

# 分数阶 Oldroyd-B 黏弹性 Poiseuille 流的 Laplace 数值反演分析\*

王 羽 欧阳洁<sup>†</sup> 杨斌鑫

(西北工业大学应用数学系, 西安 710129)

(2009 年 10 月 17 日收到; 2010 年 1 月 21 日收到修改稿)

采用 Laplace 数值反演的 Stehfest 算法研究了分数阶 Oldroyd-B 粘弹性流体在两平板间非定常的 Poiseuille 流动问题. 首先, 通过数值解与近似解析解的比较验证了 Stehfest 算法的有效性. 其次, 运用 Stehfest 算法对平板 Poiseuille 流动进行了研究, 揭示了分数阶黏弹性平板流的速度过冲和应力过冲现象, 指出这些现象对分数导数的阶数存在明显的依赖性. 同时, 数值结果表明, 整数阶本构方程仅仅是分数阶本构方程的特例, 分数阶本构方程较整数阶本构方程具有更广泛的适用性.

**关键词:** 分数阶导数, Oldroyd-B 模型, Laplace 变换, 黏弹性

**PACC:** 0260, 4760, 4660B

## 1. 引 言

为了描述许多黏弹性材料的流变特性, 分数阶微积分在黏弹流体本构关系的刻画上已获得了成功应用<sup>[1-3]</sup>. 这种方法的出发点是用分数阶导数代替本构方程中应力应变对时间的整数阶导数. 谭文长等<sup>[4-10]</sup>对含有分数阶导数的非 Newton 流体模型做了一些研究.

对于含有分数阶导数的控制方程, 一般考虑的都是其精确解. 但精确解往往形式复杂且包含 Mittag-Leffler 函数或 Fox-H 函数, 人们很难对其进行快捷而有效的计算, 这样就对实际应用造成了很大的不便. 黄军旗等<sup>[11]</sup>曾采取 Laplace 数值反演的 Crump 方法对双筒流变仪中广义二阶流体的运动特征进行了分析. 但是, 与已经做过的大量黏弹性流变特性分析及解析求解的工作相比, 目前数值分析方面的工作还很少.

本文考虑到解析形式的复杂性和计算求值的困难性, 首次运用 Laplace 变换数值反演 Stehfest 法<sup>[12, 13]</sup>对分数阶 Oldroyd-B 平板 Poiseuille 流进行了数值研究. 对于分数阶导数, 许多文献采用 R-L 分

数阶导数<sup>[14]</sup>定义, 主要是由于更适合分数阶导数微分方程纯数学的解析求解. 考虑到物理、工程方面的计算与应用, 文中则采用适合数值分析的 Caputo 分数阶导数<sup>[14]</sup>定义, 其原因是由其定义的初边值条件有明确的物理意义.

## 2. 控制方程

图 1 给出了平板间 Poiseuille 流动的示意图. 这里假设: (1) 考虑分数阶 Oldroyd-B 不可压缩流体; (2) 流体在两个长度为  $L$  的平板间流动, 且流动是由恒定压力梯度产生. 两平板间的距离是  $d$ , 且平板与  $x$  方向平行. 在  $y = 0$  和  $y = d$  的平板始终保持静止.

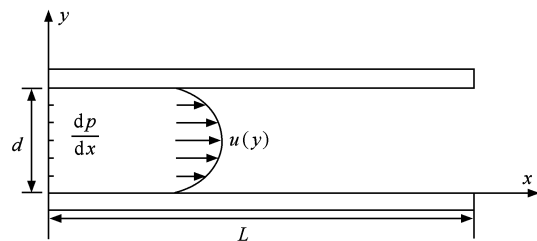


图 1 平板间 Poiseuille 流动示意图

\* 国家自然科学基金重大项目(批准号:10590353,10871159)和国家重点基础研究发展计划(批准号:2005CB321704)资助的课题.

<sup>†</sup> 通讯联系人. E-mail: jieouyang@nwpu.edu.cn

非定常不可压缩流的控制方程为

$$\operatorname{div} \mathbf{V} = 0, \quad (1)$$

$$\rho \frac{dV}{dt} = \operatorname{div} \mathbf{T}, \quad (2)$$

其中  $\mathbf{V} = (u, v)$  是流体速度,  $u, v$  分别是  $\mathbf{V}$  在  $x$  方向和  $y$  方向上的分量,  $\rho$  是密度,  $d/dt$  是对时间的物质导数,  $\mathbf{T}$  是 Cauchy 应力张量, 表示为  $\mathbf{T} = -p\mathbf{I} + \boldsymbol{\sigma}$ . 其中  $p$  是压力,  $\mathbf{I}$  是单位张量,  $\boldsymbol{\sigma}$  是偏应力张量.

