

# 三维非线性 Schrödinger 方程的直接微扰方法\*

程雪苹<sup>1)†</sup> 林 机<sup>2)</sup> 韩 平<sup>1)</sup>

1) (浙江海洋学院数理与信息学院物理系, 舟山 316004)

2) (浙江师范大学数理与信息工程学院物理系, 金华 321004)

(2009 年 8 月 9 日收到; 2009 年 12 月 17 日收到修改稿)

将直接微扰方法应用于含微扰的三维非线性 Schrödinger 方程, 获得了该方程的包括零阶和一阶修正的近似解析解. 借助得到的解析解, 分析了微扰对孤子参数的影响.

**关键词:** 直接微扰方法, 微扰, 三维非线性 Schrödinger 方程, 近似解

**PACC:** 0260, 0340K, 4735

## 1. 引 言

孤子理论是非线性科学的重要组成部分, 在物理学的许多领域(如流体物理、等离子体物理、凝聚态物理、非线性光学等)有着日益重要的应用. 但在实际问题中, 孤子方程往往不是以标准的形式出现, 一般还含有一些微小的附加项. 当这些附加项足够小时, 孤子微扰理论就成为求解此类方程的必要方法. 现有的孤子微扰理论大体可以分为两类: 基于逆散射变换的微扰理论<sup>[1,2]</sup>和直接微扰方法<sup>[3-5]</sup>.

本文试图利用文献[6]中提出的直接微扰方法求解三维非线性 Schrödinger 方程, 进而分析微扰对解的影响. 该方法完全摆脱了对逆散射变换的依赖, 思路简明、计算简单. 而且利用这种方法得到的微扰解不仅包含零阶近似, 也包括一阶修正项<sup>[7]</sup>. 特别地, 通过楼森岳教授提出的这种直接微扰方法还可以同时得到方程的各种不同形式的微扰解, 包括单孤子解, 多孤子解, 周期解等. 所以, 利用这种微扰方法得到的解比利用其他方法得到的解要丰富.

## 2. 直接微扰方法求解三维非线性 Schrödinger 方程

考虑如下形式的含微扰的三维非线性 Schrödinger

方程<sup>[8]</sup>

$$iu_t + u_{xx} + u_{yy} + 2|u|^2u = \epsilon u, \quad (1)$$

其中, 下标代表对相应的时空坐标  $t, x, y$  求导,  $\epsilon$  为表征微扰强弱的小参量. 当  $\epsilon = 0$ , 上式退化为三维非线性 Schrödinger 方程

$$iu_t + u_{xx} + u_{yy} + 2|u|^2u = 0. \quad (2)$$

该方程作为各种物理模型出现在非线性光学, 等离子体物理和流体动力学等各个分支. 众所周知, 三维非线性 Schrödinger 方程(2)具有如下形式的单孤子解<sup>[9]</sup>:

$$u = \sqrt{\mu} \operatorname{sech} \left( \sqrt{\frac{\mu}{r^2 + s^2}} (rx + sy - Vt + C) \right) e^{i \left( \frac{V}{2r} + \frac{s^2V}{2+s^2} \right) x - i \frac{rsV}{2+s^2} y + iWt}, \quad (3)$$

其中  $\mu = r^2 + s^2 - V^2$ , 另外  $r, s, V$  和  $W$  均为任意实常数.

根据直接微扰方法, 将方程(1)中的  $u$  作渐进展开

$$u = e^{\epsilon(a+ib)} (u_0(\xi, \eta, \tau) + \epsilon u_1(\xi, \eta, \tau) + \dots), \quad (4)$$

其中  $a \equiv a(x, y, t), b \equiv b(x, y, t), \xi \equiv \xi(x, y, t, \epsilon), \eta \equiv \eta(x, y, t, \epsilon), \tau \equiv \tau(x, y, t, \epsilon)$  均为待定的实函数, 并且变量  $\{\xi, \eta, \tau\}$  满足性质:

$$\{\xi, \eta, \tau\} \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} \{x, y, t\}. \quad (5)$$

即当  $\epsilon \rightarrow 0$  时,  $u$  为三维非线性 Schrödinger 方程(2)的精确解.

\* 国家自然科学基金(批准号:10875106)资助的课题.

