_{c+1}}\right]. \quad (47) \end{aligned}$$

由(47)式可知,在  $R(\infty)$  的表达式中,仅存在一个未知项  $\phi(\infty)$ . 为了求解  $\phi(\infty)$ , 再次令  $z_1 = \lambda k_1 \phi(\infty), z_2 = \lambda k_{c+1} \phi(\infty), z_3 = \sigma \lambda k_{c+1} \phi(\infty)$ , 由(33)式可得

$$\begin{aligned} \phi(\infty) &= 1 - m \int_{k_1}^{\infty} k^{-2} e^{-\lambda k \phi(\infty)} dk \\ &\quad + m\alpha\beta \int_{k_{c+1}}^{\infty} k^{-2} e^{-\lambda k \phi(\infty)} dk \\ &\quad - m\alpha\beta \int_{k_{c+1}}^{\infty} k^{-2} e^{-\sigma \lambda k \phi(\infty)} dk \\ &= 1 - \frac{mz_1}{k_1} \int_{z_1}^{\infty} x^{-2} e^{-x} dx \\ &\quad + \frac{\alpha\beta m z_2}{k_{c+1}} \int_{z_2}^{\infty} x^{-2} e^{-x} dx \\ &\quad - \frac{\alpha\beta m z_3}{k_{c+1}} \int_{z_3}^{\infty} x^{-2} e^{-x} dx. \quad (48) \end{aligned}$$

因为当  $\lambda \rightarrow \lambda_c$  时,  $z_1 \rightarrow 0$ ,  $z_2 \rightarrow 0$ ,  $z_3 \rightarrow 0$ , 并忽略(43)–(45)式中的高阶项,从而由(48)式可得

$$\begin{aligned} \phi(\infty) = & (1 - r_E)z_1 - z_1 \ln z_1 + \frac{\alpha\beta m(r_E - 1)}{k_{c+1}}z_2 \\ & + \frac{\alpha\beta m}{k_{c+1}}z_2 \ln z_2 + \frac{\alpha\beta m(1 - r_E)}{k_{c+1}}z_3 \\ & - \frac{\alpha\beta m}{k_{c+1}}z_3 \ln z_3. \end{aligned} \quad (49)$$

再把  $z_1 = \lambda k_i \phi(\infty)$ ,  $z_2 = \lambda k_{c+1} \phi(\infty)$ ,  $z_3 = \sigma \lambda k_{c+1} \phi(\infty)$  代入(49)式并化简可得

$$\begin{aligned} 1 - \gamma_E - \frac{1}{[1 - \alpha\beta(1 - \sigma)]\lambda m} - \frac{1}{1 - \alpha\beta(1 - \sigma)} \\ \times \ln \left[ \frac{\lambda m \sigma^{\alpha\beta\sigma}}{(\lambda k_{c+1})^{\alpha\beta(1-\sigma)}} \right] \\ = \ln[\phi(\infty)]. \end{aligned} \quad (50)$$

从而由(50)式解得  $\phi(\infty)$  为

$$\begin{aligned} \phi(\infty) = \exp \left\{ 1 - \gamma_E - \frac{1}{[1 - \alpha\beta(1 - \sigma)]\lambda m} \right. \\ \left. - \frac{1}{1 - \alpha\beta(1 - \sigma)} \right. \\ \left. \times \ln \left[ \frac{\lambda m \sigma^{\alpha\beta\sigma}}{(\lambda k_{c+1})^{\alpha\beta(1-\sigma)}} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (51)$$

由(47)和(51)式可以得出,在节点度  $k_{c+1}$  和  $\alpha$  确定的情况下,免疫失败和免疫失效同时存在对  $R(\infty)$  产生了较大影响,即随着  $\beta$  的减小以及  $\sigma$  的增大,网络中被感染的节点数将会显著增加.

综上所述,无论网络的拓扑结构以及采取的免疫策略是否相同,免疫失败和免疫失效同时存在对病毒传播行为的影响基本一致,即明显降低了网络的  $\lambda_c$ ,并加深了病毒的感染程度.

