

一类相对转动时滞非线性动力系统的稳定性分析*

刘浩然^{1)†} 朱占龙²⁾ 时培明²⁾

1) (燕山大学信息科学与工程学院, 秦皇岛 066004)

2) (燕山大学电气工程学院, 秦皇岛 066004)

(2009 年 12 月 8 日收到; 2010 年 1 月 29 日收到修改稿)

建立了具有时变刚度、非线性阻尼和谐波激励的一类相对转动时滞非线性动力系统的动力学方程. 采用多尺度法推导出时滞动力系统的分岔响应方程, 运用奇异性理论研究系统结构稳定性, 得到主共振稳态响应方程的转迁集以及不同参数下分岔曲线的拓扑结构. 应用 Hopf 分岔理论讨论了时滞动力系统动态稳定性, 给出了系统产生极限环的条件, 最后用数值模拟的方法研究了时滞参数对系统极限环幅值的影响.

关键词: 相对转动, 时滞动力系统, 稳定性, 极限环

PACC: 0340D, 0313

1. 引 言

转动是自然界中最基本的运动形式之一. 1985 年 Carmeli^[1,2] 提出了转动相对论力学理论, 1996 年罗绍凯^[3,4] 提出了转动相对论分析力学理论. 近年来, 人们对转动相对论性动力学方程的非线性、变质量及代数几何结构等进行了研究^[5-7]. 基于相对性原理, 建立了圆柱体任意两个横截面间的相对转动线性和非线性动力学方程, 并对系统进行了定量分析^[8-10], 研究了非线性刚度和非线性阻尼的相对转动系统的动力学特性^[11-14]. 时滞现象广泛存在, 如电路^[15]、光学^[16]、神经网络^[17]、海洋气候^[18] 等领域, 人们对时滞系统的研究取得了一些成果. 文献 [19] 对含有两个时滞参数的 Duffing 系统的主共振、亚谐共振及超谐共振进行了研究. 文献 [20, 21] 利用多尺度法研究了时滞作为参数对 van der pol-Duffing 方程的主共振分岔响应的影响. 文献 [22] 设计了非线性状态反馈控制器对参数激励系统的 2 倍超谐共振进行控制. 上述研究均表明时滞对系统动力学行为产生了显著影响.

本文基于耗散项的 Lagrange 方程建立一类含时变刚度、非线性阻尼和谐波激励的相对转动时滞

非线性动力学方程. 采用多尺度法对时滞动力系统的主共振响应求解并进行奇异稳定性分析, 得到系统的转迁集和分岔曲线的拓扑结构. 应用 Hopf 分岔理论研究系统平衡点的分岔性质, 得到产生极限环的条件, 并通过数值计算证明改变时滞参数可以实现对极限环幅值的良好控制, 说明时滞系统在振动控制领域有广泛的应用前景.

2. 相对转动时滞非线性动力学方程

相对转动系统是工程中广泛存在的动力传动系统, 对于两质量的相对转动系统, 设 J_1, J_2 为相对转动系统集中质量的转动惯量, K 为系统的扭转刚度, θ_i ($i = 1, 2$) 分别为两个集中质量的转角, $\dot{\theta}_i$ ($i = 1, 2$) 分别为两个集中质量的转速, F_1, F_2 分别是两个集中质量的外加力矩. 相对转动系统的动能为

$$E = \frac{1}{2}J_1\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}J_2\dot{\theta}_2^2. \quad (1)$$

阻尼力表示为

$$F_1^c = -f(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2), \quad (2)$$

$$F_2^c = f(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2), \quad (3)$$

结合实际的工程物理结构, 考虑刚度为时变刚

* 国家重大技术装备研制项目科技攻关计划 (批准号: ZZ02-13B-02-03-1) 和河北省自然科学基金 (批准号: F2010001317, E2010001262) 资助的课题.

† E-mail: liuhaoran1980@163.com

度,即

$$K = K_0(1 + k'\cos(\omega t)) \quad (4)$$

其中, ω 为刚度激励频率, k' 为刚度的变动幅值, K_0 为等效刚度. 系统的势能 U 为

$$U = \frac{K_0(1 + k'\cos(\omega t))}{2}(\theta_1 - \theta_2)^2. \quad (5)$$

把(2)和(3)式代入动力学普遍方程

$$\sum_{i=1}^n (F_i^{(j)} - J_i \ddot{\theta}_i) \delta \theta_i = 0, \quad (6)$$

其中, $F_i^{(j)} = F_i + F_i^c$, F_i 为广义外力, F_i^c 为广义阻尼力.

