

周期脉冲撞击的两分量 Bose-Einstein 凝聚系统的 单粒子相干和对纠缠*

严 冬^{1)2)†} 宋立军¹⁾

1) (长春大学理学院, 长春 130022)

2) (吉林大学物理学院, 长春 130022)

(2009 年 12 月 20 日收到; 2010 年 1 月 13 日收到修改稿)

在周期脉冲撞击的两分量 Bose-Einstein 凝聚系统中, 研究了量子混沌对单粒子相干和对纠缠性质的影响. 研究表明, 混沌促使单粒子相干发生强烈衰减并保持着较低的相干度, 同时对纠缠出现最大值并在较短时间后消失. 利用单粒子相干的这种性质可以直接测量量子混沌存在的相空间结构, 有利于预防 Bose-Einstein 凝聚的瓦解和控制凝聚体的混沌行为.

关键词: Bose-Einstein 凝聚, 单粒子相干, 对纠缠, 混沌

PACC: 0367, 0530, 4250

1. 引 言

就像激光发射电磁波的最经典形式一样, Bose-Einstein 凝聚 (BEC)^[1,2] 代表着物质波的最“经典”形式^[3], 具有宏观的量子效应, 例如: 宏观的量子相干和量子超流体^[4]. BEC 的实现是物理学发展史上的里程碑, 已经被应用于精密测量和日新月异的量子信息领域^[5-8]. BEC 中“原子激光”的成功获得使得利用原子代替激光研究混沌效应成为现实^[9,10]. 最近研究表明, 纠缠^[11]、量子态保真度^[12,13] 和自旋

压缩^[5] 能够表征 BEC 系统中混沌等非线性现象. 并且在 BEC 和 Josephson 耦合的系统中, 建立了单粒子相干和最大压缩的精确关系, 这样自旋压缩系数可以通过单粒子相干的干涉实验直接读出^[14]. 受此启发, 本文研究存在量子混沌的周期脉冲撞击的两分量 BEC 系统的单粒子相干性质, 达到直接测量量子混沌, 预防 BEC 体系瓦解的目的^[15]. 同时研究了对纠缠的动力学行为. 发现单粒子相干和对纠缠对量子混沌有着强烈的敏感性, 即混沌抑制单粒子相干和对纠缠. 这些性质的研究对 BEC 制备和控制应用有着重大的意义.

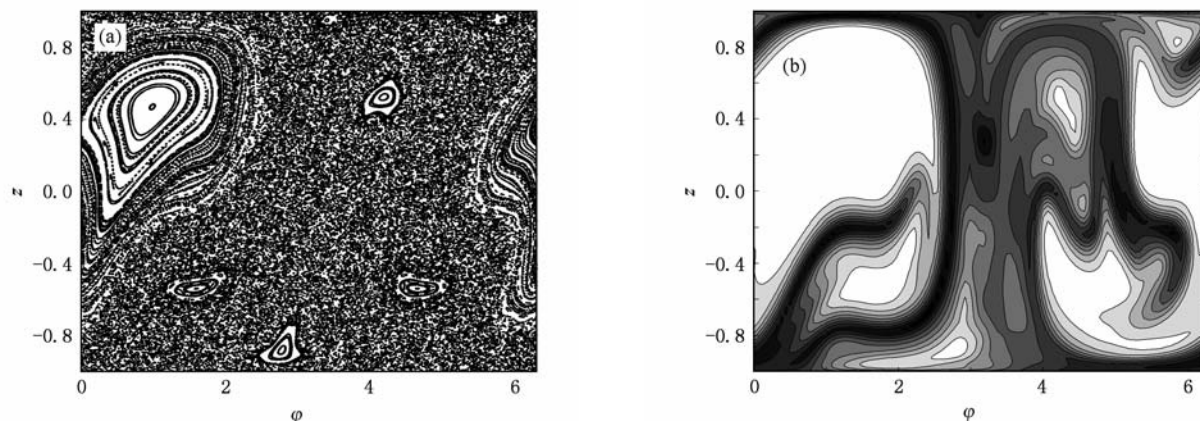


图 1 系统的相空间轨道和等高线图 (a) 经典的相空间轨道. 参数分别为 $\varepsilon = T = g_c = 1, \gamma = 2$; (b) 一阶关联函数在时间截断 $n = 10$ 的等高线图, 初态对应 (a) 中所有的点, 其中粒子数 $N = 120$, 其他参数同 (a)