分数阶 Oldroyd-B 本构方程<sup>[8,10]</sup>为

$$\left(1 + \lambda_1^\alpha \frac{\delta^\alpha}{\delta t^\alpha}\right) \boldsymbol{\sigma} = \mu \left(1 + \lambda_2^\beta \frac{\delta^\beta}{\delta t^\beta}\right) \mathbf{A}_1, \quad (3)$$

其中  $\mu$  是动态黏度,  $\lambda_1$  和  $\lambda_2$  分别是松弛时间和延迟时间,  $\alpha$  和  $\beta$  是分数阶导数的阶数, 且  $0 \leq \alpha \leq \beta \leq 1$ . 一阶 Rivlin-Ericksen 张量  $\mathbf{A}_1$  表示为

$$\mathbf{A}_1 = \mathbf{L} + \mathbf{L}^T, \quad \mathbf{L} = \operatorname{grad} \mathbf{V},$$

其中

$$\frac{\delta^\alpha \boldsymbol{\sigma}}{\delta t^\alpha} = \frac{\partial^\alpha \boldsymbol{\sigma}}{\partial t^\alpha} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \boldsymbol{\sigma} - \mathbf{L} \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma} \mathbf{L}^T,$$

$$\frac{\delta^\beta \mathbf{A}_1}{\delta t^\beta} = \frac{\partial^\beta \mathbf{A}_1}{\partial t^\beta} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{A}_1 - \mathbf{L} \mathbf{A}_1 - \mathbf{A}_1 \mathbf{L}^T. \quad (4)$$

$\frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha}$  和  $\frac{\partial^\beta}{\partial t^\beta}$  分别是关于时间  $t$  的  $\alpha$  阶和  $\beta$  阶分数阶微分算子, 采用 Caputo 分数阶导数形式, 其定义为<sup>[14,15]</sup>

$$\frac{\partial^\alpha f(x)}{\partial x^\alpha} = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^x \frac{f^{(n)}(\xi)}{(x-\xi)^{\alpha+1-n}} d\xi$$

$$(n-1 < \alpha < n),$$

其中  $\Gamma(\cdot)$  是 Gamma 函数.

由于流动沿  $x$  方向, 即速度  $\mathbf{V} = u(y, t)\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{i}$  是  $x$  方向的单位矢量, 应力  $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}(y, t)$  的分量  $\sigma_{yy} = 0$ , 初始条件  $\boldsymbol{\sigma}(y, 0) = 0$ .

将(4)式代入(3)式得到

$$\left(1 + \lambda_1^\alpha \frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha}\right) \sigma_{xy} = \mu \left(1 + \lambda_2^\beta \frac{\partial^\beta}{\partial t^\beta}\right) \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right), \quad (5)$$

$$\left(1 + \lambda_1^\alpha \frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha}\right) \sigma_{xx} - 2\lambda_1^\alpha \sigma_{xy} \frac{\partial u}{\partial y} = -2\mu\lambda_2^\beta \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2. \quad (6)$$

动量方程为

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y}. \quad (7)$$

由(5)和(7)式得平板 Poiseuille 流的运动方程为

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \lambda_1^\alpha \frac{\partial^{\alpha+1} u}{\partial t^{\alpha+1}} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \nu \lambda_2^\beta \frac{\partial^\beta}{\partial t^\beta} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$$

$$- \left(1 + \frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha}\right) A, \quad (8)$$

其中  $A = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}$ ,  $\nu = \frac{\mu}{\rho}$ .

初边值条件为

$$u(y, 0) = u_t(y, 0) = 0$$

$$(0 < y < d), \quad (9)$$

$$u(0, t) = u(d, t) = 0$$

$$(t > 0). \quad (10)$$

### 3. Laplace 数值反演 Stehfest 法

Laplace 积分变换及逆变换分别为

$$\bar{f}(s) = L[f(t)] = \int_0^\infty f(t) e^{-st} dt, \quad (11)$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \bar{f}(s) e^{st} ds. \quad (12)$$

应用 Laplace 变换求解方程的主要困难之一, 在于难以迅速且准确地对  $\bar{f}(s)$  进行逆变换. 即使对于最简单的有理函数而言, 逆变换的获得也并非轻而易举. 因而对于任一个 Laplace 变换  $\bar{f}(s)$ , 如何能迅速有效地求出其逆变换  $f(t)$  成为至关重要的问题. 魏培君等<sup>[16]</sup>将众多的数值反演方法归纳为四类并对其进行评价. 基于  $\delta(x)$  函数的 Stehfest 算法<sup>[12,16]</sup>便是其中之一, 该方法的计算精度高于同类方法, 且稳定性能够得到保证. 同登科等<sup>[17]</sup>曾运用 Stehfest 算法对不定常渗流进行了研究.