### 3. 仿真结果与讨论

理论分析已经表明,免疫失败和免疫失效同时存在显著改变了病毒在网络中的传播过程.为了和理论分析所得结论进行比较,下面分别以 WS 网络和 BA 网络为例,通过数值仿真研究本文提出的 SIR 模型在均匀网络和无标度网络上的传播特性.仿真过程中选取参数如下:两种网络的节点数均为 2000,病毒在网络中传播的初始时刻,随机选择一个节点作为感染节点;在 WS 网络中随机化重连概率  $p = 0.1$ ,  $\langle k \rangle = 10$ ,网络的生成方法见文献[13];在 BA 网络中  $m_0 = m = 3$ ,  $k_c = 5$ ,这里的  $m_0$  为网络的初始节点数,网络的生成方法见文献[14]; $\beta =$

0.8,  $\sigma = 0.1$ .为了便于分析比较,我们同时对如下 4 种情况进行了仿真:免疫失败和免疫失效同时存在( $\beta = 0.8, \sigma = 0.1$ ),免疫失败或免疫失效分别单独存在(分别对应于  $\beta = 0.8, \sigma = 0$  和  $\beta = 1, \sigma = 0.1$ ),以及两者都不存在( $\beta = 1, \sigma = 0$ ).所有仿真结果都是对 200 次实现所得数据的统计平均.

图 1 描述了 WS 网络中  $R(\infty)$  与  $\lambda$  之间的变化关系,其中  $\alpha = 0.6$ .从图 1 可以看出,对于给定的  $\alpha$ ,免疫失败和免疫失效同时存在,免疫失败或免疫失效分别单独存在,以及两者都不存在 4 种情况对应的  $\lambda_c$  分别为 0.16, 0.18, 0.20 和 0.24(如插图中的箭头所示),而由(15)式计算所得结果分别为 0.176, 0.192, 0.217 和 0.25,即数值仿真与理论分析基本一致,从而验证了本文提出的 SIR 传播模型的合理性.

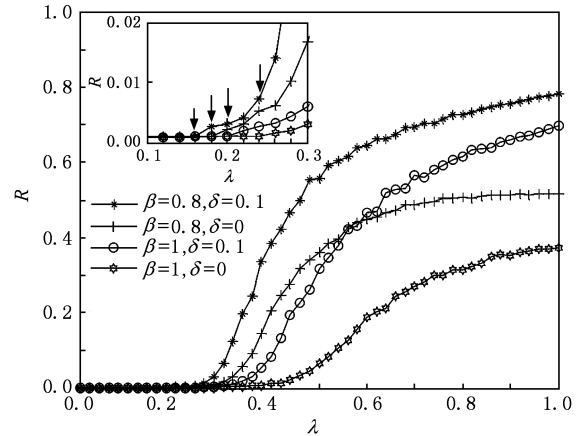


图 1 WS 网络中  $R(\infty)$  与  $\lambda$  的对应关系

图 2 显示了 BA 网络中  $R(\infty)$  与  $\lambda$  之间的对应关系,其中  $\alpha = 0.9$ .由图 2 可知,对于给定的免疫节点的  $k_c$  和  $\alpha$ ,由数值仿真可知,免疫失败和免疫失效同时存在,免疫失败或免疫失效分别单独存在,以及两者都不存在 4 种情况对应的  $\lambda_c$  分别为 0.18, 0.20, 0.24 和 0.32(如插图中的箭头所示),而由(37)式计算得出理论分析的结果分别为 0.186, 0.213, 0.257 和 0.332,从而再次证明了本文提出的 SIR 模型的准确性.