* 国家自然科学基金 (批准号: 10947019) 和吉林省教育厅 (批准号: 2008191, 2009237) 资助的课题.

† E-mail: ydbest@126.com

2. 周期脉冲撞击的两分量 BEC 系统

周期脉冲撞击的两分量 BEC 系统在经典极限下存在混沌的动力学行为, 其 Hamilton 量为

$$\hat{H} = \varepsilon \hat{J}_z + \lambda \hat{J}_z^2 + \gamma \delta_T(t) \hat{J}_x, \quad (1)$$

其中参数 ε 为两分量间的化学势之差, λ 为相互作用强度, γ 是两个内部量子态间的耦合强度. $\delta_T(t) = \sum_n \delta(t - nT)$ 是辐射外场对 BEC 系统的周期为 T 的脉冲撞击, 其中 n 为撞击次数. 角动量算符 $\hat{J}_+ = \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2$, $\hat{J}_- = \frac{1}{2}(\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 - \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2)$ 满足 $SU(2)$ 李代数, $\hat{a}_i^\dagger, \hat{a}_i (i=1, 2)$ 分别代表第 i 模的产生和湮没算符. $2\hat{J}_z = \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 - \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2$ 表示在两个分量上的原子布居数的差, 这个概念可以很好地研究量子隧穿效应^[16,17]. $N = \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 + \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2$ 为 BEC 系统的总原子数, 在没有损耗的情况下, 原子数是个守恒量. 实现 BEC 的条件相当苛刻, 原子的温度必须要冷却到 10^{-6} K 的数量级, 同时由于原子间的相互作用极易使凝聚体瓦解, 所以要保持原子的总数充分得少^[18,19], 因此研究有限原子数目的 BEC 更有意义.

在 Schrödinger 绘景中, $|\psi(0)\rangle$ 为给定的初态, 则两分量 BEC 系统的演化满足

$$|\Psi(t)\rangle = \hat{U}^n |\Psi(0)\rangle, \quad (2)$$

其中 \hat{U} 为一个周期内的动力学算符, 满足^[18]

$$\hat{U} = \exp[-ih(\varepsilon \hat{J}_z + \lambda \hat{J}_z^2)] \exp(-ih\gamma \hat{J}_x). \quad (3)$$

为了方便, 在后面的讨论中令 $\hbar = 1$. 选择自旋相干态 $|\Psi(0)\rangle = R(\theta, \phi) = \exp[-i\theta(\hat{J}_x \sin\phi - i\hat{J}_y \cos\phi)] |j, -j\rangle$ 为初态, $|j, -j\rangle$ 是 \hat{J}_z 的本征态, 它是张在 Hilbert 空间中 $2j+1$ 维的矢量, 其中 $j = N/2$, N 为体系的原子个数, 在以后的研究中是守恒量. 这样任意的一个归一化初态都对应相空间 (ϕ, θ) 上的一个点.