#### 3.1. Stehfest 算法

倘若能够计算 Laplace 逆变换  $\bar{f}(s)$ , 那么函数  $f(t)$  在  $t = T$  的值为<sup>[12,13]</sup>

$$f(T) = \frac{Ln2}{T} \sum_{i=1}^N V_i \bar{f}\left[\frac{Ln2}{T} i\right], \quad (13)$$

其中

$$V_i = (-1)^{N/2+i} \sum_{k=\lceil (i+1)/2 \rceil}^{\min(i, N/2)} \frac{k^{N/2} (2k)!}{(N/2 - k)! k! (k-1)! (i-k)! (2k-i)!}.$$

$$(14)$$

Stehfest 算法本身有着比较复杂的数学背景, 实质上是理论推导的结果. 原则上说反演公式中的项数  $N$  取值越大, 计算越准确, 但在应用中由于舍入误差的影响,  $N$  的取值是有选择的,  $N$  一般取 6—18 之间的偶数<sup>[12]</sup>.

#### 3.2. 速度与应力的 Stehfest 算法数值解

由于文中分数阶导数的定义是 Caputo 分数阶

导数,所以(8)式可简化为

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \lambda_1^\alpha \frac{\partial^{\alpha+1} u}{\partial t^{\alpha+1}} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \nu \lambda_2^\beta \frac{\partial^\beta}{\partial t^\beta} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) - A. \quad (15)$$

首先对方程(15)关于空间取 Fourier 正弦变换

$$\tilde{u}(n,t) = \int_0^d u(y,t) \sin \frac{n\pi y}{d} dy,$$

得

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} + \lambda_1^\alpha \frac{\partial^{\alpha+1} \tilde{u}}{\partial t^{\alpha+1}} &= -\nu \left( \frac{n\pi}{d} \right)^2 \tilde{u} \\ &\quad - \nu \lambda_2^\beta \left( \frac{n\pi}{d} \right)^2 \frac{\partial^\beta \tilde{u}}{\partial t^\beta} \\ &\quad + \frac{Ad}{n\pi} ((-1)^n - 1). \end{aligned} \quad (16)$$

然后对方程(16)关于时间取 Laplace 变换

$$\bar{\tilde{u}}(n,s) = \int_0^\infty \tilde{u}(n,t) e^{-st} dt.$$

得

$$\begin{aligned} s \bar{\tilde{u}} + \lambda_1^\alpha s^{\alpha+1} \bar{\tilde{u}} + \nu \left( \frac{n\pi}{d} \right)^2 \bar{\tilde{u}} + \nu s^\beta \lambda_2^\beta \left( \frac{n\pi}{d} \right)^2 \bar{\tilde{u}} \\ = \frac{1}{s} \frac{Ad}{n\pi} ((-1)^n - 1), \end{aligned} \quad (17)$$

其中 Caputo 分数阶导数的 Laplace 变换为<sup>[14]</sup>

$$L \{ {}_0^C D_t^\alpha u(t) \} = s^\alpha \bar{u}(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{\alpha-k-1} u^{(k)}(0).$$

由(17)式得

$$\bar{\tilde{u}}(n,s) = \frac{A_n}{s \left( s + \lambda_1^\alpha s^{\alpha+1} + \nu \left( \frac{n\pi}{d} \right)^2 + \nu s^\beta \lambda_2^\beta \left( \frac{n\pi}{d} \right)^2 \right)}, \quad (18)$$

其中

$$A_n = \frac{((-1)^n - 1)Ad}{n\pi}. \quad (19)$$

由 Stehfest 算法与(18)式,得

$$\tilde{u}(n,t) = \frac{Ln2}{t} \sum_{i=1}^N V_i \bar{\tilde{u}} \left[ n, \frac{Ln2}{t} i \right]. \quad (20)$$

最后对(20)式取 Fourier 正弦逆变换,得速度为

$$\begin{aligned} u(y,t) &= \frac{2}{d} \sum_{n=1}^\infty \frac{Ln2}{t} \sum_{i=1}^N V_i \bar{\tilde{u}} \left[ n, \frac{Ln2}{t} i \right] \\ &\quad \times \sin \frac{n\pi y}{d}. \end{aligned} \quad (21)$$

对(5)式关于时间进行 Laplace 变换,得

$$(1 + \lambda_1^\alpha s^\alpha) \bar{\sigma}_{xy} = \mu (1 + \lambda_2^\beta s^\beta) \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right), \quad (22)$$

