

# Schwinger Bose 实现下自旋相干态 Wigner 函数的特性分析\*

宋 军<sup>1)2)†</sup> 范洪义<sup>1)</sup>

1) (中国科学技术大学材料科学与工程系, 合肥 230026)

2) (皖西学院数理系, 六安 237012)

(2009 年 11 月 12 日收到; 2009 年 12 月 14 日收到修改稿)

在 Schwinger Bose 实现下, 引入纠缠态表象及 Wigner 算符在该表象下的表示, 得到自旋相干态的 Wigner 函数, 数值计算画出相空间中 Wigner 函数的分布图, 并加以分析, 发现在 Schwinger Bose 实现下自旋相干态确实体现出纠缠特性.

**关键词:** 自旋相干态, Schwinger Bose 实现, Wigner 函数, 纠缠态表象

**PACC:** 0365, 4250

## 1. 引 言

对量子态进行测量, 是量子力学与量子光学领域中的一个重要课题, 也是获得量子系统在演化过程中的信息的重要手段; 量子态的 Wigner 函数是一个极其重要的实函数<sup>[1]</sup>, 它是相空间中的准概率分布, 反映了该量子态在整个相空间演化过程中的重要信息, 因此量子态的演化可以用它对应的 Wigner 函数来描述; 在 Kurtsiefer, Pfau 和 Mlynek 进行的测量量子态的实验工作中, 就是测量与波函数 (或密度矩阵) 相关的 Wigner 函数<sup>[2]</sup>. 故此, 量子态 Wigner 函数的重构和测量对研究量子体系的演化过程有着重要的意义. 目前, 在理论和实验上, 人们已提出了多种重构和测量量子态 Wigner 函数的方法<sup>[3-9]</sup>, 如光学零拍层析法、光子计数法等, 极大地激发了物理学工作者的研究兴趣.

自旋相干态 (也称原子相干态或者 Bloch 态) 已被成功地应用于物理学的许多分支<sup>[10-14]</sup>. 本文将在自旋相干态的 Schwinger Bose 实现下, 引入纠缠态表象及 Wigner 算符在此表象下的表示, 得到自旋相干态的 Wigner 函数解析式, 通过数值计算, 画出相空间中 Wigner 函数的分布图, 并加以分析, 发现在

Schwinger Bose 实现下自旋相干态确实体现出纠缠特性.

## 2. 自旋相干态的双模 Fock 空间表示

自旋相干态定义为<sup>[10-14]</sup>

$$|\tau\rangle = \exp(\mu J_+ - \mu^* J_-) |j, -j\rangle \\ = (1 + |\tau|^2)^{-j} \exp(\tau J_+) |j, -j\rangle, \quad (1)$$

式中  $J_+, J_-$  是角动量的升、降算符, 满足对易关系  $[J_+, J_-] = 2J_z$ ,  $[J_\pm, J_z] = \mp J_\pm$ ,  $|j, m\rangle$  定义为  $J_z$  与  $J^2$  ( $J$  为总角动量算符) 的共同本征态,

$$J^2 |j, m\rangle = j(j+1) |j, m\rangle, J_z |j, m\rangle = m |j, m\rangle, \quad (2)$$

$j$  是角动量量子数, 它可以是 0 或正的整数或半整数. 量子数  $m$  可取值  $-j, -j+1, \dots, j-1, j$ .  $|j, -j\rangle$  是最低权态, 其定义为  $J_- |j, -j\rangle = 0$ ,  $\tau$  与  $\mu$  的关系为

$$\mu = \frac{\theta}{2} e^{-\varphi}, \\ \tau = e^{-\varphi} \tan \frac{\theta}{2}, \quad (3)$$

$|\tau\rangle$  满足完备性

$$\int \frac{d\Omega}{4\pi} |\tau\rangle \langle \tau| = \sum_{m=-j}^j |j, m\rangle \langle j, m| = 1$$

\* 国家自然科学基金 (批准号: 10874174) 资助的课题.

† E-mail: songj65@mail.ustc.edu.cn

$$(d\Omega = \sin\theta d\theta d\varphi). \quad (4)$$

不难证明有

$$\langle \tau' | \tau \rangle = \frac{(1 + \tau' \tau^*)^2}{(1 + |\tau|^2)(1 + |\tau'|^2)}. \quad (5)$$

Schwinger 提出用两个模式的 Bose 算符来忠实地表示角动量<sup>[15]</sup>, 即令

$$\begin{aligned} J_+ &= a^\dagger b, \\ J_- &= b^\dagger a, \\ J_z &= \frac{1}{2}(a^\dagger a - b^\dagger b), \end{aligned} \quad (6)$$

其中,  $a^\dagger$  ( $b^\dagger$ ) 和  $a$  ( $b$ ) 为双模 Fock 态的产生与湮没算符, 满足  $[a, a^\dagger] = 1$ . 相应地, 本征态  $|j, m\rangle$  用双模 Fock 空间的粒子数态来表示

$$\begin{aligned} |j, m\rangle &= \frac{a^{j+m} b^{j-m}}{\sqrt{(j+m)!(j-m)!}} |0, 0\rangle \\ &= |j+m\rangle \otimes |j-m\rangle, \end{aligned} \quad (7)$$