对比图 1 和图 2 可知,在两种不同的网络拓扑结构中,与单独考虑免疫失败或免疫失效存在,以及两者都不存在的情况相比,两者的同时存在明显降低了网络的  $\lambda_c$ ,增加了网络中被感染节点的数目.由此可知,免疫失败和免疫失效同时存在对病毒传播行为的影响与网络拓扑结构无关.从实际情

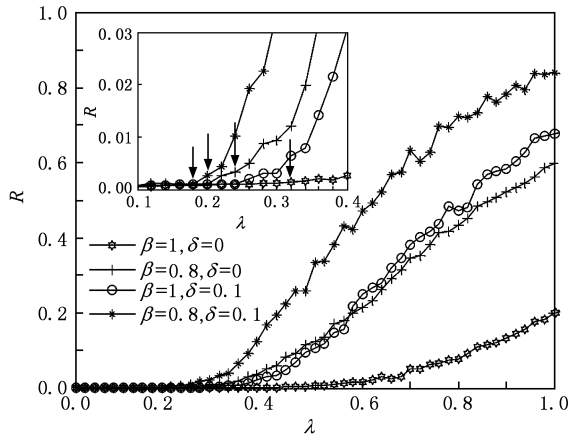


图2 BA网络中  $R(\infty)$  与  $\lambda$  的对应关系

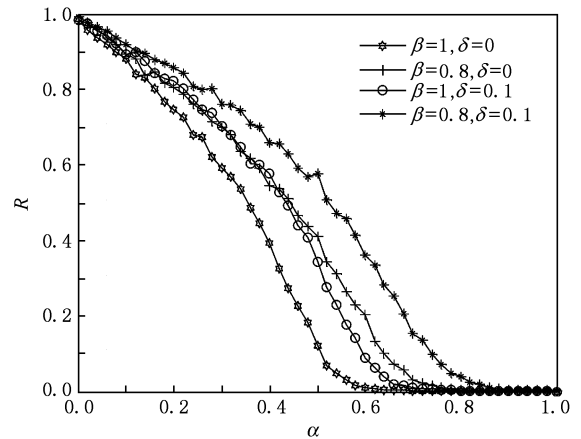


图3 WS网络中  $R(\infty)$  与  $\alpha$  的对应关系

况来看,在对网络实施免疫的过程中,免疫失败和免疫失效是客观存在的,而两者的同时作用必将对整个网络最终的免疫效果产生很大的影响.因此,为获得预期的免疫效果,当对 WS 网络采取随机免疫时,在  $\lambda, \beta$  和  $\sigma$  已知的情况下,应当由(17)式计算得出实际的  $\alpha$ ;若对 BA 网络实施目标免疫,在  $\alpha, \beta, \sigma$  和  $\lambda$  给定的情况下,实际免疫节点的  $k_c$  应当根据(39)式求出.此外我们还发现,随着  $\lambda$  的增大,与免疫失败的影响相比,免疫失效的存在对  $R(\infty)$  的影响将会逐渐增大.

图3给出了对应于不同的  $\alpha$ , WS 网络中  $R(\infty)$  的变化曲线,其中  $\lambda = 0.4$ .由图3可知,对于给定的  $\lambda$ ,与单独考虑免疫失败或免疫失效的影响相比,两者的同时存在显著增加了网络中被感染的节点数,从而减弱了随机免疫在均匀网络中的免疫效果.图3还表明,尽管受到免疫失败和免疫失效的影响,随机免疫依然能够大幅降低网络中被感染的节点数,并且降低的幅度随着  $\alpha$  的增大而增大.

图4说明了 BA 网络中  $R(\infty)$  随  $\alpha$  的变化情况,其中  $\lambda = 0.4$ .由图4可知,在  $\lambda$  和免疫节点的  $k_c$  取值确定的情况下,目标免疫能够有效地降低 BA 网络中  $R(\infty)$ ,并且降低的幅度随着  $\alpha$  的增大而增大.然而,免疫失败和免疫失效同时存在对免疫效果产生了较大影响,当  $\beta = 0.8, \delta = 0.1$  时,即使所有度  $k > k_c$  的节点都被免疫,病毒仍会在网络中爆发并最终达到稳定状态.由图4还可以看出,在考虑免疫失败和免疫失效影响的情况下,被遗漏关键节点的存在进一步减弱了网络的免疫效果.