其中

$$\bar{\sigma}_{xy}(y,s) = \int_0^\infty \sigma_{xy}(y,t) e^{-st} dt.$$

对(18)式进行 Fourier 正弦逆变换,得

$$\begin{aligned} \bar{u}(y,s) &= \frac{2}{d} \sum_{n=1}^\infty \frac{A_n}{s \left( s + \lambda_1^\alpha s^{\alpha+1} + \nu \left( \frac{n\pi}{d} \right)^2 + \nu s^\beta \lambda_2^\beta \left( \frac{n\pi}{d} \right)^2 \right)} \\ &\quad \times \sin \frac{n\pi y}{d}. \end{aligned} \quad (23)$$

将(23)式代入(22)式,得

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{xy}(y,s) &= \frac{\mu(1 + \lambda_2^\beta s^\beta) 2A}{(1 + \lambda_1^\alpha s^\alpha) d} \\ &\quad \times \sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^n - 1}{s \left( s + \lambda_1^\alpha s^{\alpha+1} + \nu \left( \frac{n\pi}{d} \right)^2 + \nu s^\beta \lambda_2^\beta \left( \frac{n\pi}{d} \right)^2 \right)} \\ &\quad \times \cos \frac{n\pi y}{d}. \end{aligned} \quad (24)$$

最后通过 Stehfest 算法,得应力为

$$\sigma_{xy}(y,t) = \frac{Ln2}{t} \sum_{i=1}^N V_i \bar{\sigma}_{xy} \left[ y, \frac{Ln2}{t} i \right]. \quad (25)$$

### 3.3. Stehfest 算法的有效性验证

分数阶微分方程(8)的解析解为

$$\begin{aligned} u(y,t) &= \frac{2}{d} \sum_{n=1}^\infty \sum_{k=0}^\infty \sum_{m=0}^k (-1)^k \binom{k}{m} A_n \lambda_1^{-\alpha(k+1)} \\ &\quad \times \lambda_2^{m\beta} \nu^k \left( \frac{n\pi}{d} \right)^{2k} \frac{t^{\alpha k + \alpha - m\beta + k + 1}}{k!} \\ &\quad \times E_{\alpha, \alpha - m\beta + k + 2}^{(k)} (-\lambda_1^{-\alpha} t^\alpha) \sin \frac{n\pi y}{d}. \end{aligned} \quad (26)$$

(26)式涉及多重无穷级数和特殊函数的计算,且当时间较大时,级数收敛速度很慢.因此,很难对(26)式进行快捷而有效的求值计算.只有当时间较小时,才能够通过截取有限项得到(26)式解析解的近似值.为了简便起见,这里假设  $\nu = d = 1, A = -1$ .

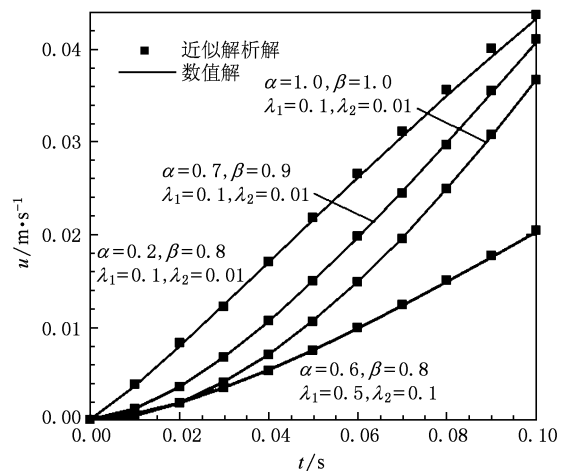


图2 数值解与近似解析解的比较

表 1 数值解与近似解析解的最大误差

参数( $\alpha, \beta, \lambda_1, \lambda_2$ )	最大误差/ $10^{-3} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$
(1.0, 1.0, 0.1, 0.01)	0.17118
(0.7, 0.9, 0.1, 0.01)	0.29493
(0.2, 0.8, 0.1, 0.01)	0.86874
(0.6, 0.8, 0.5, 0.1)	0.16698

图 2 为 Stehfest 算法的数值解与近似解析解在不同参数下速度的比较,表 1 给出了图 2 中两种解在不同参数下的最大误差.可以看出,最大误差很小,即数值解与近似解析解符合很好,从而证明了 Stehfest 算法的有效性.下面将应用 Stehfest 算法对平板 Poiseuille 流动进行数值分析.

#### 4. 数值结果及其分析

图 3(a)和(b)分别给出不同阶数  $\alpha$  下流场中心线处速度的演化和截面  $x = L/2$  上的速度变化.