在我们以前的工作中已经利用 Schwinger Bose 实现, 求出  $|\tau\rangle$  在双模 Fock 空间中的表示为<sup>[16]</sup>

$$\begin{aligned} |\tau\rangle &= \exp(\mu J_+ - \mu^* J_-) |0\rangle \otimes |2j\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{(2j)!}} \left( b^\dagger \cos \frac{\theta}{2} + a^\dagger e^{-i\varphi} \sin \frac{\theta}{2} \right)^{2j} |0, 0\rangle \\ &= \frac{1}{(1 + |\tau|^2)^j} \sum_{l=0}^{2j} \left[ \frac{(2j)!}{l!(2j-l)!} \right]^{\frac{1}{2}} \\ &\quad \times \tau^{2j-l} |2j-l\rangle \otimes |l\rangle, \end{aligned} \quad (8)$$

可见在 Schwinger Bose 实现下,  $|\tau\rangle$  是一个双模纠缠态. 下面将利用上式计算自旋相干态的 Wigner 函数.

### 3. 自旋相干态的 Wigner 函数

为方便计算自旋相干态的 Wigner 函数, 首先引入纠缠态<sup>[17,18]</sup>

$$\langle \xi | = \langle 00 | \exp\left(-\frac{|\xi|^2}{2} + a\xi + b\xi^* - ab\right), \quad (9)$$

利用双模 Hermite 多项式的定义<sup>[19]</sup>

$$\begin{aligned} H_{m,n}(\xi, \xi^*) &= \sum_{l=0}^{\min(m,n)} \frac{m!n!}{l!(m-l)!(n-l)!} (-1)^l \\ &\quad \times \xi^{m-l} \xi^{*n-l}, \end{aligned} \quad (10)$$

及其母函数式

$$\begin{aligned} \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{t^m t'^n}{m!n!} H_{m,n}(\xi, \xi^*) \\ = \exp(-tt' + t\xi + t'\xi^*), \end{aligned} \quad (11)$$

有

$$\langle \xi | = \langle 00 | \sum_{m,n=0}^{\infty} \exp\left(-\frac{|\xi|^2}{2}\right) \frac{a^m b^n}{m!n!} H_{m,n}(\xi, \xi^*)$$

$$\begin{aligned} &= \langle m, n | \sum_{m,n=0}^{\infty} \exp\left(-\frac{|\xi|^2}{2}\right) \frac{1}{\sqrt{m!n!}} \\ &\quad \times H_{m,n}(\xi, \xi^*). \end{aligned} \quad (12)$$

由(8)和(12)式, 计算可得

$$\begin{aligned} \langle \xi | \tau \rangle &= \frac{\sqrt{(2j)!}}{(1 + |\tau|^2)^j} \exp\left(-\frac{|\xi|^2}{2}\right) \\ &\quad \times \sum_{l=0}^{2j} \frac{\tau^{2j-l} H_{2j-l,l}(\xi, \xi^*)}{l!(2j-l)!}, \end{aligned} \quad (13)$$

利用双模 Hermite 多项式的积分表达式,

$$\begin{aligned} H_{m,n}(\xi, \xi^*) &= (-1)^n e^{\xi\xi^*} \int \frac{d^2 z}{\pi} z^n z^{*m} \\ &\quad \times \exp(-|z|^2 + \xi z - \xi^* z^*), \end{aligned} \quad (14)$$

进一步简化(12)式, 得到一个简洁的表达式<sup>[20]</sup>

$$\begin{aligned} \langle \xi | \tau \rangle &= \frac{\tau^j}{(1 + |\tau|^2)^j} \frac{\exp\left(-\frac{|\xi|^2}{2}\right)}{\sqrt{(2j)!}} \\ &\quad \times H_{2j}\left(\frac{\xi^* + \tau\xi}{2\sqrt{\tau}}\right), \end{aligned} \quad (15)$$

上式表明自旋相干态在纠缠态  $\langle \xi |$  表象下的波函数是一个  $2j$  阶的单模 Hermite 多项式.

单模相干态表示下的 Wigner 算符

$$\begin{aligned} \Delta(\alpha) &= \int \frac{d^2 z}{\pi} |\alpha + z\rangle \langle \alpha - z| \exp(\alpha z^* - z\alpha^*), \\ \alpha &= \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 + ip_1), \end{aligned} \quad (16)$$

这里  $|z\rangle$  是相干态,  $|z\rangle = \exp(za^\dagger - |z|^2/2) |0\rangle$ . 本文中自旋相干态  $|\tau\rangle$  是被定义在双模 Fock 空间中的纠缠态, 故此用双模 Wigner 算符来计算其 Wigner 函数较为方便, 可以证明, 双模 Wigner 算符在纠缠态  $\langle \xi |$  表象中可以表示为<sup>[21]</sup>

$$\begin{aligned} \Delta(\alpha)\Delta(\beta) &= \int \frac{d^2 \xi}{\pi} |\gamma - \xi\rangle \langle \gamma + \xi| \exp(\rho\xi^* - \xi\rho^*) \\ &= \Delta(\gamma, \rho), \\ \gamma &= \alpha + \beta^*, \\ \rho &= \alpha - \beta^*, \\ \beta &= \frac{1}{\sqrt{2}}(x_2 + ip_2). \end{aligned} \quad (17)$$