对比图3和图4可知,对于不同的网络拓扑结构和免疫策略,免疫失败和免疫失效同时存在都显

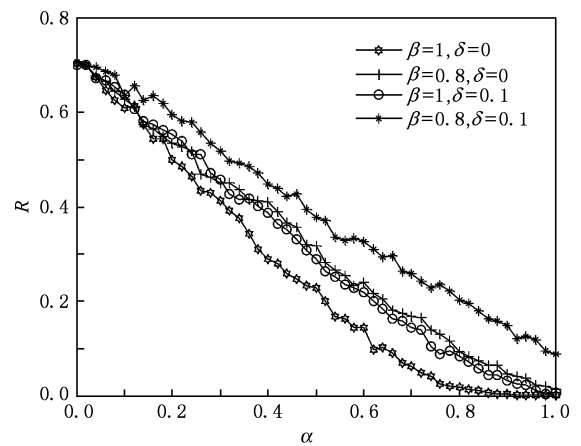


图4 BA网络中  $R(\infty)$  与  $\alpha$  的变化关系

著减弱了网络的免疫效果.因此,理论分析和数值仿真都表明,对于给定的  $\alpha$ ,如果要获得较好的免疫效果,就必须尽可能提高  $\beta$ ,并努力减小免疫失效的影响.同时,我们还发现,在免疫失败和免疫失效同时存在的条件下,对网络施加适当的免疫策略尽管不可能完全阻止病毒的爆发,但还是显著降低了网络中被感染的节点数,这表明了免疫措施对病毒控制的重要性.由此可知,虽然许多真实网络中存在免疫失败和免疫失效的情况,但适当的免疫策略对于网络中节点的保护仍然是必须的.

### 4. 结 论

在对网络实施免疫的过程中,病毒的传播行为将会受到免疫失败和免疫失效同时作用的影响.本文提出了一种新的 SIR 传播模型,利用平均场理论,

分别研究了该模型在均匀网络和无标度网络上的传播动力学行为. 经研究发现, 免疫失败和免疫失效同时存在显著降低了网络的传播临界值, 增强了网络中病毒的感染程度; 其次, 网络的传播临界值不仅与免疫节点密度有关, 而且还与免疫成功率以及免疫失效率有关; 最后, 对于给定的传播率、免疫成功率和免疫失效率, 本文给出具体的免疫节点密

度计算公式. 为了更好地控制网络中病毒的传播, 免疫失败和免疫失效对病毒传播特性的影响值得进一步深入研究. 本文只考虑了网络中每个节点的免疫成功率和免疫失效率都相同的情况, 而在真实网络中, 两者会因不同节点之间存在着差异而有所不同.

