mKdV-sine-Gordon 方程丰富的相互作用解*

吕大昭[1)†] 崔艳英[2)] 刘长河[1)] 张 艳[1)]

1)(北京建筑工程学院理学院，北京 100044)

2)(北京工业大学耿丹学院基础部，北京 101301)

(2009 年 10 月 30 日收到;2010 年 1 月 6 日收到修改稿)

基于 mKdV-sine-Gordon 方程的 Wronsk 解的形式和结构，提出了 Wronsk 形式展开法，通过这一方法求得了该方程的丰富的相互作用解，该方法的主要特征是不要求 Wronsk 行列式元素满足线性偏微分方程组。

关键词: mKdV-sine-Gordon 方程，Wronsk 技巧，相互作用解，Jacobi 椭圆函数

PACC: 0340K, 0290

1. 引 言

直接寻找孤子方程的精确解长期以来一直是非线性科学研究中的重要内容之一. 为了寻找精确解，人们发展了许多有效的方法，如反散射变换[1]、Bäcklund 变换[2]、双线性方法[3]和 Wronsk 技巧[4—5]等. 其中，Wronsk 技巧是一种直接与高效的方法. 它最大的优点是：多孤子解能够直接代入双线性方程或双线性 Bäcklund 变换中进行验证. 同时，缺点也很明显：要求 Wronsk 行列式元素满足特定的线性偏微分方程组. 另一方面，人们经常求单周期孤子解，或单周期解之间的多孤子解与混合解[6—8]，却很少有人求单周期孤子解和双周期(椭圆函数)解之间的相互作用解，或双周期(椭圆函数)解之间的相互作用解. 尽管我们知道单周期孤子解是双周期(椭圆函数)解的一种极限情形，但是求这样的解仍然是非常困难的. 到目前为止，还没有一个有效的方法求得这样的解.

本文基于 mKdV-sine-Gordon 方程的 Wronsk 解的形式和结构，提出了 Wronsk 形式展开法，利用这一方法求得了该方程的丰富的单周期孤子解和双周期(椭圆函数)解之间的相互作用解，以及双周期(椭圆函数)解之间的相互作用解. 并且，该方法还不要求 Wronsk 行列式元素满足任何线性偏微分方程组.

2. Wronsk 形式展开法和 mKdV-sine-Gordon 方程的丰富的相互作用解

mKdV-sine-Gordon 方程[9—13]为

$$u_{xt} + A\left(\frac{3}{2}u_x^2 u_{xx} + u_{xxxx}\right) = B\sin u$$

$$(A,\ B \in R). \tag{1}$$

它可以表示 3 个不同的方程，即

(1)当 $A = 0$, $B = 1$ 时，它表示 sine-Gordon 方程为

$$u_{xt} = \sin u;$$

(2)当 $A = 1$, $B = 0$, $u_x = 2v$ 时，它表示 mKdV 方程为

$$v_t + v_{xxx} + 6v^2 v_x = 0;$$

(3)当 $A = B = 1$ 时，它表示一维原子格点方程[11]为

$$u_{xt} + \frac{3}{2}u_x^2 u_{xx} + u_{xxxx} = \sin u.$$

mKdV-sine-Gordon 方程(1)在变换

$$u = 2\mathrm{i}\ln\frac{f^*}{f} \tag{2}$$

下，可以写成双线性形式

$$(D_x D_t + AD_x^4)f\cdot f - \frac{1}{2}B(f^2 - f^{*2}) = 0,$$

$$D_x^2 f\cdot f^* = 0,$$

其中 f^* 表示 f 的共轭，D 表示 Hirota 双线性算子[3]

---

* 北京建筑工程学院青年教师科学基金(批准号：100602707)资助的课题.

† E-mail: lvdazhao86@yahoo.cn

$$D_x^m D_t^n(a\cdot b)\equiv\left(\frac{\partial}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial x'}\right)^m\left(\frac{\partial}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial t'}\right)^n a(x,t)b(x',t')\Big|_{\substack{x=x'\\ t=t'}}.$$

如果

$$\begin{aligned}f&=(\widehat{N-1})\\&=W(\phi_1,\phi_2,\cdots,\phi_N)\\&=\begin{vmatrix}\phi_1&\phi_1^{(1)}&\cdots&\phi_1^{(N-1)}\\ \cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\ \phi_N&\phi_N^{(1)}&\cdots&\phi_N^{(N-1)}\end{vmatrix},\end{aligned}\tag{3}$$