利用(15)式, 可以求得自旋相干态 Wigner 函数为

$$\begin{aligned} \langle \tau | \Delta(\gamma, \rho) | \tau \rangle &= \langle \tau | \int \frac{d^2 \xi}{\pi} |\gamma - \xi\rangle \langle \gamma + \xi| \\ &\quad \times \exp(\rho\xi^* - \xi\rho^*) | \tau \rangle \\ &= \frac{|\tau|^{2j}}{(1 + |\tau|^2)^{2j} (2j)!} \int \frac{d^2 \xi}{\pi^3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \times H_{2j}^* \left[ \frac{(\gamma - \xi)^* + \tau(\gamma - \xi)}{2\sqrt{\tau}} \right] \\ & \times H_{2j} \left[ \frac{(\gamma + \xi)^* + \tau(\gamma + \xi)}{2\sqrt{\tau}} \right] \\ & \times \exp\left( -\frac{|\gamma - \xi|^2 + |\gamma + \xi|^2}{2} + \rho\xi^* - \xi\rho^* \right) \\ & = \frac{1}{\pi^2 (2j)!} \exp[-2(|\alpha|^2 + |\beta|^2)] \end{aligned}$$

$$\times H_{2j,2j} \left( 2\lambda \frac{\tau^* \alpha^* + \beta^*}{\sqrt{\tau^*}}, 2\lambda \frac{\tau\alpha + \beta}{\sqrt{\tau}} \right), \quad (18)$$

其中  $\lambda^2 = \frac{|\tau|}{1 + |\tau|^2}$ .

根据(18)式,进行数值计算,可以得到自旋相干态 Wigner 函数的分布规律.取  $\tau = 1 + i$ ,图 1 给出  $x_2 = p_2 = 0$  时  $x_1-p_1$  相空间中 Wigner 函数随角动量

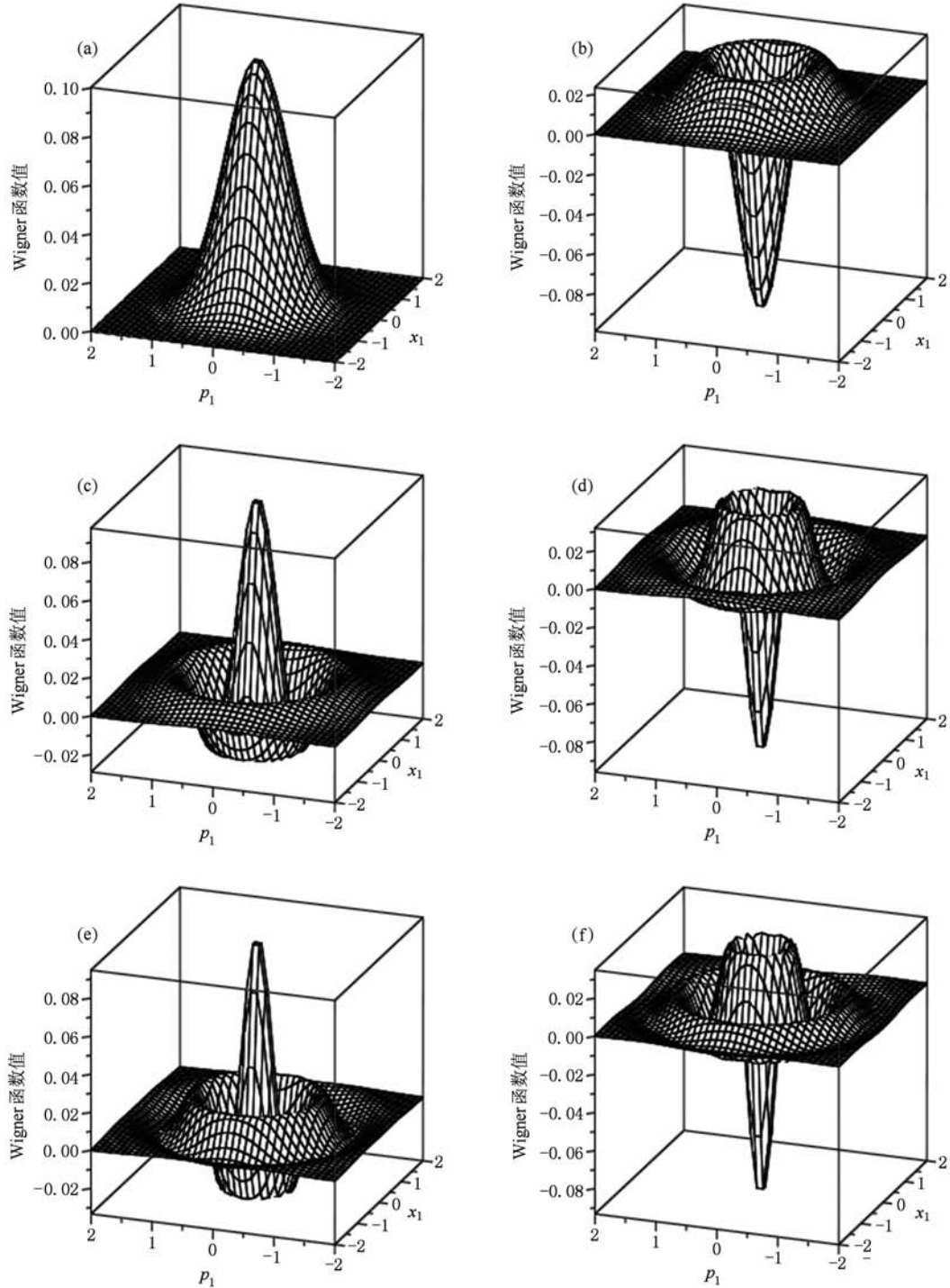


图 1  $x_1-p_1$  相空间 Wigner 函数( $x_2 = p_2 = 0, \tau = 1 + i, j = 0, 1/2, 1, 3/2, 2, 5/2$ ) (a)  $j = 0$ , (b)  $j = 1/2$ , (c)  $j = 1$ , (d)  $j = 3/2$ , (e)  $j = 2$ , (f)  $j = 5/2$