- 
- [1] Li X, Wang X F 2006 *IEEE Trans. Automatic Control* **51** 534
- [2] Li X, Wang X F 2007 *Int. J. Syst. Sci.* **38** 400
- [3] Song Y R, Jiang G P 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 5911 (in Chinese) [宋玉蓉、蒋国平 2009 物理学报 **58** 5911]
- [4] Yang R, Wang B H, Ren J, Bai W J, Shi Z W, Xu W, Zhou T 2007 *Phys. Lett. A* **386** 189
- [5] Pei W D, Chen Z Q, Yang Z Z 2008 *Chin. Phys. B* **17** 373
- [6] Barthélemy M, Barrat A, Pastor-Satorras R, Vespignani A 2005 *J. Theo. Bio.* **235** 275
- [7] Zhou T, Liu J G, Bai W J, Chen G R, Wang B H 2006 *Phys. Rev. E* **74** 056109
- [8] Hayashi Y, Minoura M, Matsukubo J 2004 *Phys. Rev. E* **69** 016112
- [9] Huang W, Jiang R, Hu M B, Wu Q S 2009 *Chin. Phys. B* **18** 1306
- [10] Zhang H F, Michael S, Fu X C 2009 *Commun. Theor. Phys.* **52** 180
- [11] Pastor-Satorras R, Vespignani A 2001 *Phys. Rev. Lett.* **86** 3200
- [12] Wang Y, Zheng Z G 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 4421 (in Chinese) [王 延、郑志刚 2009 物理学报 **58** 4421]
- [13] Watts D J, Strogatz S H 1998 *Nature* **393** 440
- [14] Barabási A L, Albert R 1999 *Science* **286** 509
- [15] Pastor-Satorras R, Vespignani A 2001 *Phys. Rev. E* **63** 066117
- [16] Lloyd A L, May R M 2001 *Science* **292** 1316
- [17] Pastor-Satorras R, Vespignani A 2002 *Phys. Rev. E* **65** 036104
- [18] Guo W P, Li X, Wang X F 2004 *Physica A* **380** 684
- [19] Cohen R, Havlin S, ben-Avraham D 2003 *Phys. Rev. Lett.* **91** 247901
- [20] Bose T, Trimper S 2009 *Phys. Rev. E* **79** 051903
- [21] Gumel A B, McCluskey C C, van den Driessche P 2006 *Bull. Math. Biol.* **68** 2105
- [22] Yip P, Watson R, Chen Q Z 2007 *Statist. Med.* **26** 4475
- [23] Shi H J, Duan Z S, Chen G R, Li R 2009 *Chin. Phys. B* **18** 3309
- [24] Gandon S, Day T 2008 *Vaccine* **26** 54
- [25] Ball F G, Knock E S, O' Neill P D 2008 *Math. Biosci.* **216** 100
- [26] Wang Y B, Xiao G X, Hu J, Cheng T H, Wang L S 2009 *Physica A* **388** 2535
- [27] Xiao S, Xiao G, Cheng T H 2008 *IEEE Commun. Mag.* **46** 146
- [28] Gandon S, Mackinnon M, Nee S, Read A 2003 *Proc. Roy. Soc. Lond. B* **270** 1129
- [29] Ganusov V V, Antia R 2006 *Evolution* **60** 957
- [30] Newman M E J 2002 *Phys. Rev. Lett.* **89** 208701
- [31] Barabási A L, Albert R, Jeong H 1999 *Physica A* **272** 173
- [32] Takeuchi Y, Ma W B, Beretta E 2000 *Nonl. Anal.* **42** 931
- [33] Barabási A L, Albert R 2002 *Rev. Mod. Phys.* **74** 47
- [34] Abramowitz M, Stegun I 1972 *Handbook of Mathematical Functions* (New York: Dove Publisher)

# Virus spreading on complex networks with imperfect immunization\*

Wang Ya-Qi<sup>1)</sup> Jiang Guo-Ping<sup>1)2)†</sup>

1) (Center for Control & Intelligence Technology, Nanjing University of Posts and Telecommunications, Nanjing 210003, China)

2) (College of Automation, Nanjing University of Posts and Telecommunications, Nanjing 210003, China)

(Received 9 December 2009; revised manuscript received 3 January 2010)

## Abstract

The imperfect immunization includes immune failure and immune invalidity on complex networks. In this paper, based on mean-field theory, we propose a new susceptible-infected-removed model to study epidemic spreading in networks with both immune failure and immune invalidity. Theoretical analysis shows that the immune failure and immune invalidity can significantly reduce the epidemic threshold and enhance the epidemic prevalence in the networks. According to the relationships between epidemic threshold, immune density of nodes, immune success rate and immune invalid rate, some suggestions on how to effectively control the propagation of epidemics are presented. Numerical simulations have confirmed the theoretical results.

**Keywords:** complex network, epidemic spreading, imperfect immunization, epidemic threshold

**PACC:** 0250, 0565, 0570J

---

\* Project supported by the Program for New Century Excellent Talents in University of China (Grant No. NCET-06-0510), the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 60874091) and the Six Projects Sponsoring Talent Summits of Jiangsu Province, China (Grant No. SJ209006).

† Corresponding author. E-mail: jianggp@njupt.edu.cn