其中 $\phi_i^{(j)}=\dfrac{\partial^j}{\partial x^j}\phi_i$, $j\geqslant 1$, $(1\leqslant i\leqslant N)$. 且 $\phi_i(1\leqslant i\leqslant N)$ 满足线性偏微分方程组[13]：

$$\phi_{i,xx}=\frac{1}{4}k_i^2\phi_i,$$

$$\phi_{i,tt}=-4A\phi_{i,xxxx}+\frac{1}{4}B\phi_i,\tag{4a}$$

或

$$\phi_{i,x}=-\frac{1}{2}k_i\phi_i^*,$$

$$\phi_{i,t}=-4A\phi_{i,xxx}+\frac{1}{4}B\partial^{-1}\phi_i.\tag{4b}$$

那么,$u=2\mathrm{i}\ln\dfrac{f^*}{f}$ 是 mKdV-sine-Gordon 方程 (1) 的解,其中 k_i 是实常数.

一般地,线性偏微分方程组 (4) 的解的形式为

$$\phi_i=\mathrm{i}\exp(\xi_i/2)+(-1)^{i-1}\exp(-\xi_i/2),$$

$$\xi_i=k_ix-(Ak_i^3-Bk_i^{-1})t+\gamma_i\quad(k_i,\ \gamma_i\in R).$$

特殊地,取 $N=2$,$f=p+\mathrm{i}q$, 则 mKdV-sine-Gordon 方程 (1) 的一个解为

$$\begin{aligned}u&=2\mathrm{i}\ln\frac{f^*}{f}=4\arctan\frac{q}{p}\\&=4\arctan\frac{(k_1+k_2)\cosh\xi_1}{(k_1-k_2)\sinh\xi_2},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\xi_1&=\frac{1}{2}(k_2-k_1)x\\&\quad+\frac{1}{2}(Ak_1^3-Ak_2^3+Bk_2^{-1}-Bk_1^{-1})t\\&\quad+\frac{1}{2}(\gamma_2-\gamma_1),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\xi_2&=\frac{1}{2}(k_2+k_1)x\\&\quad+\frac{1}{2}(-Ak_1^3-Ak_2^3+Bk_2^{-1}+Bk_1^{-1})t\\&\quad+\frac{1}{2}(\gamma_2+\gamma_1).\end{aligned}$$

然而,如果取

$$\begin{aligned}\phi_1&=dn\xi_1,\\ \phi_2&=\sinh(\xi_2+\theta\mathrm{i}),\\ \xi_i&=k_ix+l_it\qquad(i=1,2),\end{aligned}\tag{5}$$

其中 $\mathrm{dn}\xi_1\equiv\mathrm{dn}(\xi_1,m)$ 是模数为 m 的 Jacobi 椭圆函数,θ 是任意实常数,那么

$$\begin{aligned}u'&=2\mathrm{i}\ln\frac{f^*}{f}\\&=4\arctan\frac{q}{p}\\&=4\arctan\frac{\sin\theta(m^2k_1\mathrm{sn}\xi_1\mathrm{cn}\xi_1\cosh\xi_2+k_2\mathrm{dn}\xi_1\sinh\xi_2)}{\cos\theta(m^2k_1\mathrm{sn}\xi_1\mathrm{cn}\xi_1\sinh\xi_2+k_2\mathrm{dn}\xi_1\cosh\xi_2)},\\ \xi_i&=k_ix+l_it\qquad(i=1,2).\end{aligned}\tag{6}$$

就不是 mKdV-sine-Gordon 方程 (1) 的一个解. 原因是所取的 Jacobi 椭圆函数 $\mathrm{dn}\xi_1$ 不满足线性偏微分方程组 (4).

虽然 (6) 式中的 u' 不是 mKdV-sine-Gordon 方程 (1) 的一个解,但是仍可以利用它的形式和结构. 即可以假设 mKdV-sine-Gordon 方程 (1) 具有与 (6)式相对应的 Wronsk 形式解

$$\begin{aligned}u&=4\arctan\frac{a_1\mathrm{sn}\xi_1\mathrm{cn}\xi_1\cosh\xi_2+a_2\mathrm{dn}\xi_1\sinh\xi_2}{b_1\mathrm{sn}\xi_1\mathrm{cn}\xi_1\sinh\xi_2+b_2\mathrm{dn}\xi_1\cosh\xi_2},\\ \xi_i&=k_ix+l_it\qquad(i=1,2).\end{aligned}\tag{7}$$

其中 a_i,b_i,k_i 和 $l_i(i=1,2)$ 待定.