量子数  $j$  取不同值时的分布规律, 图 2 对应  $x_1 = p_1 = 0$  时  $x_2$ - $p_2$  相空间中 Wigner 函数的分布规律. 可以看到, 当  $j = 0$  时, Wigner 函数的值处处为正, 而当  $j \neq 0$  时, 在相空间中出现负值区域, 表明  $j \neq 0$  的自旋相干态是非经典态. 同时还可以看到,  $j$  为正整数时的 Wigner 函数具有向上的主峰, 而当  $j$  取半整数时,

其 Wigner 函数具有向下的主峰. 当  $j$  取不同值时, 除存在一个主峰外, 还有峰值较小的次峰, 次峰的数目与  $j$  值有关, 随着  $j$  值的增加, 次峰的个数逐渐增加, 且随着远离主峰, 这些次峰的峰值也在逐渐减小.

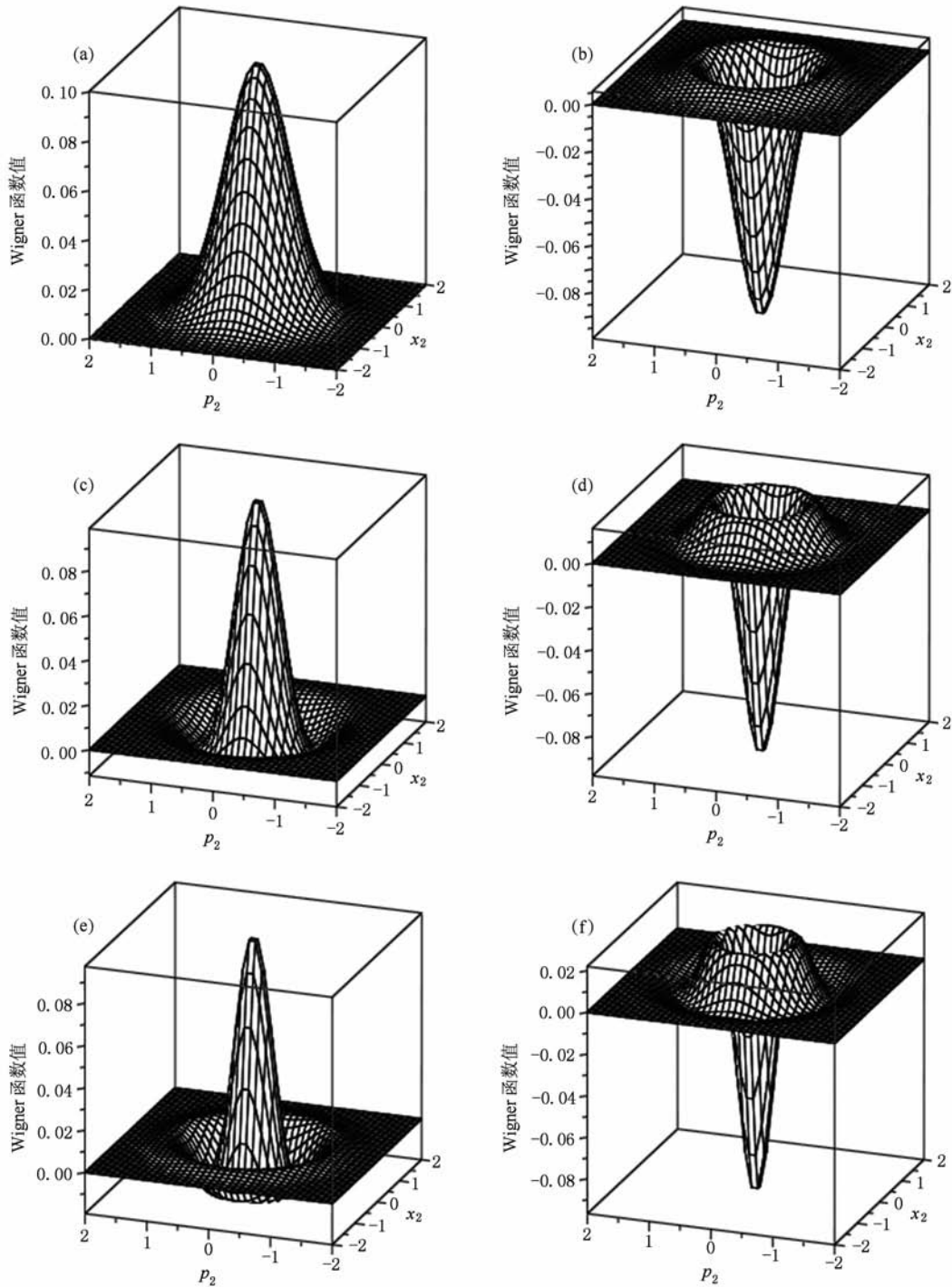


图 2  $x_2$ - $p_2$  相空间 Wigner 函数 ( $x_1 = p_1 = 0$ ,  $\tau = 1 + i$ ,  $j = 0, 1/2, 1, 3/2, 2, 5/2$ ) (a)  $j = 0$ , (b)  $j = 1/2$ , (c)  $j = 1$ , (d)  $j = 3/2$ , (e)  $j = 2$ , (f)  $j = 5/2$