通过形如 $R = \langle \hat{J}_R/j \rangle, RR' = \langle \hat{J}_R \hat{J}_{R'}/j^2 \rangle, (R, R' = X, Y, Z) (j \rightarrow \infty)$ 的近似处理, 得到经典极限下角动量满足的动力学方程为^[20,21]

$$\begin{aligned} X' &= X_n, \\ Y' &= Y_n \cos K - Z_n \sin K, \\ Z' &= Y_n \sin K + Z_n \cos K; \\ X_{n+1} &= X' \cos[(\mu + g + g_c Z')T] \\ Y_{n+1} &= X' \sin[(\mu + g + g_c Z')T] \\ &\quad - Y' \cos[(\mu + g + g_c Z')T], \\ Z_{n+1} &= Z', \end{aligned} \quad (4)$$

其中 $g_c = \varepsilon N$. 从近似处理表达式可以直接看出, 经典的角动量是单位球面上的点, 即满足 $X^2 + Y^2 + Z^2 = 1$. 这个条件把经典的角动量的运动约束在二维的相空间 (ϕ, θ) 上, 其中方位角 $\phi = \arctan(Y/X)$, 极角 $\theta = \arccos(Z)$.

由经典动力学方程(4)得到经典相空间轨道如图 1(a) 所示, 在这样的参数下存在一个大规则区和 4 个小的规则区, 这些区域中的运动是稳定的, 称为周期性轨道, 区域的中心一般为不动点; 规则区域外是混沌区域, 运动不稳定.

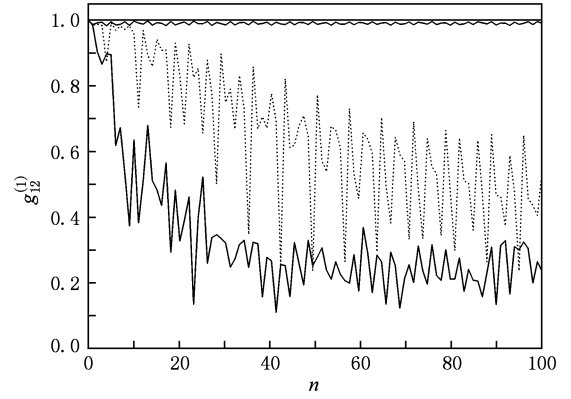


图 2 不同初态的一阶关联函数时间演化曲线 对应图 1(a), 最上面的曲线为初态选在不动点 $(0.9675, 0.4625)$ 处, 中间的虚线为初态选在规则区域和混沌交界处 $(2.342, 0.4625)$, 最下面的曲线为初态选在混沌海中心 $(3.183, 0.4625)$, 其他参数同图 1(a)

3. 单粒子相干

在 BEC 系统中, 利用单粒子相干可以描述相扩散过程, 相干的衰减标志着相扩散的发生^[3,22-25]. 单粒子相干程度由一阶时间关联函数来描述, 定义如下^[25]:

$$\begin{aligned} g_{12}^{(1)} &= |\rho_{12}^{(1)}| / \sqrt{\rho_{11}^{(1)} \rho_{22}^{(1)}} \\ &= |\langle \hat{J}_+ \rangle| / \sqrt{j^2 - \langle \hat{J}_z \rangle^2}, \end{aligned} \quad (5)$$

其中单粒子密度矩阵 $\rho^{(1)} = \langle \hat{\alpha}_i^\dagger \hat{\alpha}_j \rangle / N (i, j = 1, 2)$, 分别代表两种模式) 由平均场的值 $\langle \hat{J}_i \rangle (i = x, y, z)$ 决定. 实验上, 利用 Ramsey 条纹的可视度来直接观测

$g_{12}^{(1)}$ [3,22-25], 因此建立一阶时间关联函数与混沌的关系能够直接测量混沌和控制混沌.