† E-mail: chengxp2005@126.com

将展开式(4)式代入(1)式,比较 $\epsilon$ 的各级幂系数,得到如下各级近似方程:

$$\begin{aligned} & iu_{0\tau}\tau_t + u_{0\xi\xi}\xi_x^2 + u_{0\eta\eta}\eta_y^2 + 2e^{2\epsilon a} |u_0|^2 u_0 = 0, (6) \\ & iu_{1\tau}\tau_t + u_{1\xi\xi}\xi_x^2 + u_{1\eta\eta}\eta_y^2 \\ & + 2e^{2\epsilon a} (2|u_0|^2 u_1 + u_0^2 u_1^*) \\ & + i(a_t + ib_t)u_0 - u_0 \\ & + (a_{xx} + ib_{xx})u_0 + (a_{yy} + ib_{yy})u_0 \\ & + i\xi_t u_{0\xi}/\epsilon + 2(a_x + ib_x)\xi_x u_{0\xi} + \xi_{xx} u_{0\xi}/\epsilon \\ & + \xi_{yy} u_{0\xi}/\epsilon + i\eta_t u_{0\eta}/\epsilon + 2(a_y + ib_y)\eta_y u_{0\eta} \\ & + \eta_{xx} u_{0\eta}/\epsilon + \eta_{yy} u_{0\eta}/\epsilon + 2\xi_x \tau_x u_{0\xi\tau}/\epsilon \\ & + (\tau_{xx} + \tau_{yy})u_{0\tau}/\epsilon + 2(\xi_x \eta_x \\ & + \xi_y \eta_y)u_{0\xi\eta}/\epsilon + 2\eta_y \tau_y u_{0\eta\tau}/\epsilon = 0. (7) \end{aligned}$$

其中由于 $\{\xi, \eta, \tau\}$ 有如(5)式的性质,所以 $\xi_t, \xi_x, \xi_{xx}, \tau_x, \tau_y, \tau_{xx}, \eta_x, \eta_t, \eta_{yy}$ 均为 $\epsilon$ 的一阶项.我们知道,方程(6)中 $u_0$ 是不显含 $\epsilon$ 的函数,所以变量 $\xi, \eta, \tau$ 满足关系式

$$\tau_t = \xi_x^2 = \eta_y^2 = e^{2\epsilon a}. (8)$$

这样,方程(6)即为标准的三维非线性 Schrödinger 方程

$$iu_{0\tau} + u_{0\xi\xi} + u_{0\eta\eta} + 2|u_0|^2 u_0 = 0. (9)$$

它有如(3)式的孤子解,不同的是,此时方程的时空变量 $\{x, y, t\}$ 分别变为渐进变量 $\{\xi, \eta, \tau\}$ .从展开式(4)中我们知道 $u_1$ 正是三维非线性 Schrödinger 方程(9)的对称,即 $u_1$ 是方程(9)的线性化方程

$$iu_{1\tau} + u_{1\xi\xi} + u_{1\eta\eta} + 2(2|u_0|^2 u_1 + u_0^2 u_1^*) = 0 (10)$$

的解.它的最简单的3个解可以表示成<sup>[10]</sup>

$$\begin{aligned} u_1 &= u_{0\tau}, \\ u_1 &= u_{0\xi}, \\ u_1 &= u_{0\eta}. \end{aligned} (11)$$

给定一非平庸解 $u_0$ ,方程(7),(8)和(10)对于任意 $x, y, t$ 都是自恰的,所以方程(7)中其他项的系数应全部为零,即

$$\begin{aligned} & i(a_t + ib_t) + (a_{xx} + ib_{xx}) + (a_{yy} + ib_{yy}) - 1 = 0, \\ & i\xi_t/\epsilon + 2(a_x + ib_x)\xi_x + \xi_{xx}/\epsilon + \xi_{yy}/\epsilon = 0, \\ & i\eta_t/\epsilon + 2(a_y + ib_y)\eta_y + \eta_{xx}/\epsilon + \eta_{yy}/\epsilon = 0, \\ & \tau_{xx} + \tau_{yy} = 0, \xi_x \eta_x + \xi_y \eta_y = 0, \\ & \xi_x \tau_x = 0, \eta_y \tau_y = 0. \end{aligned} (12)$$

解(8)和(12)式得

$$a = ct + t_0,$$

$$\begin{aligned} b &= -t - \frac{cx^2}{4} - \frac{cy^2}{4} - C_1, \\ \xi &= xe^{\epsilon(ct+t_0)}, \\ \eta &= ye^{\epsilon(ct+t_0)}, \\ \tau &= \frac{e^{2\epsilon(ct+t_0)} - 1}{2\epsilon c}. \end{aligned} (13)$$

其中 $c, C_1$ 为任意实数.这样,我们便求得了含微扰的三维非线性 Schrödinger 方程(1)的渐进解析解

$$u = e^{\epsilon\chi} (u_0(\xi, \eta, \tau) + \epsilon u_1(\xi, \eta, \tau)). (14)$$

其中 $\chi = ct + t_0 - i\left(t + \frac{cx^2}{4} + \frac{cy^2}{4} + C_1\right)$ .