图 3 和 4 给出参数  $\tau$  取不同值时相空间中 Wigner 函数分布情况,结合图 1(e)和 2(e),可以看到,随着  $\tau$  值的增加, $x_1-p_1$  相空间中 Wigner 函数分

布的次峰峰值在增加;而  $x_2-p_2$  相空间中 Wigner 函数次峰峰值在减小,当  $\tau$  增加到一定值后,Wigner 函数分布的负值区域会消失.

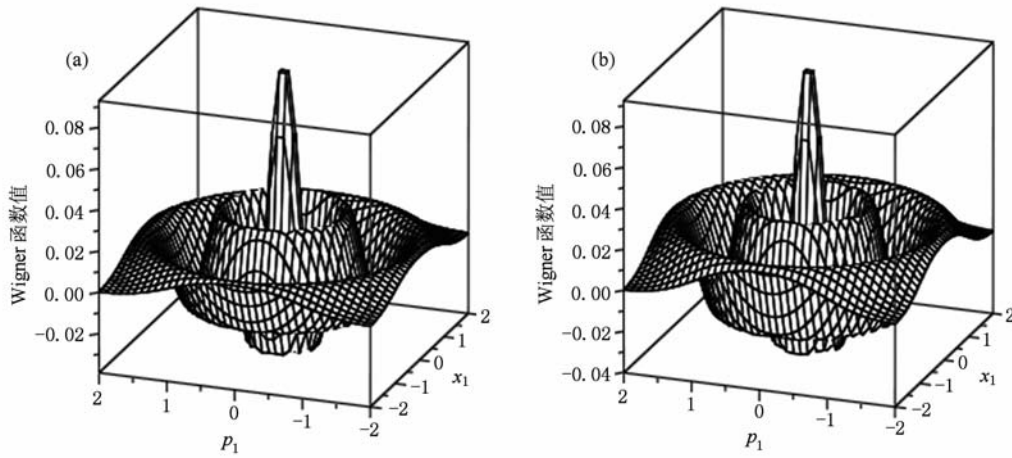


图 3  $x_1-p_1$  相空间 Wigner 函数 ( $x_2=p_2=0, j=2, \tau=2+2i, 3+3i$ ) (a)  $\tau=2+2i$ , (b)  $\tau=3+3i$

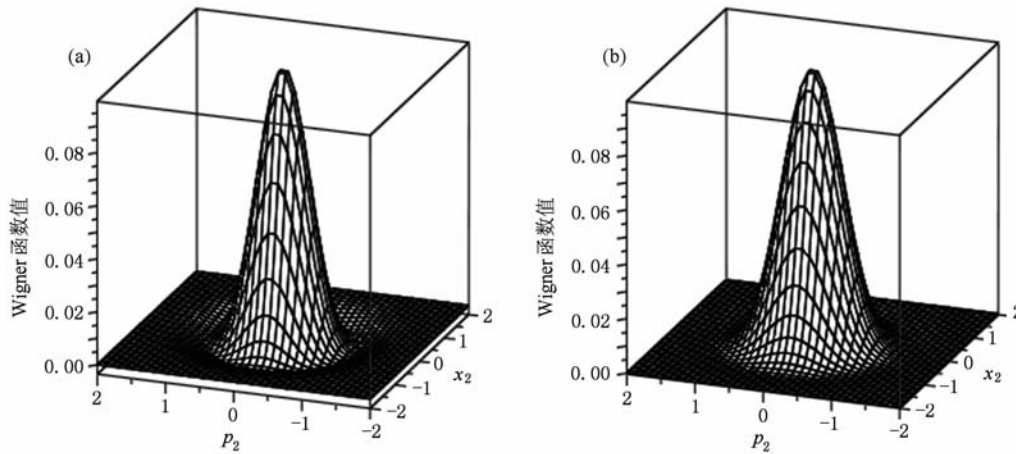


图 4  $x_2-p_2$  相空间 Wigner 函数 ( $x_1=p_1=0, j=2, \tau=2+2i, 3+3i$ ) (a)  $\tau=2+2i$ , (b)  $\tau=3+3i$

图 5—8 给出两模之间的关联关系对相空间中 Wigner 函数分布的影响.结合图 1(e),5,6,可以看到,随着  $x_2, p_2$  的变化, $x_1-p_1$  相空间中 Wigner 函数分布也随之变化,如当  $p_2=0, x_2$  值从零开始增加时,Wigner 函数的主峰沿着  $x_1-p_1$  平面 II, IV 象限对角线方向移动并逐渐降低,次峰的形状也随之发生变化,在  $x_2$  值增加到一定值的时候,Wigner 函数分布趋于零值;而当  $x_2=0, p_2$  值从零开始逐渐增加时,Wigner 函数的主峰沿着  $x_1-p_1$  平面 I, III 象限对角线方向移动并逐渐降低直至趋于零值.结合图 2(e),7,8,也可以看到, $x_2-p_2$  相空间中 Wigner 函数