广义力(广义力矩)为

$$Q_r = \sum_{i=1}^n F_i^{(j)} \frac{\partial \theta_i}{\partial q_r} \quad (r = 1, 2), \quad (7)$$

其中, $q_r (r = 1, 2)$ 为广义坐标, n 为自由度数. 将(2)和(3)式代入(7)式后得到本系统的广义力(广义力矩)为

$$Q_1 = F_1 - f(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2), \quad (8)$$

$$Q_2 = F_2 + f(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2). \quad (9)$$

将(1)–(3), (5), (8)和(9)式代入如下 Lagrange 动力学方程:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial E}{\partial \dot{\theta}_r} - \frac{\partial E}{\partial \theta_r} + \frac{\partial U}{\partial \theta_r} = Q_r \quad (r = 1, 2). \quad (10)$$

可得

$$J_1 \ddot{\theta}_1 + f(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) + K_0(1 + k'\cos(\omega t))(\theta_1 - \theta_2) = F_1, \quad (11)$$

$$J_2 \ddot{\theta}_2 - f(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) - K_0(1 + k'\cos(\omega t))(\theta_1 - \theta_2) = F_2, \quad (12)$$

其中, $\ddot{\theta}_1, \ddot{\theta}_2$ 分别为系统集中质量的角加速度. 对于相对转动动力系统, 考虑相对转角变化, 由(11)式乘以 $\frac{1}{J_1}$ 减去(12)式乘以 $\frac{1}{J_2}$ 得到

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + \alpha f(\dot{x}) + \omega_0^2 k' x \cos(\omega t) = F(t), \quad (13)$$

其中, $x = \theta_1 - \theta_2, \dot{x} = \dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2, \ddot{x} = \ddot{\theta}_1 - \ddot{\theta}_2, \alpha = (J_1 + J_2)/J_1 J_2, \omega_0^2 = K_0(J_1 + J_2)/J_1 J_2, F(t) = (J_2 F_1 - J_1 F_2)/J_1 J_2$.

考虑一类非线性阻尼, 即 $f(\dot{x}) = \dot{x} + \beta x^3$, 令 $\omega_0^2 k' = k, F(t) = f \cos(\Omega t)$, 则(13)式变为

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + \alpha \dot{x} + \alpha \beta x^3 + k x \cos(\omega t)$$

$$= f \cos(\Omega t), \quad (14)$$

其中, ω_0 表示系统的固有频率, $F(t)$ 为外扰激励. (14)式就是一类含时变刚度和外扰激励作用下二质量相对转动的非线性动力学方程.

时滞因素在工程中广泛存在, 转动系统中由于结构迟滞特性^[21]以及外部激励延时作用等因素影响下, 系统往往处于时滞反馈作用之下. 本文考虑时滞反馈作用下时变刚度相对转动非线性动力系统的稳定性问题. 含时滞反馈受控动力系统为

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + \alpha \dot{x} + \alpha \beta x^3 + k x \cos(\omega t) = f \cos(\Omega t) + d_1 x(t - \tau_1) + d_2 \dot{x}(t - \tau_2), \quad (15)$$

其中 τ_1 和 τ_2 为时滞量, d_1 和 d_2 为增益系数. d_1 和 d_2 大于零时为正反馈, d_1 和 d_2 小于零时为负反馈.

3. 分岔响应方程

非线性项冠以小参数, 则(15)式化为

$$\begin{aligned} & \ddot{x} + \omega_0^2 x + \varepsilon \alpha \dot{x} + \varepsilon \alpha \beta x^3 + \varepsilon k x \cos(\omega t) \\ & = \varepsilon f \cos(\Omega t) + \varepsilon [d_1 x(t - \tau_1) \\ & \quad + d_2 \dot{x}(t - \tau_2)] \end{aligned} \quad (16)$$

采用多尺度法^[23–26], 设方程(16)的摄动解形式为

$$x(t, \varepsilon) = x_0(T_0, T_1) + \varepsilon x_1(T_0, T_1) + \dots, \quad (17)$$

其中, $T_0 = t$ 为快变时间尺度, $T_1 = \varepsilon t$ 为慢变时间尺度. 在主共振情况下, 设 $\omega_0 = \Omega + \varepsilon \sigma$, 这里 σ 为调谐参数. 为了简化过程且不失一般性^[27], 令 $\Omega = 1, \omega = 2$. 将(17)式代入(16)式, 并令等式两边 ε 同次幂系数相等, 得到方程

$$D_0^2 x_0 + x_0 = 0, \quad (18)$$

$$\begin{aligned} D_0^2 x_1 + x_1 = & -2D_0 D_1 x_0 - 2\sigma x_0 - \alpha D_0 x_0 \\ & - \alpha \beta (D_0 x_0)^3 - k x_0 \cos(2T_0) \\ & + f \cos T_0 + d_1 x_0(t - \tau_1) \\ & + d_2 D_0 x_0(t - \tau_2), \end{aligned} \quad (19)$$

其中, 微分算子 $D_n = \frac{\partial}{\partial T_n}$ ($n = 0, 1, \dots$). 设(18)式复数形式的解为

$$x_0 = A(T_1) e^{iT_0} + \bar{A}(T_1) e^{-iT_0}, \quad (20)$$

其中, $A(T_1)$ 和 $\bar{A}(T_1)$ 为共轭函数且均为关于 T_1 的函数, 将(20)式代入(19)式中可以得到

$$\begin{aligned} D_0^2 x_1 + x_1 = & [-2iD_1 A - 2\sigma A - i\alpha A - 3i\alpha \beta A^2 \bar{A} \\ & - k\bar{A}/2 + d_1(\cos\tau_1 - i\sin\tau_1)A \end{aligned}$$

$$+ f/2 + id_2(\cos\tau_2 - isin\tau_2)A]e^{i\tau_0} + [i\alpha\beta A^3 - kA/2]e^{3i\tau_0} + c. c. \quad (21)$$