### 3. 微扰对孤子参数的影响

我们知道,不含微扰项的三维非线性 Schrödinger 方程如取形如(3)式的孤子解,其解的强度 $|u|^2$ 随时间的演化如图1所示.此时孤波沿着时空坐标作稳定传播而不改变波的形状、传播速度和方向,它的高度、传播速度、初始位置和初始相位由 $\mu, r, s, C, V$ 和 $W$ 等参数决定.

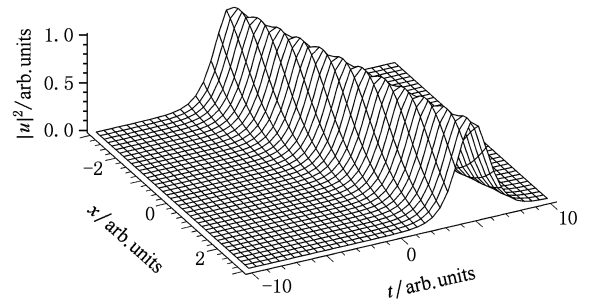


图1  $y = 1$  时解(3)的强度 $|u|^2$ 随时间的演化图  $\mu = r = s = V = W = C = 1$

当考虑微扰的影响时,根据解(14),取 $u_0$ 为满足(3)式的单孤子解,一阶修正 $u_1 = u_{0\xi}$ ,则

$$\begin{aligned} u &= \sqrt{\mu} e^{\epsilon\chi} \operatorname{sech} \left( \frac{\alpha}{2\epsilon c} (2rx e^{\epsilon(ct+t_0)} \right. \\ & + 2sy e^{\epsilon(ct+t_0)} - Vte^{2\epsilon(ct+t_0)} \\ & + V + 2c\epsilon C) \left. \right) \\ & \times \left( 1 + ia\epsilon - \alpha r \epsilon \tanh \left( \frac{\alpha}{2\epsilon c} (2rx e^{\epsilon(ct+t_0)} \right. \right. \\ & + 2sy e^{\epsilon(ct+t_0)} - Vte^{2\epsilon(ct+t_0)} \\ & + V + 2c\epsilon C) \left. \left. \right) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \times \exp\left(\frac{i}{2\epsilon c}(2kxc\epsilon e^{\epsilon(ct+t_0)}\right. \\ & - 2\sigma y c \epsilon e^{\epsilon(ct+t_0)} - W \\ & \left. + We^{2\epsilon(ct+t_0)})\right). \end{aligned} \quad (15)$$

解中  $\kappa, \sigma$  均为任意实常量. 一般地, 当  $c \neq 0$ , 从解 (15) 中不难发现, 在微扰作用下, 孤波的强度  $|u|^2$  随时间指数增长 ( $c > 0$ ) 或衰减 ( $c < 0$ ), 其演化情

况分别如图 2(a) 和图 2(b) 所示. 而且微扰参数  $\epsilon$  越大, 增长或衰减速度也越快. 当然根据绝热关系: 振幅与脉宽之积为常数, 孤波振幅增长或衰减的同时总伴随着脉宽的变窄或变宽. 详细地可以从图 2(c) 和图 2(d) 中看出. 由于微扰的影响, 解的传播速度, 波数和相位等孤子参数也随时间发生了变化.