分布随  $x_1, p_1$  的变化也存在着与  $x_1-p_1$  相空间中 Wigner 函数相同的变化规律,不同的是,当  $p_1=0, x_1$  值从零开始增加时,Wigner 函数的主峰沿着  $x_2-p_2$  平面 I, III 象限对角线方向移动并逐渐降低;当  $x_1=0, p_1$  值从零开始逐渐增加时,Wigner 函数的主峰沿着  $x_2-p_2$  平面的 II, IV 象限对角线方向移动并逐渐降低直至趋于零值.充分表明了 Schwiner Bose 实现下,自旋相干态  $|\tau\rangle$  用双模 Fock 空间表示时,其特性并不是对应两个独立变化模式的简单叠加,而是相互关联、相互纠缠的状态.

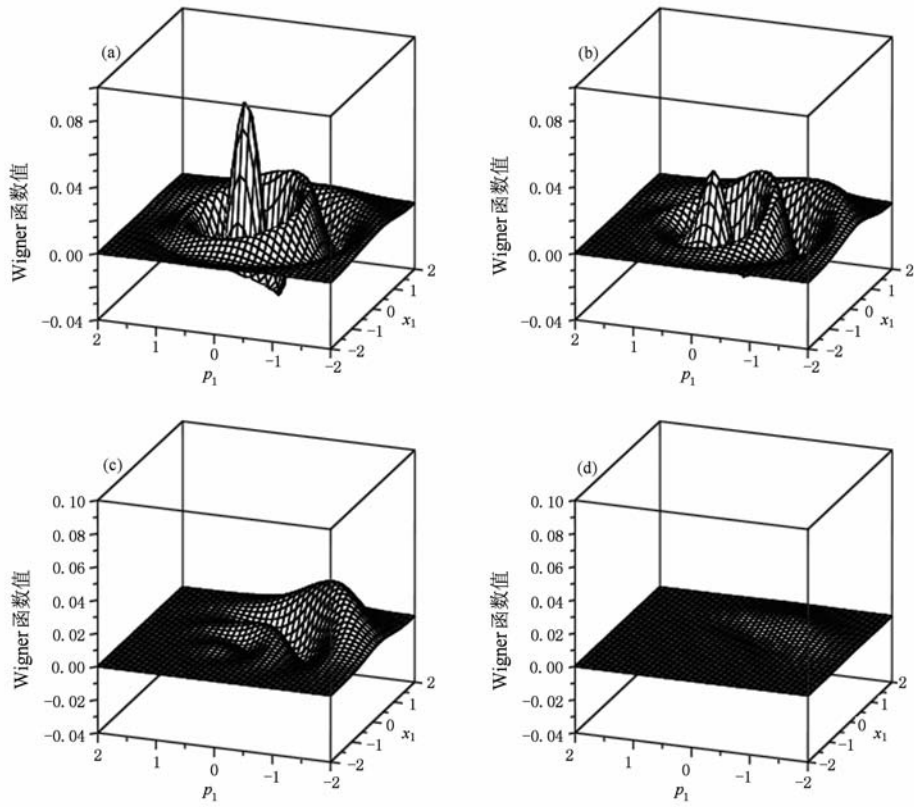


图 5  $x_1-p_1$  相空间 Wigner 函数 ( $\tau=1+i, j=2, p_2=0, x_2=0.3, 0.6, 1.2, 1.8$ ) (a)  $x_2=0.3$ , (b)  $x_2=0.6$ , (c)  $x_2=1.2$ , (d)  $x_2=1.8$