我们这样假设的目的是:在各项系数经过适当的调整之后, 希望 (7) 式中的 u 是 mKdV-sine-Gordon 方程 (1) 的解.

现在把 (7) 式代入到 (1) 式,可以得到一个关于 Jacobi 椭圆函数和双曲函数的方程,然后进行约化,合并同幂次项,最后令其系数为零,则获得了一个超定代数方程组,利用吴消元法[14]解此超定代数方程组,得到 k_i,l_i, a_i 和 $b_i(i=1,2)$ 的值,把该值代入到 (7) 式,就能获得丰富的单周期孤子解和双周期(椭圆函数)解之间的相互作用解.

$$\begin{aligned}u_1&=4\arctan\frac{m\mathrm{sn}\xi_1\mathrm{cn}\xi_1\cos\xi_2+\mathrm{dn}\xi_1\sin\xi_2}{m\mathrm{sn}\xi_1\mathrm{cn}\xi_1\sin\xi_2+\mathrm{dn}\xi_1\cos\xi_2},\\ \xi_1&=k_1x+(-8Ak_1^3+4Am^2k_1^3-(4m^2k_1)^{-1}B)t,\\ \xi_2&=\sqrt{1-m^2}(-k_1x+(8Ak_1^3+4Am^2k_1^3\\&\quad-(4m^2k_1)^{-1}B)t).\end{aligned}$$

以及行波解

$$u_2=-4\arctan\frac{\mathrm{dn}\xi}{m\mathrm{sn}\xi\mathrm{cn}\xi},$$

$$\xi = -kx + (8Am^2k^3 - 4Ak^3 + (4k)^{-1}B)t.$$

相似的，如果取

$$\phi_1 = 1 + \mathrm{dn}\xi_1,$$

$$\phi_2 = \sin(\xi_2 + \theta\mathrm{i}),$$

利用上面的步骤，得到

$$u_3 = 4\arctan\frac{(\mathrm{dn}\xi_1 + \sqrt[4]{1-m^2})\sin\xi_2}{(\mathrm{dn}\xi_1 - \sqrt[4]{1-m^2})\cos\xi_2},$$

$$\xi_1 = -k_1x + (-4Ak_1^3 + 2Am^2k_1^3 + (4k_1\sqrt{1-m^2})^{-1}B)t,$$

$$\xi_2 = \frac{1}{2}\sqrt{m^2 - 2 + 2\sqrt{1-m^2}}\left(-k_1x + \left(2Ak_1^3(m^2-2) + \frac{8Ak_1^4(m^2-1) - B/4}{k_1\sqrt{1-m^2}}\right)t\right);$$

$$u_4 = 4\arctan\frac{\sqrt[4]{1-m^2}\sin\xi_2}{\cos\xi_2\mathrm{dn}\xi_1},$$

$$\xi_1 = -k_1x + \frac{4Ak_1^4\sqrt{1-m^2}(m^2-2) - Ak_1^4(m^4+8m^2-8) + B}{k_1(m^2-2+2\sqrt{1-m^2})}t,$$

$$\xi_2 = \sqrt[4]{1-m^2}\left(k_1x + \frac{4Ak_1^4\sqrt{1-m^2}(m^2-2) + Ak_1^4(3m^4-8m^2+8) + B}{k_1(m^2-2+2\sqrt{1-m^2})}t\right)$$

如果取

$$\phi_1 = 1 + \mathrm{sn}\xi_1,$$
$$\phi_2 = \sinh(\xi_2 + \theta\mathrm{i})$$

得

$$u_5 = 4\arctan\frac{(\sqrt{m}\mathrm{sn}\xi_1 + 1)\sinh\xi_2}{(\sqrt{m}\mathrm{sn}\xi_1 - 1)\cosh\xi_2},$$

$$\xi_1 = k_1x + (Ak_1^3(m^2 - 6m + 1) + k_1^{-1}(1+m)^{-2}B)t,$$

$$\xi_2 = \frac{1}{2}(1-m)(k_1x - (Ak_1^3(m^2 + 10m + 1) + k_1^{-1}(1+m)^{-2}B)t).$$

图 1(a)和(b)分别画出了解 u_1, u_5 在参数选取为 $A = B = k_1 = 1$，网格为 60×60 下的结构.