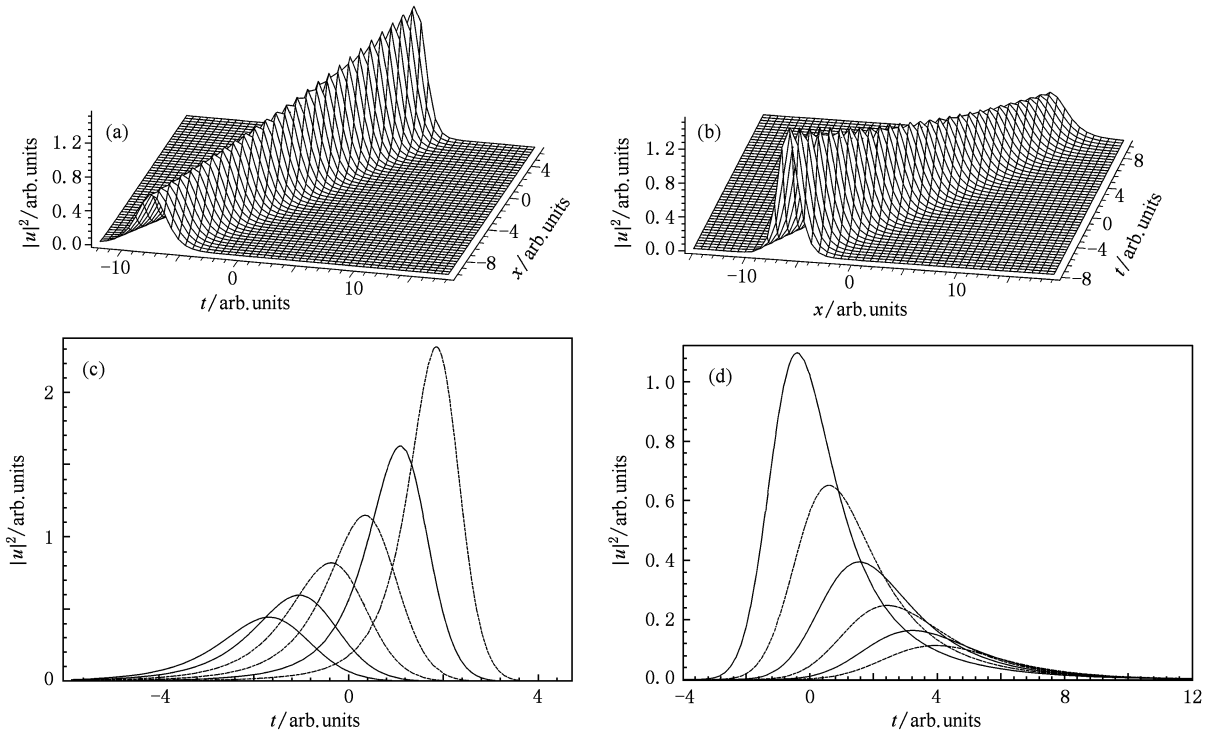


图 2  $y = 1$  时, 解 (15) 的强度  $|u|^2$  随时间的演化图  $\mu = r = s = V = W = C = 1$  (a)  $\epsilon = 0.02, c = 1.5, t_0 = 0$ ; (b)  $\epsilon = 0.02, c = -1.5, t_0 = 0$ ; (c) 自左到右图线中  $x$  分别为  $-5, -4, -3, -2, -1, 0$ , 式中参数取  $\epsilon = 0.15, c = 1.5, t_0 = 0$ ; (d) 自左到右图线中  $x$  值分别为  $-2, -1, 0, 1, 2, 3$ , 式中参数取  $\epsilon = 0.15, c = -1.5, t_0 = 0$

特殊地, 如取任意常数  $c = t_0 = 0$ , 由于变化指数  $\epsilon\chi$  中不再含时间变量  $t$ , 所以孤波的幅度也不再随时间的改变而变化, 原先与时间相关的孤波的传播速度也不再随时间变化, 如图 3 所示. 此时时空变量  $\xi = x, \eta = y, \tau = t$ . 也就是说, 含微扰的三维非线性 Schrödinger 方程的近似解中的变量此时均不再是渐进的.

另外, 由于孤波强度  $|u|^2$  的变化指数中不含空间坐标  $x$  或  $y$ , 所以在任意时刻  $t$ , 波的振幅演化情况如图 4 所示, 均不会随  $x$  或  $y$  发生改变.

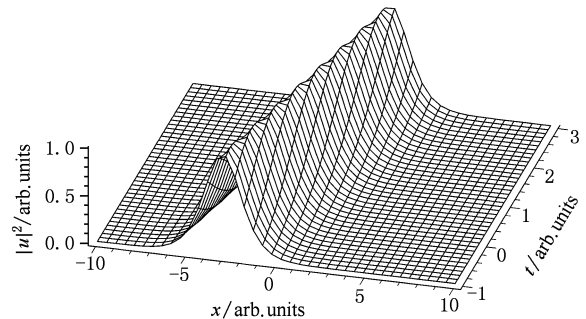


图 3  $y = 1$  时, 解 (15) 的强度  $|u|^2$  随时间的演化  $\epsilon = 0.01, t_0 = c = 0, \mu = r = s = V = W = C = 1$