其中,(21)式中 c. c. 表示等式右端函数的共轭复数部分,消去 x_1 中的久期项,即令

$$\begin{aligned} & -2iD_1A - 2\sigma A - i\alpha A \\ & -3i\alpha\beta A^2\bar{A} - k\bar{A}/2 + f/2 \\ & + d_1(\cos\tau_1 - isin\tau_1)A \\ & + id_2(\cos\tau_2 - isin\tau_2)A = 0. \end{aligned} \quad (22)$$

令 $A = ae^{i\gamma}/2$, 其中, a 和 γ 为关于 T_1 的实函数,将其代入(22)式,分离实部和虚部得极坐标下的平均方程

$$\begin{aligned} \frac{da}{dT_1} &= -(\alpha + d_1\sin\tau_1 - d_2\cos\tau_2)a/2 \\ & - 3\alpha\beta a^3/8 + k\sin(2\gamma)/4 \\ & - (f\sin\gamma)/2, \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} a \frac{d\gamma}{dT_1} &= (\sigma - (d_1\cos\tau_1 + d_2\sin\tau_2)/2)a \\ & + 1/4 \cdot k\alpha\cos(2\gamma) - 1/2 \cdot f\cos\gamma. \end{aligned} \quad (24)$$

在稳态情况下, $\frac{da}{dT_1} = \frac{d\gamma}{dT_1} = 0$, 即

$$\begin{aligned} 1/4 \cdot k\sin(2\gamma) - f/2a \cdot \sin\gamma &= \alpha_e/2 + 3\alpha\beta a^2/8, \\ 1/4 \cdot k\cos(2\gamma) - f/2a \cdot \cos\gamma &= -\sigma_e. \end{aligned} \quad (25)$$

这里 $\alpha_e = \alpha + d_1\sin\tau_1 - d_2\cos\tau_2$, $\sigma_e = \sigma - (d_1\cos\tau_1 + d_2\sin\tau_2)/2$.

约去(25)式中 $\sin(2\gamma)$, $\sin\gamma$, $\cos(2\gamma)$, $\cos\gamma$ 项得到分岔响应方程

$$8a^2N^2/kf^2 - 2N/k - k/4 + \sigma_e = 0, \quad (26)$$

其中, $N = k^2/16 + f^2/4a^2 - \sigma_e^2 - (\alpha_e/2 + 3\alpha\beta a^2/8)^2$.

4. 奇异稳定性分析

4.1. 转迁集与分岔结构

应用奇异性理论^[28]分析系统定常解的局部稳定性,得到分岔解的拓扑结构.由(26)式可得

$$\begin{aligned} & \frac{81}{512}\alpha^4\beta^4a^{10} + \frac{27}{32}\alpha_e\alpha^3\beta^3a^8 \\ & + \left(\frac{9}{8}\alpha_e^2\alpha^2\beta^2 - \frac{9}{4}K_L\alpha^2\beta^2\right)a^6 \\ & - \left(6\alpha_e\alpha\beta K_L + \frac{9}{32}\alpha^2\beta^2f^2\right)a^4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & + \left(8K_L^2 - \frac{3}{4}\alpha_e\alpha\beta f^2\right)a^2 + 2K_Lf^2 \\ & - \frac{1}{4}k^2f^2 + \sigma_e kf^2 = 0, \end{aligned} \quad (27)$$

其中, $K_L = \frac{1}{16}k^2 - \sigma_e^2 - \frac{1}{4}\alpha_e^2$.

将(27)式改写为下列形式

$$l_0h^5 + l_1h^4 + l_2h^3 + l_3h^2 + l_4h + l_5 = 0, \quad (28)$$

其中, $h = a^2$, $l_0 = \frac{81}{512}\alpha^4\beta^4$, $l_1 = \frac{27}{32}\alpha_e\alpha^3\beta^3$, $l_2 = \frac{9}{8}\alpha_e^2\alpha^2\beta^2 - \frac{9}{4}K_L\alpha^2\beta^2$, $l_3 = -6\alpha_e\alpha\beta K_L - \frac{9}{32}\alpha^2\beta^2f^2$, $l_4 = 8K_L^2 - \frac{3}{4}\alpha_e\alpha\beta f^2$, $l_5 = 2K_Lf^2 - \frac{1}{4}k^2f^2 + \sigma_e kf^2$.