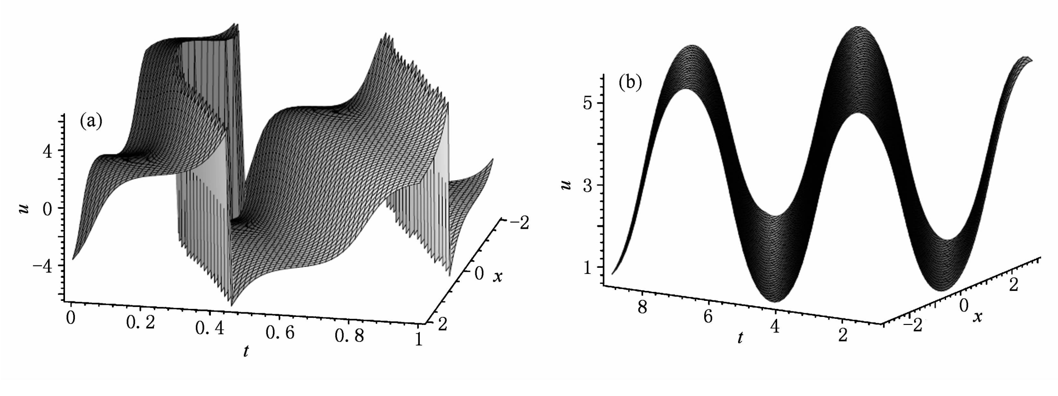

图 1　解 u_1, u_5 的结构　(a) $u_1: m = 0.9$，(b) $u_5: m = 0.5$

若取

$$\phi_1 = 1 + \mathrm{dn}\xi_1,$$
$$\phi_2 = \sinh(\xi_2 + \theta\mathrm{i}),$$

则有

$$u_6 = 4\arctan\frac{\sqrt[4]{1-m^2}\sinh\xi_2}{\cosh\xi_2\mathrm{dn}\xi_1},$$

$$\xi_1 = -k_1x + \frac{4Ak_1^4\sqrt{1-m^2}(m^2-2) + Ak_1^4(m^4+8m^2-8) - B}{k_1(2-m^2+2\sqrt{1-m^2})}t,$$

$$\xi_2 = \sqrt[4]{1-m^2}\left(k_1x + \frac{4Ak_1^4\sqrt{1-m^2}(2-m^2) + Ak_1^4(3m^4-8m^2+8) + B}{k_1(m^2-2-2\sqrt{1-m^2})}t\right).$$

一般地,如果取

$$\phi_1 = 1 + \mathrm{dn}(\xi_1, m_1),$$
$$\phi_2 = \mathrm{dn}(\xi_2 + \theta\mathrm{i}, m_2),$$

则得到

$$u_7 = 4\arctan\frac{\mathrm{dn}(\xi_2, m_2)\ \mathrm{dn}(\xi_1, m_1)}{m_2\sqrt[4]{1-m_1^2}\,\mathrm{sn}(\xi_2, m_2)\mathrm{cn}(\xi_2, m_2)},$$

$$\xi_1 = \frac{m_2}{\sqrt[4]{1-m_1^2}}\left(k_2x - \frac{k_2^{-1}(\alpha_1+\beta_1+B-Bm_1^2)t}{m_2^2\sqrt{1-m_1^2}(m_1^2-2) - 2(2-m_2^2)(1-m_1^2)}\right),$$

$$\alpha_1 = 4Am_2^2k_2^4\sqrt{1-m_1^2}(2-m_2^2)(2-m_1^2),$$

$$\beta_1 = Ak_2^4(8(1-m_1^2)(m_2^4-6m_2^2+6) - m_1^4m_2^4),$$

$$\xi_2 = k_2x + \frac{k_2^{-1}(\alpha_2+\beta_2+B-Bm_1^2)t}{m_2^2\sqrt{1-m_1^2}(m_1^2-2) - 2(2-m_2^2)(1-m_1^2)},$$

$$\alpha_2 = 4Am_2^2k_2^4\sqrt{1-m_1^2}(2-m_2^2)(2-m_1^2),$$

$$\beta_2 = Ak_2^4(8(1-m_1^2)(m_2^4+2m_2^2-2) + 3m_1^4m_2^4);$$

和

$$u_8 = -4\arctan\frac{\mathrm{dn}(\xi_2, m_2)\ (\mathrm{dn}(\xi_1, m_1) + \sqrt[4]{1-m_1^2})}{m_2\mathrm{sn}(\xi_2, m_2)\mathrm{cn}(\xi_2, m_2)(\mathrm{dn}(\xi_1, m_1) - \sqrt[4]{1-m_1^2})},$$