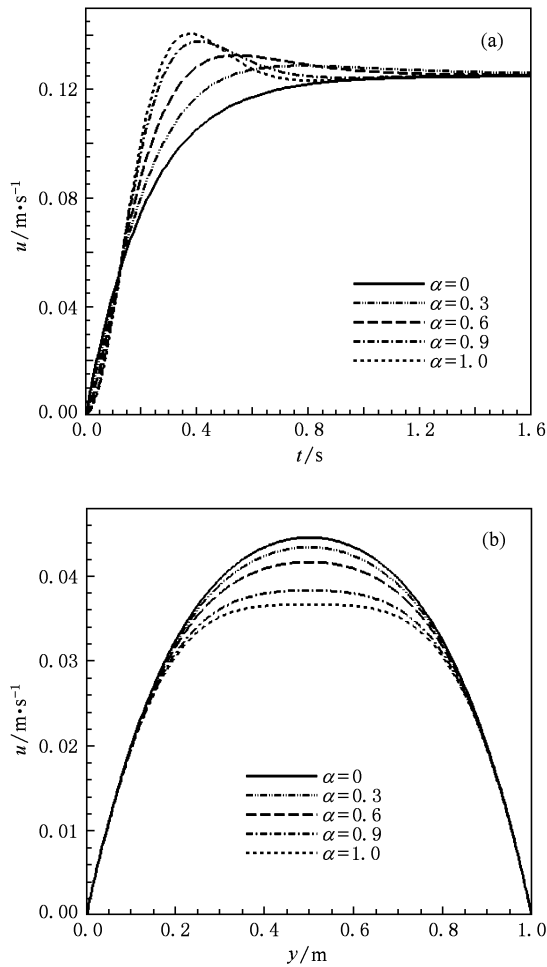


图 3 阶数  $\alpha$  对速度的影响,其中  $\beta = 1.0, \lambda_1 = 0.1, \lambda_2 = 0.01$  (a) 流场中心线处速度的演化,(b) 截面  $x = L/2$  的速度变化,其中  $t = 0.1$

可以看出,当阶数  $\alpha$  取整数即  $\alpha = 0$  和  $\alpha = 1$  时,得到了二阶流体和整数阶 Oldroyd-B 流体的运动速度,该结果与基于整数阶本构方程得到的结果<sup>[18,19]</sup>完全符合;当  $\alpha$  在 0—1 变化时,分数阶 Oldroyd-B 流体的速度始终介于二阶流体和整数阶 Oldroyd-B 流体的速度之间.并且图 3(a)表明,当  $\alpha$  较小时,速度逐渐增大且最终达到稳定,变化趋势较接近二阶流体的变化趋势;当  $\alpha$  增大时,流体表现出弹性增大且速度会出现波动,即出现速度过冲现象;且  $\alpha$  愈接近 1,速度过冲现象愈加明显,变化趋势也愈接近整数阶 Oldroyd-B 流体的变化趋势.综上所述,分数阶 Oldroyd-B 流体在  $\alpha$  较小和较大时,分别呈现类似于二阶流体的黏弹特征和类似于整数阶 Oldroyd-B 流体的黏弹特征.

图 4 给出  $\alpha = 0.2$  和  $\alpha = 0.7$  时,阶数  $\beta$  对流场中心线处速度的影响.由图 4(a)可见,随着  $\beta$  增大,达到稳态时的速度增大,但变化的幅度减小.这说

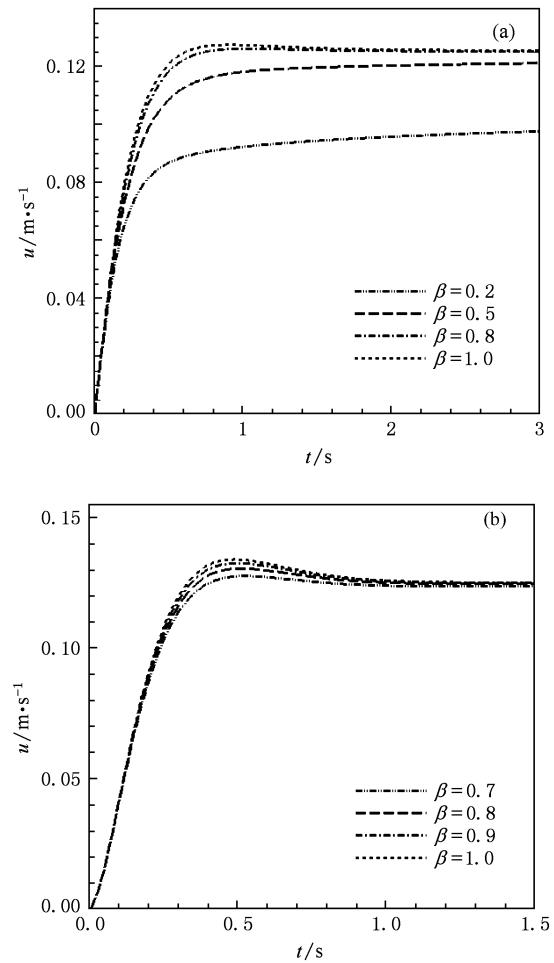


图 4 不同  $\beta$  时流场中心线处速度的演化,其中  $\lambda_1 = 0.1, \lambda_2 = 0.01$  (a)  $\alpha = 0.2$ , (b)  $\alpha = 0.7$