对(28)式进行线性变换 $h = h' - \frac{l_1}{5l_0}$, 且令 $p_i =$

$\frac{l_i}{l_0}$ ($i = 1, 2, 3, 4, 5$), 可以转化为余维三分岔方程

$$h'^5 - \lambda + \delta_1h' + \delta_2h'^2 + \delta_3h'^3 = 0, \quad (29)$$

其中, $\lambda = -\frac{4p_1^5}{3125} + \frac{p_1^3p_2}{125} - \frac{p_1^2p_3}{25} + \frac{p_1p_4}{5} - p_5$, $\delta_1 = -\frac{2p_1^2}{5} + p_2$, $\delta_2 = \frac{4p_1^3}{25} - \frac{3p_1p_2}{5} + p_3$, $\delta_3 = -\frac{3p_1^4}{125} + \frac{3p_1^2p_2}{25} - \frac{2p_1p_3}{5} + p_4$.

(29)式可视为 $g = h'^5 - \lambda$ 的一个 3 参数普适开折 $G = h'^5 - \lambda + \delta_1h' + \delta_2h'^2 + \delta_3h'^3$. 奇异点是余维数为三的五次滞后点. 以下分三种情况分析它的平面分岔拓扑结构.

(1) $\delta_1 = 0$ 时,

(a) 分岔点集, $B = \{(0, \delta_2, \delta_3) \mid G = G_{h'} = G_\lambda = 0\} = \phi$;

(b) 滞后点集, $H = \{(0, \delta_2, \delta_3) \mid G = G_{h'} = G_{h'h'} = 0\} = \{(0, \delta_2, \delta_3) \mid \delta_2 + \delta_3 \sqrt{-\frac{\delta_3}{5}} = 0\}$;

(c) 双极限点集, $D = \phi$.

(2) $\delta_2 = 0$ 时,

(a) 分岔点集, $B = \{(\delta_1, 0, \delta_3) \mid G = G_{h'} = G_\lambda = 0\} = \phi$;

(b) 滞后点集, $H = \{(\delta_1, 0, \delta_3) \mid G = G_{h'} = G_{h'h'} = 0\} = \{(\delta_1, 0, \delta_3) \mid \delta_1 = \frac{9}{20}\delta_3^2\}$;

(c) 双极限点集, $D = \phi$.

(3) $\delta_3 = 0$ 时,

(a) 分岔点集, $B = \{(\delta_1, \delta_2, 0) \mid G = G_{h'} = G_\lambda = 0\} = \phi$;

(b) 滞后点集, $H = \{(\delta_1, \delta_2, 0) \mid G = G_{h'} = G_{h'h'} = 0\} = \left\{(\delta_1, \delta_2, 0) \mid \delta_1 = \frac{3}{2}\delta_2 \sqrt[3]{\frac{\delta_2}{10}}\right\}$;

(c) 双极限点集, $D = \phi$.

由于篇幅原因, 但又不失一般性, 仅考虑第(2)种情况, 即 $\delta_2 = 0$ 的转迁集与分岔图. 转迁集 $\Sigma = B \cup H \cup D$ 将开折参数平面 δ_1 - δ_3 划分为 3 个区域, 如图 1 所示.

根据奇异性理论, 不同区域中代表分岔响应曲线解的拓扑结构是不同的. 但是在同一区域中, 参数即使发生微小的变化, 其分岔图拓扑结构也保持不变; 而转迁集上的分岔图在参数受到小扰动时,

会改变其分岔拓扑结构. 3 个区域的拓扑结构如图 2 所示.