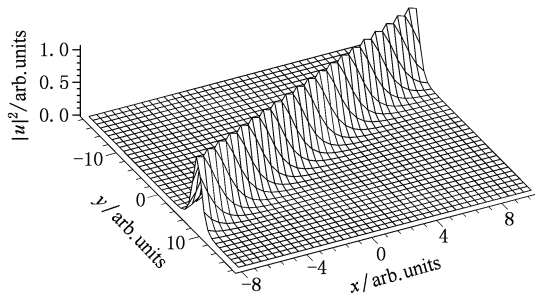


图4  $t = 1$  时, 解(15)的强度  $|u|^2$  随空间坐标的演化  $\epsilon = 0.02, c = 1.5, t_0 = 0, \mu = r = s = V = W = C = 1$

## 4. 结 论

利用直接微扰方法来研究含修正项的孤立子方程已有多, 由于存在某些原因, 鲜有见将其用于处理高维孤立子方程的微扰问题的. 本工作的目的就是文献[6]的直接微扰方法推广到高维非线性演化方程. 该方法完全摆脱了对逆散射变换的依

赖, 思路直接, 容易理解和接受. 从得到的近似解(15)中我们也不难发现, 利用这种方法得到的零级解  $u_0$  可以取不含微扰的三维非线性 Schrödinger 方程的任意一个精确解, 而且一阶修正  $u_1$  可以由它的无穷多个对称中的任意一个给定. 所以, 运用这种方法得到的近似解比通常的微扰方法得到的解要丰富得多. 而且对于各种不同类型的微扰解, 包括单孤子解、多孤子解、周期解等都可以同时获得. 另外从得到的近似解析解出发, 我们还简单分析了微扰项  $\epsilon u$  对解得影响. 根据对变化指数中任意常数  $c$  的不同取法, 我们得到当  $c > 0$  孤子的振幅随时间指数增长, 如  $c < 0$ , 孤子的振幅随时间指数衰减. 但不论是增长还是衰减, 只要微扰参量  $\epsilon$  变化, 增长或衰减的速度就会相应地改变. 至于如何将该直接微扰方法应用于含有其他形式的微扰项的非线性 Schrödinger 方程, 如微扰项  $\epsilon u_{xxx}, \epsilon |u|^4 u$  等, 以及如何将该直接微扰方法推广到其他的微扰非线性演化方程, 如微扰 KdV 方程, 微扰 sG 方程等还有待进一步的研究.

- [1] Kaup D J 1976 *SIAM J. Appl. Math.* **31** 121
- [2] Karpman V I, Maslov E M 1977 *Sov. Phys. JETP* **46** 281
- [3] Chen S R, Chen Z D, Yuan X Z, Huang N N 1999 *Chin. Phys.* **8** 590
- [4] Tang Y, Yan J R, Zhang K W, Chen Z H 1999 *Acta Phys. Sin.* **48** 480 (in Chinese)[唐 翌、颜家壬、张凯旺、陈振华 1999 物理学报 **48** 480]
- [5] Pan L X, Yu H Y, Yan J R 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 1316 (in Chinese)[潘留仙、俞慧友、颜家壬 2008 物理学报 **57** 1316]
- [6] Lou S Y 1999 *Chin. Phys. Lett.* **16** 659
- [7] Cheng X P, Lin J, Wang Z P 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 3031 (in Chinese)[程雪苹、林 机、王志平 2007 物理学报 **56** 3031]
- [8] Fibich G, Papanicolaou G 1999 *SIAM J. Appl. Math.* **60** 183
- [9] Xu Y, Xue D S, Zuo W, Li F S 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 2896 (in Chinese)[徐 岩、薛德胜、左 维、李发伸 2003 物理学报 **52** 2896]
- [10] Ruan H Y, Chen Y X 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 586 (in Chinese)[阮航宇、陈一新 2001 物理学报 **50** 586]

# Direct perturbation method applied to three-dimensional nonlinear Schrödinger equation\*

Cheng Xue-Ping<sup>1)†</sup> Lin Ji<sup>2)</sup> Han Ping<sup>1)</sup>

1) (*Physics, Mathematics and Information College of Zhejiang Ocean University, Zhoushan 316004, China*)

2) (*Physics, Mathematics and Information Engineering College of Zhejiang Normal University, Jinhua 321004, China*)

(Received 9 August 2009; revised manuscript received 17 December 2009)

## Abstract

By applying the direct perturbation method to the 3-dimensional nonlinear Schrödinger equation with perturbation, we obtain its asymptotical solutions, which contain not only the zero-order solutions, but also the first-order corrections. Through these solutions, the effect of perturbation on the soliton is analyzed as well.

**Keywords:** direct perturbation method, perturbation, 3-dimensional nonlinear Schrödinger equation, asymptotical solution

**PACC:** 0260, 0340K, 4735

---

\* Project supported by the National Natural Science Foundation of China(Grant No. 10875106).

† E-mail: chengxp2005@126.com