明  $\beta$  增大,流体的黏性减小,且变化的幅度减小.从图 4(b)可以看出,  $\alpha$  较大时,  $\beta$  的变化对流体运动速度的大小和达到稳态的时间几乎没有影响,速度的变化趋势基本相同,且均产生了速度过冲现象.

图 5 反映了松弛时间  $\lambda_1$  对流场中心线处速度的影响.可以看出,松弛时间增加,弹性增大,且速度产生过冲的振幅及达到稳态的时间增加.

图 6 反映了延迟时间  $\lambda_2$  对流场中心线处速度的影响.可以看出,延迟时间越短,速度变化率越大,且速度过冲现象越明显.

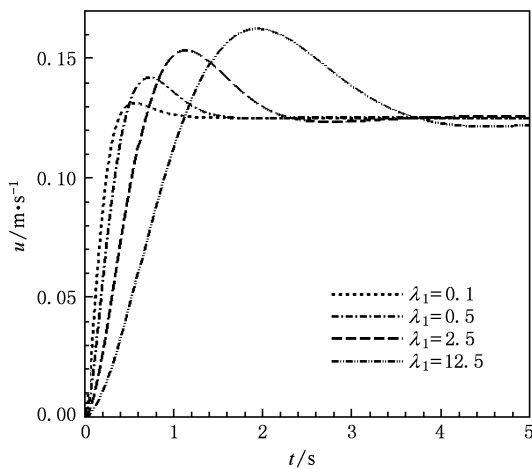


图 5 不同  $\lambda_1$  时流场中心线处速度的演化,其中  $\alpha = 0.6, \beta = 0.9, \lambda_2 = 0.01$

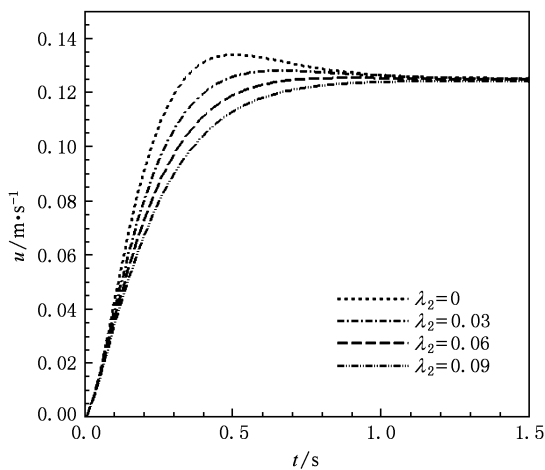


图 6 不同  $\lambda_2$  时流场中心线处速度的演化,其中  $\alpha = 0.6, \beta = 0.9, \lambda_1 = 0.1$

图 7 给出了阶数  $\alpha$  对下平板应力的影响.阶数  $\alpha = 0$  和  $\alpha = 1$  分别表示二阶流体和整数阶 Oldroyd-

B 流体的应力变化,  $\alpha = 1$  出现的应力过冲现象,与对整数阶 Oldroyd-B 流体进行研究时获得的结果<sup>[19]</sup>一致.当  $\alpha$  在 0—1 变化时,分数阶 Oldroyd-B 流体的应力始终介于二阶流体和整数阶 Oldroyd-B 流体的应力之间,这种趋势与速度变化趋势一致.并且  $\alpha$  愈大,应力的变化趋势愈接近于整数阶 Oldroyd-B 流体的应力变化趋势,即  $\alpha$  愈大,分数阶 Oldroyd-B 流体的黏弹特征愈接近整数阶 Oldroyd-B 流体的黏弹特征.