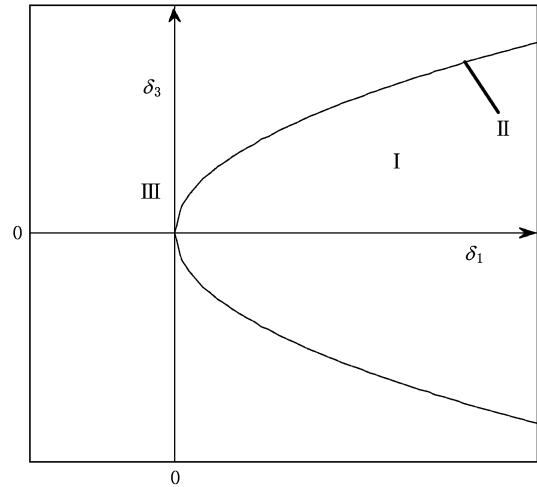


图 1 参数的转迁集

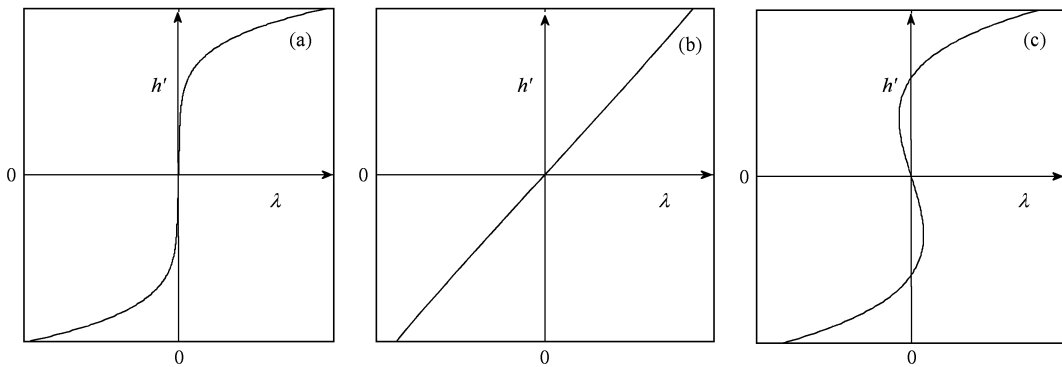


图 2 分岔曲线的拓扑结构 (a) 区域 I, (b) 区域 II, (c) 区域 III

4.2. 分岔控制

由图 2 可以看出在区域 I 没有极限点和鞍结分岔, 即分岔曲线不会发生跳跃和滞后现象, 由此可知, 只要将系统的参数选择在区域 I, 便不会发生鞍结分岔、跳跃和滞后现象. 而此控制系统中的 α_e, σ_e 参数是可调参数, 如果原系统参数落在区域 III 上, 那么通过调节 α_e, σ_e , 即调节 d_1, d_2, τ_1, τ_2 , 可使此系统参数控制在区域 I 上.

为了研究对原系统的分岔控制, 首先对原系统的分岔性质进行研究. 计算所选参数为 $\alpha = 1.1, \beta = 0.1, k = 1$, 图 3(a) 中调谐参数 $\sigma = -0.5$, 图 3(b) 中 $\sigma = 0.5$, 图 3(c) 中 $\sigma = 0$.

图 3 反映了激励幅值 f 与稳态响应幅值 a 的关

系. 由此可以看出, 当激励幅值增加到一定数值时, 系统发生动态失稳, 即发生超临界分岔或亚临界分岔. 图 3(a) 这种超临界分岔情形对于系统是非常有害的, 必须予以消除; 而如图 3(b) 和图 3(c) 发生的是亚临界分岔, 对该情况的控制主要是改变分岔点的位置, 保证系统在一定幅值范围内不发生亚临界分岔.

针对图 3(a) 中的分岔情形, 通过改变 d_1, d_2, τ_1, τ_2 的值, 即改变 α_e, σ_e 的值来消除超临界分岔. 本文例子中令 $\tau_1 = \pi/2, \tau_2 = \pi/2, d_2 = 0.5$, 通过改变 d_1 的值, 可达到控制要求. 如图 4 所示. 由图 4 可以看出, 随着 d_1 的增大, 超临界分岔消除: 即变成亚临界分岔, 继续增大 d_1 , 亚临界分岔点位置发生改变, 因此分岔控制要求得到满足.

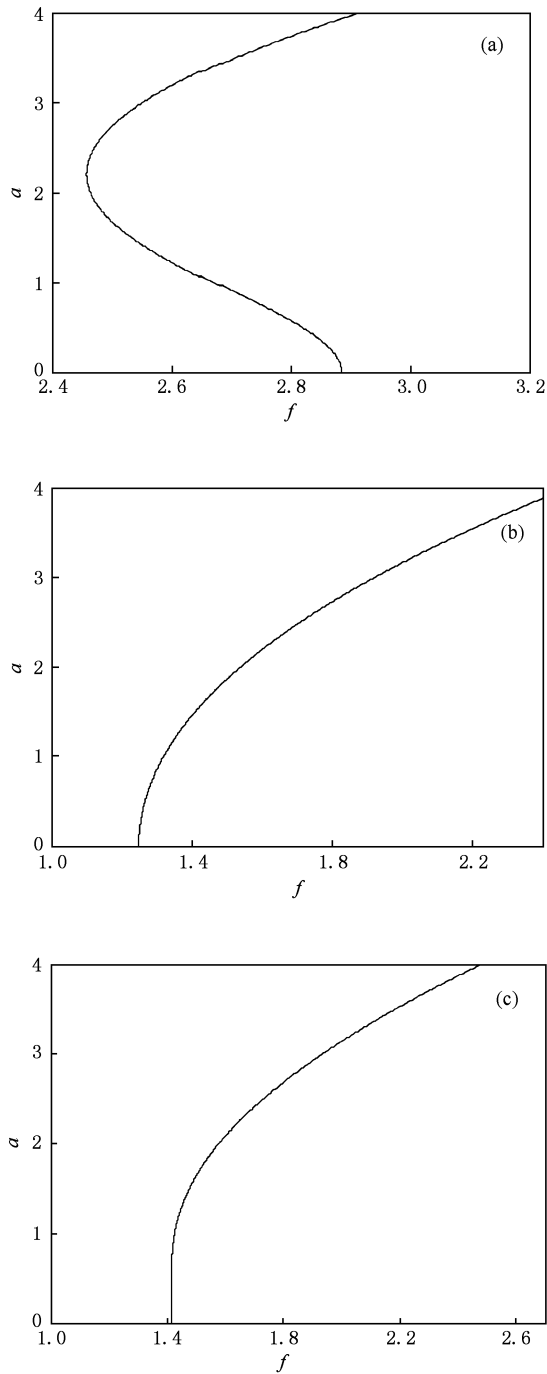


图3 不同 σ 值时激励幅值 f 与响应幅值 a 的关系曲线 (a) $\sigma = -0.5$, (b) $\sigma = 0.5$, (c) $\sigma = 0$