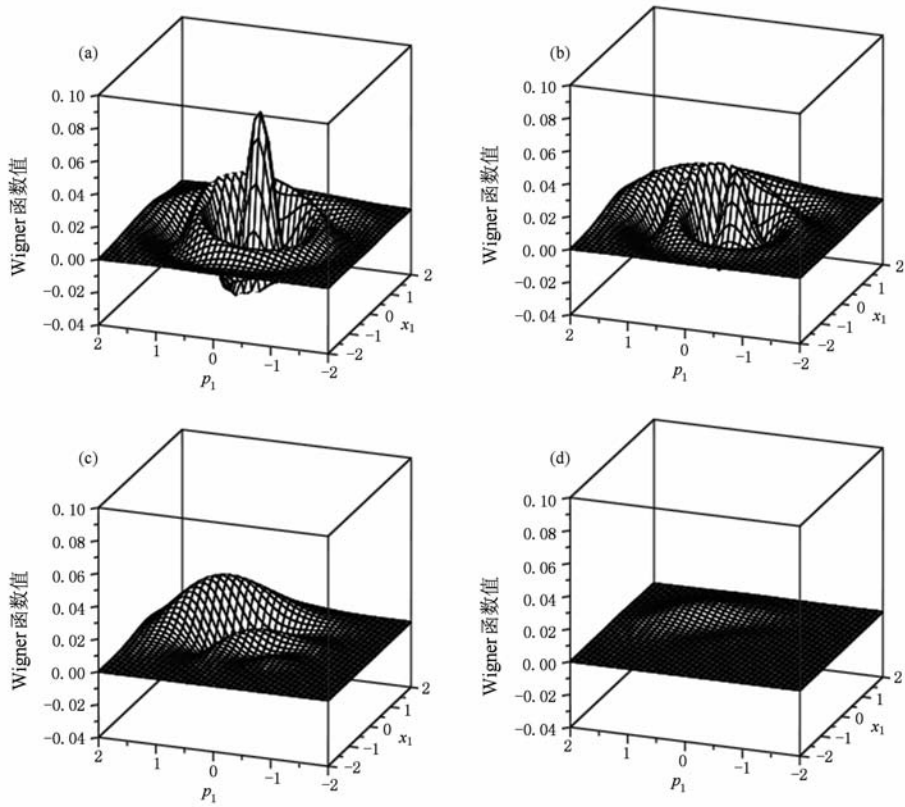


图 6  $x_1-p_1$  相空间 Wigner 函数 ( $\tau=1+i, j=2, x_2=0, p_2=0.3, 0.6, 1.2, 1.8$ ) (a)  $p_2=0.3$ , (b)  $p_2=0.6$ , (c)  $p_2=1.2$ , (d)  $p_2=1.8$

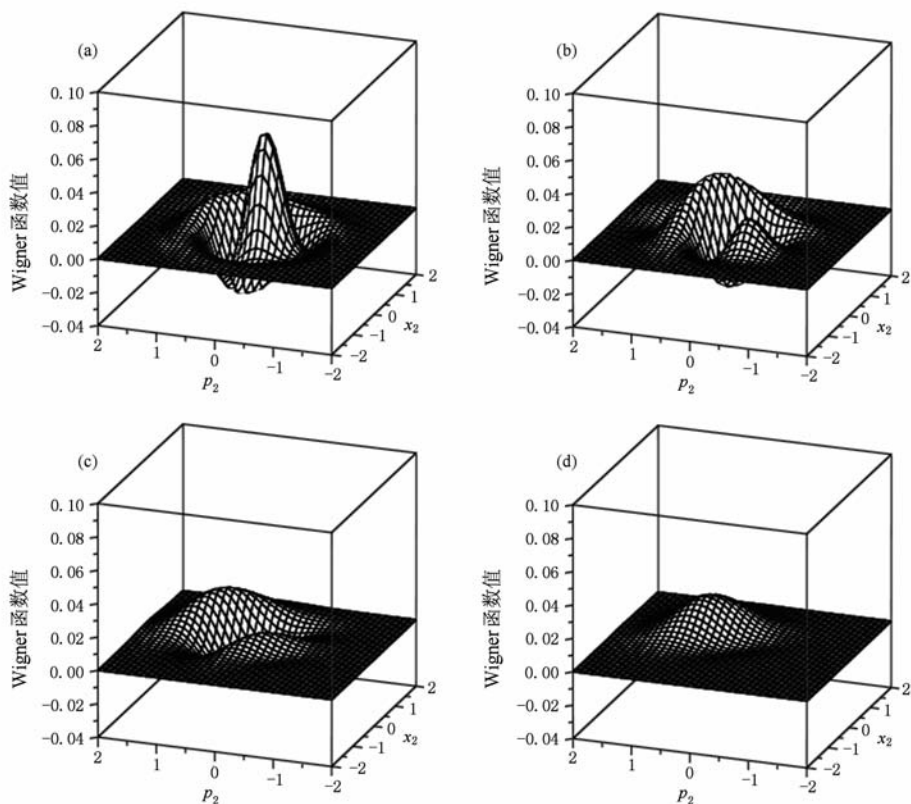


图7  $x_2$ - $p_2$  相空间 Wigner 函数 ( $\tau = 1 + i$ ,  $j = 2$ ,  $p_1 = 0$ ,  $x_1 = 0.3, 0.6, 1.2, 1.8$ ) (a)  $x_1 = 0.3$ , (b)  $x_1 = 0.6$ , (c)  $x_1 = 1.2$ , (d)  $x_1 = 1.8$