$$\xi_1 = k_1x + \frac{k_1^{-1}m_2^{-2}(\alpha_1+\beta_1+Bm_2^4)t}{\sqrt{1-m_1^2}(4m_2^2-2) + 2 - m_1^2},$$

$$\alpha_1 = 4Ak_1^4\sqrt{1-m_1^2}(2m_2^4-4m_2^2+3)(m_1^2-2),$$

$$\beta_1 = -Ak_1^4(2m_1^4m_2^2 - 3m_1^4 - 32m_1^2m_2^2 + 24m_1^2 + 32m_2^2 - 24),$$

$$\xi_2 = \frac{1}{2}\sqrt{m_1^2-2+2\sqrt{1-m_1^2}}\left(-\frac{k_1x}{m_2} + \frac{k_1^{-1}m_2^{-3}(\alpha_2+\beta_2-Bm_2^4)t}{\sqrt{1-m_1^2}(4m_2^2-2) + 2 - m_1^2}\right),$$

$$\alpha_2 = 4Ak_1^4\sqrt{1-m_1^2}(1+2m_2^4)(m_1^2-2),$$

$$\beta_2 = -Ak_1^4(2m_2^2-1)(m_1^4 - 16m_1^2m_2^2 - 8m_1^2 + 16m_2^2 + 8).$$

若取

$$\phi_1 = 1 + \mathrm{sn}(\xi_1, m_1),$$
$$\phi_2 = \mathrm{sn}(\xi_2 + \theta\mathrm{i}, m_2),$$

则得

$$u_9 = 4\arctan\frac{\sqrt{1-m_2^2}\,\mathrm{sn}(\xi_2, m_2)(\sqrt{m_1}\,\mathrm{sn}(\xi_1, m_1) - 1)}{\mathrm{cn}(\xi_2, m_2)\mathrm{dn}(\xi_2, m_2)(\sqrt{m_1}\,\mathrm{sn}(\xi_1, m_1) + 1)},$$

$$\xi_1 = k_1x + \left(\frac{Ak_1^3((2+m_2^2)(1+m_1^2) - 6m_1m_2^2)}{m_2^2-1} + \frac{Bk_1^{-1}(m_2^2-1)}{m_2^2(1+m_1)^2 - 4m_1}\right)t,$$

$$\xi_2 = \frac{1-m_1}{2\sqrt{1-m_2^2}}\left(k_1 x - \left(\frac{Ak_1^3\alpha_2}{m_2^2-1} + \frac{Bk_1^{-1}(m_2^2-1)}{m_2^2(1+m_1)^2-4m_1}\right)t\right),$$

$$\alpha_2 = (m_2^2-2)(m_1^2+10m_1+1)+12m_1.$$

图 2(a)和(b)分别画出了解 u_7,u_9 在参数选取为 $A = B = k_1 = k_2 = 1$,网格为 60×60 下的结构.

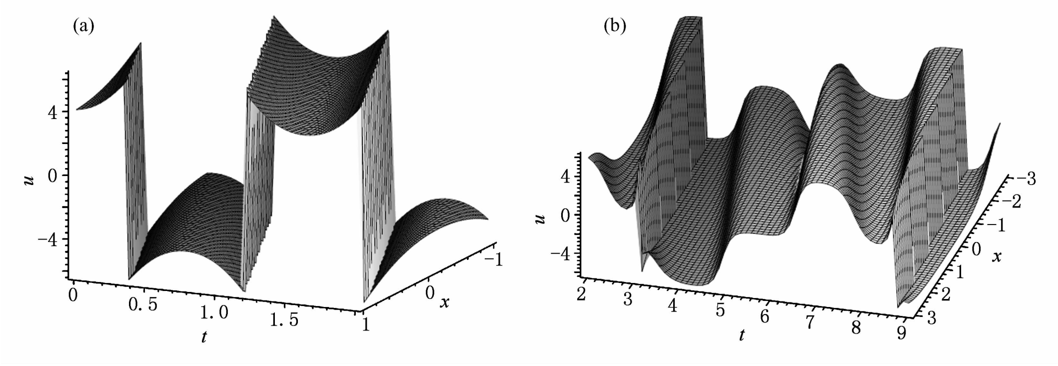

图 2　解 u_7,u_9 的结构　(a) u_7:$m_1 = 0.1$,$m_2 = 0.9$;(b) u_9:$m_1 = 0.9$,$m_2 = 0.1$

事实上,在该方法中,也可以取其他类型的函数得到其他类型的相互作用解,限于篇幅,省略了许多表达式较长的相互作用解;而且也可以取高阶 Wronsk 形式解,但在利用吴消元法解超定代数方程组时,可能计算量较大. 另外,除 u_2 也可以用其他的方法获得外,其余的解都是以前文献中未曾出现的新解,并且用以前文献中出现的方法[1—13, 15—17]很难获得我们这样的新的相互作用解.