5. 动态稳定性分析

5.1. 极限环存在条件

在(22)式中令 $A = u + iv$, A 是关于 T_1 的复函

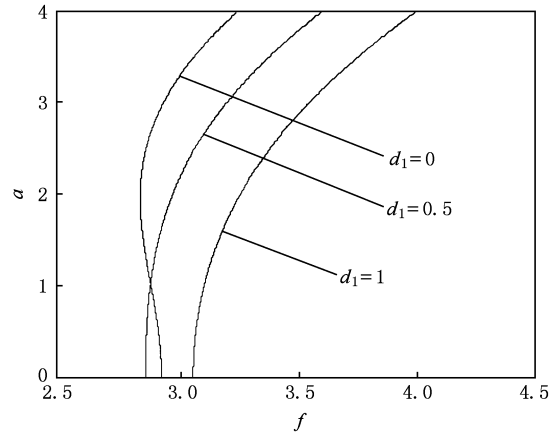


图4 d_1 取不同值时激励幅值 f 与响应幅值 a 关系曲线

数, u, v 为关于 T_1 的实函数, 则可得平均方程的直角坐标形式

$$\begin{aligned} \frac{du}{dT_1} &= -\frac{1}{2}\alpha_e u + \left(-\sigma_e + \frac{1}{4}k\right)v \\ &\quad - \frac{3}{2}\alpha\beta(u^3 + uv^2), \\ \frac{dv}{dT_1} &= \left(\sigma_e + \frac{1}{4}k\right)u - \frac{1}{2}\alpha_e v \\ &\quad - \frac{3}{2}\alpha\beta(u^2v + v^3) - \frac{1}{4}f. \end{aligned} \quad (30)$$

显然, (30) 式中常数项 $\frac{1}{4}f$ 只影响平衡点的位置, 而不会改变平衡点的分岔性质, 为此取 $f = 0$ 对其分岔性质进行分析.

当 $f = 0$ 时, 平衡点在原点 $(u, v) = (0, 0)$, 平均方程(30)的 Jacob 矩阵为

$$D_w F|_{(u,v)=(0,0)} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}\alpha_e & -\sigma_e + \frac{1}{4}k \\ \sigma_e + \frac{1}{4}k & -\frac{1}{2}\alpha_e \end{bmatrix}. \quad (31)$$

这里 $D_w = (u, v)^T$, 对应于零解的特征方程

$$\lambda^2 + \alpha_e \lambda + \frac{1}{4}\alpha_e^2 + \sigma_e^2 - \frac{1}{16}k^2 = 0. \quad (32)$$

上式特征值为 $\lambda_{1,2} = -\frac{1}{2}\alpha_e \pm i \sqrt{\sigma_e^2 - \frac{1}{16}k^2}$, 当 α_e

$= 0, \sigma_e^2 - \frac{1}{16}k^2 \neq 0$ 时, 方程(32)存在一对纯虚根

$\lambda_{1,2} = \pm i \sqrt{\sigma_e^2 - \frac{1}{16}k^2}$, 根据 Hopf 分岔定理, 该情况

系统产生极限环. 由于 α_e, σ_e 是时滞参数 $d_1, d_2, \tau_1,$

τ_2 的函数, 因此调节时滞参数可以控制极限环的状态.

5.2. 极限环幅值控制

通过对(32)式在平衡点的稳定性分析得到: 在 $\alpha_c = 0, \sigma_c^2 - \frac{1}{16}k^2 \neq 0$ 条件下系统存在一对纯虚根, 即在该情况下系统产生极限环. 由于参数 α_c, σ_c 由时滞参数 d_1, d_2, τ_1, τ_2 所确定, 因此通过改变时滞参数可以使极限环发生条件产生改变. 另外, 极限环幅值 a 由(27)式确定, (27)式系数中含有参数 α_c, σ_c , 即含有时滞参数 d_1, d_2, τ_1, τ_2 , 因此适当调节时滞参数可以控制极限环的幅值. 计算选取参数为 $\Omega = 1, \omega = 2, \alpha = 0.2, \beta = 0.1, k = 2, \sigma = 0.5, f = 3, \varepsilon = 0.1, \tau_1 = \pi/2, \tau_2 = \pi/2$.

令参数 $d_1 = 0, d_2 = 0$, 即原系统相图如图 5 (a) 所示; 在时滞反馈受控系统中固定时滞参数 $d_2 = 0.5$, 令 d_1 分别取 $-2, 1.5$ 和 4 , 所得相图分别对

应图 5(b) — (d).