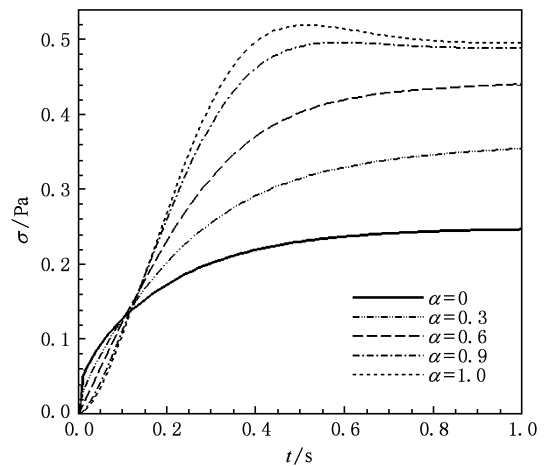


图 7 不同  $\alpha$  时下平板应力的演化,其中  $\beta = 1.0, \lambda_1 = 0.1, \lambda_2 = 0.01$

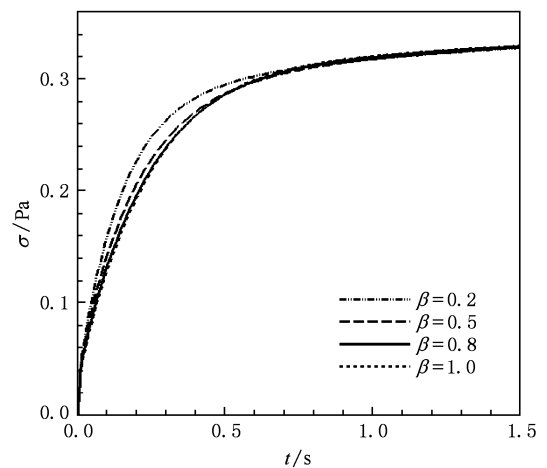


图 8 不同  $\beta$  时下平板应力的演化,其中  $\alpha = 0.2, \lambda_1 = 0.1, \lambda_2 = 0.01$

图 8 描述了阶数  $\beta$  对下平板应力的影响.  $\beta$  接近于 1 时,应力演化几乎不受影响.

图 9 给出了松弛时间  $\lambda_1$  对下平板应力的影响.

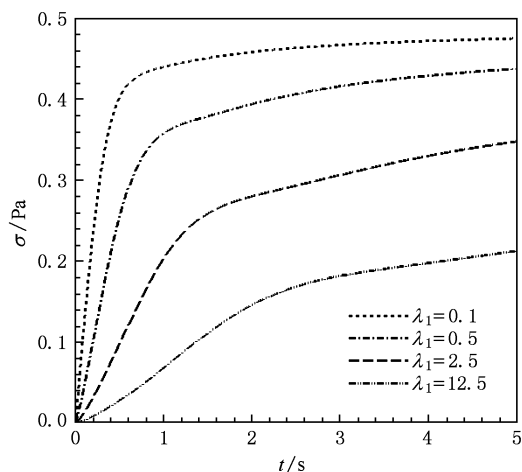


图9 不同  $\lambda_1$  时下平板应力的演化,其中  $\alpha = 0.6, \beta = 0.9, \lambda_2 = 0.01$

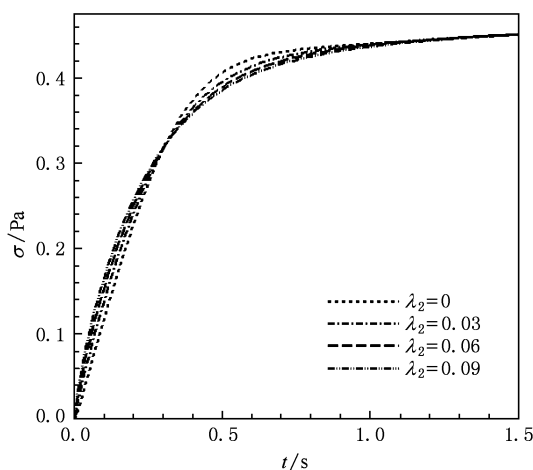


图10 不同  $\lambda_2$  时下平板应力的演化,其中  $\alpha = 0.6, \beta = 0.9, \lambda_1 = 0.1$

可以看出,  $\lambda_1$  对应力的演化有着显著影响.  $\lambda_1$  增加,流动初期应力变化率增大,同一时刻的应力增加.并且达到稳态的时间缩短.

图10给出了延迟时间  $\lambda_2$  对下平板应力的影响.可以看出,  $\lambda_2$  对应力变化趋势影响甚微,但对流动初期应力变化的快慢有一定影响.

## 5. 结 论

(1) 采用了 Laplace 数值反演的 Stehfest 算法对分数阶微分方程进行了数值求解,解决了解析求解计算繁琐及求值困难的问题.数值结果与近似解析解的比较,表明了 Stehfest 算法的有效性.

(2) 分数阶本构关系中导数阶数的大小对速度和应力的影响显著.当导数阶数  $\alpha$  较小时,流体呈现类似于二阶流体的黏弹特征;当导数阶数  $\alpha$  较大时,流体呈现类似于整数阶 Oldroyd-B 流体的黏弹特征.