自旋相干态对应着相空间上的一点, 把这点对应的量子态作为初态, 研究不同轨道对单粒子相干的影响. 严格的数值模拟结果如图 2 所示, 对于三种典型的初态 (分别对应规则、混沌以及过渡区域), 因为都是自旋相干态, 并且自旋相干态是“最相干”的量子态, 所以对应的一阶关联函数均为 $g_{12}^{(1)} = 1$. 初态处于混沌区域的情况下, 在 $n > 1$ 后 $g_{12}^{(1)}$ 迅速衰减, 直到 $n = 30$ 衰减程度减慢, 以较低的值 ($g_{12}^{(1)} \approx 0.25$) 为平均值上下振荡演化, 这种振荡来源于辐射外场对整个 BEC 体的周期性撞击. 相对稳定以后, 单粒子相干较弱, 但是没有相干消失和相干程度突然大幅度增高的趋势. 而初态处于不动点, 一阶关联函数 $g_{12}^{(1)}$ 保持类周期振荡演化, 整个演化时间段内保持着 $g_{12}^{(1)}$ 近似等于 1. 当 $g_{12}^{(1)}$ 越接近 1, 单粒子相干程度越大, 说明此时的量子态越接近自旋相干态. 对于初态处于规则和混沌区域过渡 (见虚线) 的情况, 一阶关联函数曲线整体与混沌区类似, 但是振荡衰减较缓, 在 $n > 60$ 后单粒子相干程度同混沌区域的趋于一致, 只是相干性较强一些. 对于两分量 BEC 系统的一阶关联函数的衰减, 一方面是来自 (1) 式中的相互作用项 $\lambda \hat{J}_z^2$ [25], 另一方面来自初态对应的相空间的混沌程度. 从上面的研究可以看出, 对于相同的相互作用项 $\lambda \hat{J}_z^2$, 越是混沌区域对应的初态, $g_{12}^{(1)}$ 衰减程度越强, 因此从单粒子相干的角度来看, 混沌区域对应的自旋相干初态最敏感. 更为全面的情况如图 3, 从规则区域到混沌区域过渡的 $g_{12}^{(1)}$ 时间演化曲线仍然可以看出, 这种相干性表现出了强烈的初态敏感性.

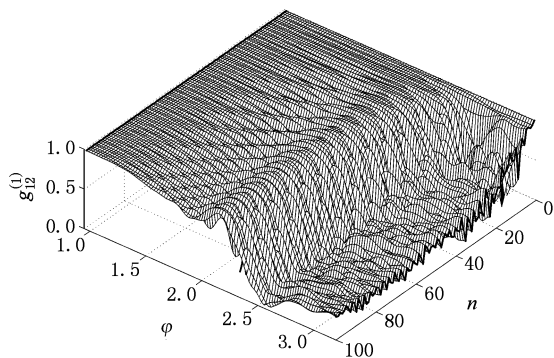


图 3 一阶关联函数随相空间中的方位角 φ 和演化时间的变化图. 在 $Z = 0.4625$ 的条件下方位角 φ 的变化范围从不动点 $\varphi = 0.9675$ 到混沌海中心 $\varphi = 3.183$, 其中这两点的演化曲线 (见两端黑色边缘曲线) 分别与图 2 一一对应.

既然单粒子相干具有强烈的初态敏感性, 因此通过测量一阶关联函数的干涉实验 [3,25] 可以直接测得这种系统的相空间结构. 同时还能够直接观测到量子混沌的动力学行为, 有利于预防 BEC 体的瓦解和控制量子混沌行为. 作相空间 (如图 1 所示) 上所有点对应的初态的演化, 找到合适的时间截断 (从图 3 可以看出, 在 $n > 40$ 的条件下, 不同初态一阶关联函数的演化均趋于平稳, 特别是混沌和规则过渡的区域演化差别不明显, 因此截断满足 $n = 10$ 就可以完美地揭示其相空间结构). 如图 1(b), 时间截断为 $n = 10$, 其中等高线值为一阶关联函数值. 与相空间对比, 几何分布极其相似, 对应良好. 规则区域单粒子相干程度特别强, 而混沌区域单粒子相干程度较弱, 两者有着明显的区别, 过渡情况也能真实地表现出来.