由图 5 可以看出, 调节时滞项的参数, 可以改变极限环的幅值. 在这里给出了时滞动力系统稳定极限环的几种情况: 可以控制极限环幅值增大或减小, 这在实际工程中具有重要意义. 本文例子中所取 $\tau_1 = \pi/2, \tau_2 = \pi/2$ 只是满足分岔幅值控制要求的一种情况: 在图 5(a) 中, 时滞参数 $d_1 = 0, d_2 = 0$, 即原系统的极限环幅值为 4.5. 在图 5(b) 中, 时滞参数 $d_1 = -2, d_2 = 0.5$, 时滞系统的极限环幅值为 13.0, 可见通过选取时滞参数可以使极限环幅值增大. 当选取时滞参数 $d_1 = 1.5, d_2 = 0.5$ 时, 时滞系统的极限环幅值为 2.3; 当选取时滞参数 $d_1 = 4, d_2 = 0.5$ 时, 时滞系统的极限环幅值为 0.8, 如图 5 (c) 和 (d) 所示. 由图 5(b) — (d) 可以看出在固定时滞参数 d_2 的情况下, 随着 d_1 在一定范围内增加, 极限环幅值减小. 因此通过调节时滞参数, 可以实现时滞反馈受控系统极限环幅值的增大或减小.

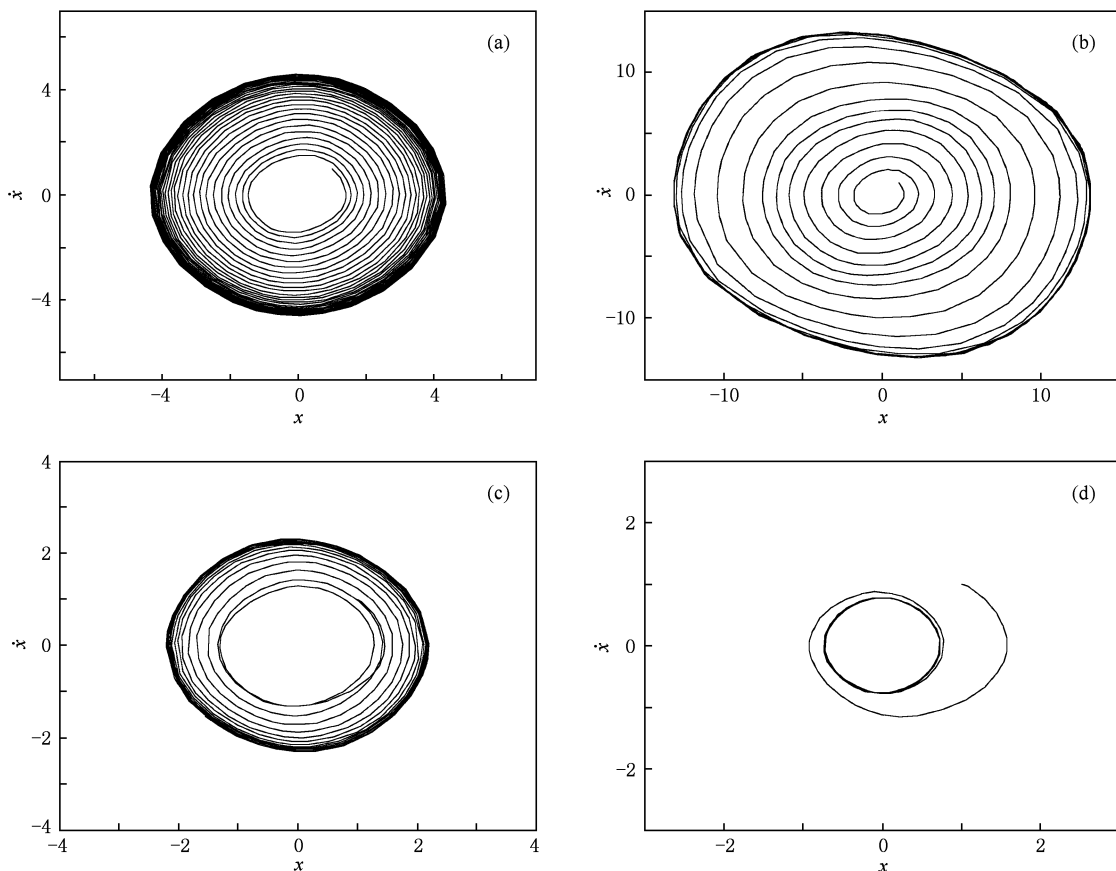


图 5 d_1, d_2 的取值与极限环幅值的关系 (a) $d_1 = 0, d_2 = 0$; (b) $d_1 = -2, d_2 = 0.5$; (c) $d_1 = 1.5, d_2 = 0.5$; (d) $d_1 = 4, d_2 = 0.5$

6. 结 论

应用具有耗散项的广义 Lagrange 方程建立了一类含时变刚度、非线性阻尼和谐波激励的时滞非线性动力学方程. 应用多尺度法推导出时滞动力系统的主共振分岔响应方程. 应用奇异性理论得到了

转迁集上不同区域分岔拓扑结构, 通过改变时滞参数可以改变分岔响应曲线, 还可以改变分岔点的位置. 应用 Hopf 分岔理论得到了发生极限环的条件, 用数值方法验证了改变时滞参数可以控制极限环幅值的大小. 这对工程中广泛存在的动力传动系统的动力学行为分析与控制具有理论意义和应用价值.