3. 结　　论

基于 mKdV-sine-Gordon 方程的 Wronsk 解的形式和结构,提出了 Wronsk 形式展开法,利用这一方法求得了该方程的丰富的单周期孤子解和双周期(椭圆函数)解之间的相互作用解,以及双周期(椭圆函数)解之间的相互作用解. 而且,该方法还不要求 Wronsk 行列式元素满足特定的线性偏微分方程组.

感谢北京建筑工程学院理学院傅钰的热心帮助.

[1] Ablowitz M J, Clarkson P A 1991 *Soliton, Nonlinear Evolution Equations and Inverse Scattering* (Cambridge: Cambridge University Press)

[2] Miura R M 1978 *Bäcklund Transformation* (Berlin: Springer)

[3] Hirota R 2004 *Direct Method in Soliton Theory* (Cambridge: Cambridge University Press)

[4] Freeman N C, Nimmo J J C 1983 *Phys. Lett.* A **95** 1

[5] Nimmo J J C, Freeman N C 1983 *Phys. Lett.* A **95** 4

[6] Ma W X, You Y C 2005 *Trans. Amer. Math. Soc.* **357** 1753

[7] Chen D Y, Zhang D J, Bi J B 2007 *Sci. Chin. Ser.* A **37** 1335 (in Chinese)[陈登远、张大军、毕金钵 2007 中国科学 A 辑 **37** 1335]

[8] Ma W X 2002 *Phys. Lett.* A **301** 35

[9] Zhang D J, Deng S F, Chen D Y 2004 *Acta Math. Sci.* **24**A 257 (in Chinese)[张大军、邓淑芳、陈登远 2004 数学物理学报 **24**A 257]

[10] Gu C H 1986 *Lett. Math. Phys.* **12** 31

[11] Konno K, Kameyama W, Sanuki H 1974 *J. Phys. Soc. Jpn.* **37** 171

[12] Chen D Y, Zhang D J, Deng S F 2002 *J. Phys. Soc. Jpn.* **71** 658

[13] Zhang D J, Deng S F 2002 *J. Shanghai Univ.* (Nat. Sci.) **8** 232 (in Chinese)[张大军、邓淑芳 2002 上海大学学报(自然科学版) **8** 232]

[14] Wang D M 2001 *Elimination Methods* (New York: Springer-Verlag Wien)

[15] Liu S K, Fu Z T, Liu S D, Zhao Q 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 2068 (in Chinese)[刘式适、傅遵涛、刘式达、赵 强 2001 物理学报 **50** 2068]

[16] Guo G P, Zhang J F 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 1159 (in Chinese)[郭冠平、张解放 2002 物理学报 **51** 1159]

[17] He F, Guo Q B, Liu L 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 4326 (in Chinese)[贺 锋、郭启波、刘 辽 2007 物理学报 **56** 4326]

Abundant interaction solutions of the mKdV-sine-Gordon equation*

Lü Da-Zhao[1)†] Cui Yan-Ying[2)] Liu Chang-He[1)] Zhang Yan[1)]

1)(*School of Science, Beijing University of Civil Engineering and Architecture, Beijing* 100044, *China*)

2)(*Department of Basic Science, Gengdan Institute of Beijing University of Technology, Beijing* 101301, *China*)

(Received 30 October 2009; revised manuscript received 6 January 2010)

Abstract

In this paper, based on the forms and structures of Wronskian solutions of the mKdV-sine-Gordon equation, a Wronskian form expansion method is presented to find abundant interaction solutions of the mKdV-sine-Gordon equation. One characteristic of the method is that Wronskian entries don't satisfy linear partial differential equations.

Keywords: mKdV-sine-Gordon equation, Wronsk technique, interaction solutions, Jacobi elliptic function

PACC: 0340K, 0290

* Project supported by the Young Teachers Science Foundation of Beijing University of Civil Engineering and Architecture, China (Grant No. 100602707).

† E-mail: lvdazhao86@yahoo.cn