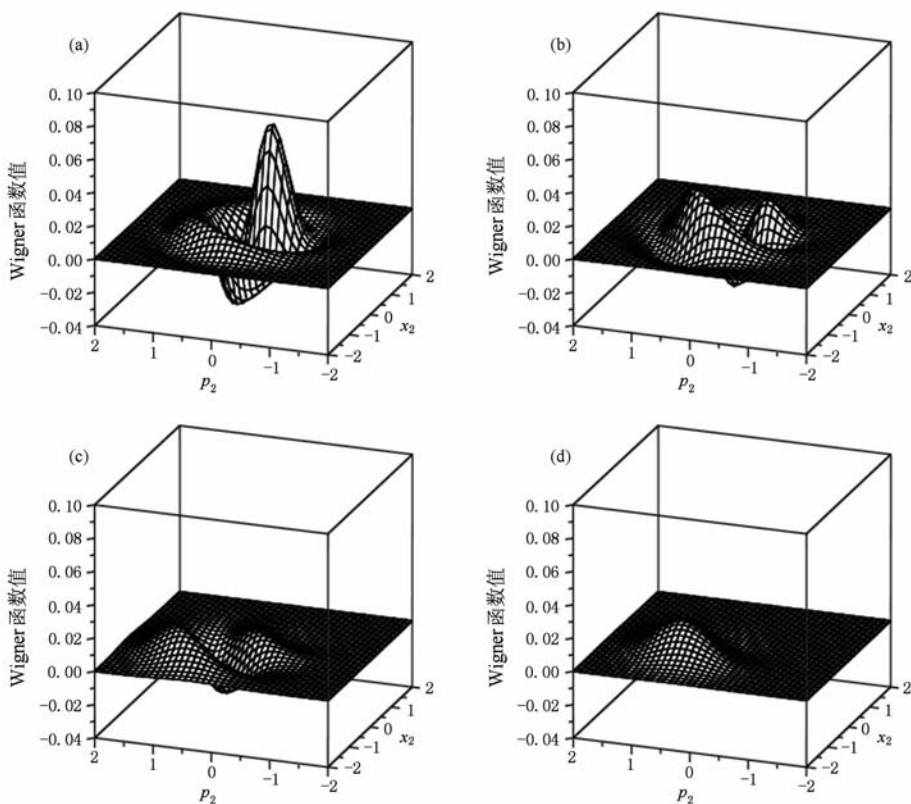


图8  $x_2$ - $p_2$  相空间 Wigner 函数 ( $\tau = 1 + i$ ,  $j = 2$ ,  $x_1 = 0$ ,  $p_1 = 0.3, 0.6, 1.2, 1.8$ ) (a)  $p_1 = 0.3$ , (b)  $p_1 = 0.6$ , (c)  $p_1 = 1.2$ , (d)  $p_1 = 1.8$

## 4. 结 论

本文利用自旋相干态的 Schwinger Bose 实现, 引入纠缠态表象及 Wigner 算符在该表象下的表示, 得到了自旋相干态的 Wigner 函数, 数值计算画出了

相空间中 Wigner 函数的分布图, 分析结果表明: 角动量子数  $j \neq 0$  时, 自旋相干态的 Wigner 函数有负值区域, 呈现非经典性质; 而随着参数  $\tau$  的增大,  $x_2$ - $p_2$  相空间中 Wigner 函数次峰峰值减小, 并趋于零值; 两模之间有相互关联、纠缠关系, 并对相空间中 Wigner 函数分布产生影响.

- [1] Wigner E 1932 *Phys. Rev.* **40** 749
- [2] Kurtsiefer C, Pfau T, Mlynek J 1997 *Nature* **386** 150
- [3] Vogel K, Risken H 1989 *Phys. Rev. A* **40** 2847
- [4] Franca S M, Lutterbach L G, Dutra S M, Zagury N, Davidovich L 2001 *Phys. Rev. A* **63** 033813
- [5] Zhang Z M 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 70 (in Chinese) [张智明 2004 物理学报 **53** 70]
- [6] Yang Q Y, Sun J W, Wei L F, Ding L E 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 2704 (in Chinese) [杨庆怡、孙敬文、韦联福、丁良恩 2005 物理学报 **54** 2704]
- [7] Meng X G, Wang J S, Liang B L 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 2160 (in Chinese) [孟祥国、王继锁、梁宝龙 2007 物理学报 **56** 2160]
- [8] Ye C G, Zhang J 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 6962 (in Chinese) [叶晨光、张 靖 2008 物理学报 **57** 6962]
- [9] Lan H J, Pang H F, Wei L F 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 8281 (in Chinese) [蓝海江、庞华锋、韦联福 2009 物理学报 **58** 8281]
- [10] Hepp K, Lieb E H 1973 *Phys. Rev. A* **8** 2517
- [11] Marducci L M, Bowden C M 1975 *Phys. Rev. A* **11** 973
- [12] Takahashi Y, Shibata F 1975 *J. Phys. Soc. Jpn.* **38** 656
- [13] Arecchi F T, Courtens E, Gilmore R, Thomas H 1972 *Phys. Rev. A* **6** 2211
- [14] Radcliffe J M 1971 *J. Phys.* **A 4** 313
- [15] Schwinger J 1965 *Quantum Theory of Angular Momentum* (New York: Academic Press) p229
- [16] Fan H Y 1987 *Commun. Theor. Phys.* **7** 125
- [17] Fan H Y, Klauder J R 1994 *Phys. Rev. A* **49** 704
- [18] Fan H Y, Chen B Z 1996 *Phys. Rev. A* **53** 2948
- [19] Fan H Y, Ye X 1993 *Phys. Lett. A* **175** 387
- [20] Fan H Y, Chen J 2003 *Eu. Phys. J. D* **23** 437
- [21] Fan H Y, Fan Y 1998 *Mod. Phys. Lett. A* **13** 433

# Properties of Wigner function of spin coherent states based on Schwinger Bose operator realization\*

Song Jun<sup>1)2)†</sup> Fan Hong-Yi<sup>1)</sup>

1) (Department of Material Science and Engineering, University of Science and Technology of China, Hefei 230026, China)

2) (Department of Mathematics and Physics, West Anhui University, Liuan 237012, China)

(Received 12 November 2009; revised manuscript received 14 December 2009)

## Abstract

Based on the Schwinger Bose operator realization of angular momentum, we introduce the entangled state representation as well as the Wigner operator in such representation and then derive the Wigner quasiprobability function of spin coherent states. The properties of corresponding Wigner function in the phase space are discussed by numerical calculation. The results indicate that the spin coherent states based on Schwinger Bose operator realization actually show entanglement properties.

**Keywords:** spin coherent state, Schwinger Bose operation realization, Wigner function, entangled state representation

**PACC:** 0365, 4250

\* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 10874174).

† E-mail: songj65@mail.ustc.edu.cn