-
- [1] Carmeli M 1985 *Found. Phys.* **15** 175
- [2] Carmeli M 1986 *Inter. J. Theor. Phys.* **15** 89
- [3] Luo S K 1996 *J. Beijing Inst. Technol.* **16** (S1) 154 (in Chinese) [罗绍凯 1996 北京理工大学学报 **16**(S1) 154]
- [4] Luo S K 1998 *Appl. Math. Mech.* **19** 45
- [5] Luo S K, Fu J L, Chen X W 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 383 (in Chinese) [罗绍凯、傅景礼、陈向炜 2001 物理学报 **50** 383]
- [6] Fang J H 2000 *Acta Phys. Sin.* **49** 1028 (in Chinese) [方建会 2000 物理学报 **49** 1028]
- [7] Jia L Q 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 1039 (in Chinese) [贾利群 2003 物理学报 **52** 1039]
- [8] Dong Q L, Liu B 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 2191 (in Chinese) [董全林、刘 彬 2002 物理学报 **51** 2191]
- [9] Dong Q L, Liu B, Wang K, Zhang C X 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 337 (in Chinese) [董全林、刘 彬、王 坤、张春熹 2004 物理学报 **53** 337]
- [10] Zhao W, Liu B 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 4543 (in Chinese) [赵 武、刘 彬 2005 物理学报 **54** 4543]
- [11] Wang K 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 3987 (in Chinese) [王 坤 2005 物理学报 **54** 3987]
- [12] Shi P M, Liu B 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 3678 (in Chinese) [时培明、刘 彬 2007 物理学报 **56** 3678]
- [13] Meng Z, Liu B 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 6194 (in Chinese) [孟宗、刘 彬 2007 物理学报 **56** 6194]
- [14] Shi P M, Liu B, Hou D X 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 1312 (in Chinese) [时培明、刘 彬、侯东晓 2008 物理学报 **57** 1312]
- [15] Lu H T, He Z Y 1996 *IEEE Trans. Circuit. Sys.* **1** 43 700
- [16] Fischer I, Kühne H, Richter H 1994 *Phys. Rev. Lett.* **73** 2188
- [17] Belair J, Campbell S, van der Driessche P 1996 *J. Appl. Math.* **56** 245
- [18] Mo J Q, Lin W T, Zhu J 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 3245 (in Chinese) [莫嘉琪、林万涛、朱 江 2004 物理学报 **53** 3245]
- [19] Ji C J, Leung A Y T 2002 *Int. J. Sound Vib.* **253** 985
- [20] Qian C Z, Tang J S 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 617 (in Chinese) [钱长照、唐驾时 2006 物理学报 **55** 617]
- [21] Nbenjio B N, Tchoukuengno R, Wofo P 2003 *Chaos Soliton. Fract.* **18** 345
- [22] Fu W B, Tang J S 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 2889 (in Chinese) [符文彬、唐驾时 2004 物理学报 **53** 2889]
- [23] Shi P M, Liu B, Liu S 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 3321 (in Chinese) [时培明、刘 彬、刘 爽 2008 物理学报 **57** 3321]
- [24] El-Bassiouny A F 2003 *Appl. Math. Comput.* **134** 217
- [25] El-Bassiouny A F 2006 *Physica A* **366** 167
- [26] Nayfeh A H 1981 *Introduction to Perturbation Techniques* (New York: Academic) p46
- [27] Zhang W, Zu J W 2008 *Chaos Soliton. Fract.* **38** 1152
- [28] Shi P M, Liu B, Jiang J S 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 2147 (in Chinese) [时培明、刘 彬、蒋金水 2009 物理学报 **58** 2147]

Stability analysis of a relative rotation time-delay nonlinear dynamic system^{*}

Liu Hao-Ran^{1) †} Zhu Zhan-Long²⁾ Shi Pei-Ming²⁾

1) (*Institute of Information Technology and Engineering, Yanshan University, Qinhuangdao 066004, China*)

2) (*Institute of Electrical Engineering, Yanshan University, Qinhuangdao 066004, China*)

(Received 8 December 2009; revised manuscript received 29 January 2010)

Abstract

The dynamic equation of a relative rotation time-delay nonlinear dynamic system is established, which contains time-varying stiffness, nonlinear damping and harmonic excitation. The bifurcation equation of time-delay dynamic system is deduced by the method of multiple scales. The structure stability of the system is studied by singularity theory, the transfer concourse of primary resonance equation and topological structure of bifurcation function are obtained. The dynamic stability of the system is discussed by the Hopf bifurcation theory and the condition for the limit cycle occurrence is given. Moreover, it is indicated by numerical method that parameters of time delay affect the limit cycle amplitude.

Keywords: relative rotation, time-delay dynamic system, stability, limit cycle

PACC: 0340D, 0313

^{*} Project supported by the Development Program Plan of the Major Technological Equipment of Equipment China (Grant No. ZZ02-13B-02-03-1) and the Natural Science Foundation of Hebei Province, China (Grant No. F2010001317, E2010001262).

[†] E-mail: liuhaoran1980@163.com