(3) 导数阶数  $\alpha$  越大,流动的不稳定性越强.即速度过冲与应力过冲现象越明显.导数阶数  $\beta$  对流动初期流场中心线处的速度影响较小,随着时间的推移,  $\beta$  越大,流场中心线处速度越大,但速度变化幅度越小.

(4) 松弛时间  $\lambda_1$  越大,弹性越大,流动初期速度达到过冲最大速度所需时间越长.

- [1] Bagley R L 1983 *J. Rheol.* **27** 201
- [2] Song D Y, Jiang T Q 1998 *Rheol. Acta* **37** 512
- [3] Zhu K Q, Hu K X, Yang F 2009 *Chinese Conference of Theoretical and Applied Mechanics* August 24—26, 2009 Zhengzhou p204 (in Chinese) [朱克勤、胡开鑫、杨帆 2009 中国力学学会学术大会 2009. 8. 24—26 郑州,第 204 页]
- [4] Tan W C, Xu M Y 2002 *Mech. Res. Commun.* **29** 3
- [5] Tan W C, Xu M Y 2004 *Acta Mech. Sin.* **20** 471
- [6] Qi H T, Jin H 2006 *Acta Mech. Sin.* **22** 301
- [7] Khan M, Maqbool K, Hayat T 2006 *Acta Mech.* **184** 1
- [8] Khan M, Hayat T, Asghar S 2006 *Int. J. Engng. Sci.* **44** 333
- [9] Khan M, Nadeem S, Hayat T, Siddiqui A M 2005 *Math. Comput. Model.* **41** 629
- [10] Khan M, Hyder A S, Qi H T 2009 *Nonlinear. Anal.-Real.* **10** 980
- [11] Huang J Q, He G Y, Liu C Q 1996 *Sci. China. Ser. A* **26** 912 (in Chinese) [黄军旗、何光渝、刘慈群 1996 中国科学(A 辑) **26** 912]
- [12] Stehfest H 1970 *Commun. ACM* **13** 624
- [13] Tong D K, Chen Q L 2001 *Acta Petrol. Sin.* **22** 91 (in Chinese) [同登科、陈钦雷 2001 石油学报 **22** 91]
- [14] Podlubny I 1999 *Fractional Differential Equations* (San Diego: Academic Press) p62—108
- [15] Chang F X, Chen J, Huang W 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 1113 (in Chinese) [常福宣、陈进、黄薇 2005 物理学报 **54** 1113]
- [16] Wei P J, Zhang S Y, Wu Y L 1999 *Adv. Mech.* **29** 317 (in Chinese) [魏培君、张双寅、吴永礼 1999 力学进展 **29** 317]
- [17] Tong D K, Wang R H 2004 *Sci. China. Ser. G* **34** 87 (in Chinese) [同登科、王瑞和 2004 中国科学(G 辑) **34** 87]
- [18] Erdoğan M E, İmrak C E 2005 *Int. J. Nonlin. Mech.* **40** 1238
- [19] Hayat T, Khan M, Ayub M 2004 *Appl. Math. Comput.* **151** 105

# Analysis on fractional Oldroyd-B viscoelastic Poiseuille flow by numerical inversion of Laplace transforms \*

Wang Yu Ouyang Jie<sup>†</sup> Yang Bin-Xin

(*Department of Applied Mathematics, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710129, China*)

(Received 17 October 2009; revised manuscript received 21 January 2010)

## Abstract

In this paper the unsteady Poiseuille flow of fractional Oldroyd-B viscoelastic fluid between two parallel plates is studied, which sheds light on the investigation on fractional differential equations. Stehfest algorithm for numerical inversion of Laplace transform is used for obtaining the numerical solutions, and its validity is verified by comparing the results with approximate analytic solutions. Then the laminar Poiseuille flow of fractional Oldroyd-B viscoelastic fluid is investigated by the Stehfest algorithm. Phenomena of velocity and stress overshootings are found, which are proved to be dependent on the order of fractional derivative. Simultaneously, compared with the integer constitutive equations, the fractional constitutive equations have wider scope of application. This conclusion was drawn based on the obvious fact that the integer constitutive equations are only special cases of the fractional constitutive equations.

**Keywords:** fractional derivative, Oldroyd-B model, Laplace transform, viscoelastic

**PACC:** 0260, 4760, 4660B

---

\* Project supported by the Major Program of the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 10590353, 10871159) and the National Basic Research Program of China (Grant No. 2005CB321704).

<sup>†</sup> Corresponding author. E-mail: jieouyang@nwpu.edu.cn