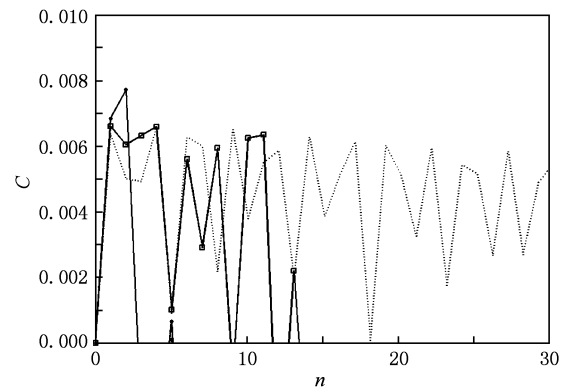


图 4 不同初态的共生纠缠度时间演化图. 虚线为初态选在不动点 (0.9675, 0.4625) 处, 方点线为初态选在规则区域和混沌交界处 (2.342, 0.4625), 圆点线为初态选在混沌海中心 (3.183, 0.4625) 处, 其他参数同图 1(a).

4. 对纠缠

两分量 BEC 系统中, 考虑两种模式为两个子系统, 则混沌会使系统达到纠缠的高驻留, 即混沌促进纠缠 [11]. 本文研究任意两个原子间的对纠缠与混沌之间的关系, 实际上揭示了混沌对最小复合子系统内部原子间的纠缠影响. 对纠缠可以用共生纠缠度 (concurrence) 量度 [26], 定义如下:

$$C = \max(0, \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_4), \quad (6)$$

其中 λ_i ($i = 1, 2, 3, 4$) 是矩阵 $\rho_{12} (\sigma_{1y} \otimes \sigma_{1y}) \rho_{12}^* (\sigma_{1y} \otimes \sigma_{1y})$ 的本征值的平方根, 它们按照降序排列, ρ_{12}^*

是两个原子态密度矩阵 ρ_{12} 的复共轭矩阵. C 从 0 到 1 变化, $C=0$ 意味着纠缠不存在, 即两量子比特完全分离, $C=1$ 表示两量子比特处于最大纠缠, $0 < C < 1$ 表示处于部分纠缠.

由 N 个超冷原子组成的两分量 BEC 系统, 可以通过对 $N-2$ 个原子的量子态取迹得到描述任意两个原子的量子态, 即 $\rho_{12} = \text{Tr}_{3, \dots, N}(\rho)$. 基于原子交换的对称性, 可以得到标准基矢 $\{|0, 0\rangle, |0, 1\rangle, |1, 0\rangle, |1, 1\rangle\}$ 下的约化密度矩阵^[27]

$$\rho_{12} = \begin{bmatrix} v_+ & p_+^* & p_+^* & u^* \\ p_+ & q & q & p_-^* \\ p_+ & q & q & p_-^* \\ u & p_- & p_- & v_- \end{bmatrix}, \quad (7)$$

其中矩阵元 $v_{\pm} = N^2 - 2N + 4\langle \hat{J}_z^2 \rangle \pm 4\langle \hat{J}_z \rangle(N-1)/4N(N-1)$, $u = \langle \hat{J}_+^2 \rangle / N(N-1)$, $p_{\pm} = (N-1)\langle \hat{J}_{\pm} \rangle \pm \langle [\hat{J}_+, \hat{J}_z]_{\pm} \rangle / 2N(N-1)$, $q = N^2 - 4\langle \hat{J}_z^2 \rangle / 4N(N-1)$. N 为系统的原子总数, $\hat{J}_i (i = +, -, z)$ 为角动量算符, $\langle \dots \rangle$ 代表在系统量子态 ρ 下求平均值.

同单粒子相干的研究一样, 考察初态对对纠缠的影响, 演化过程见图 4. 由于自旋相干态不存在对纠缠^[27], 所以不同的相干初态均满足 $C=0$, 即两个原子的量子态是直积态, 原子态完全分离. 对于初态处于混沌区域的演化, 在第一个周期内 C 的值线性上升, 表示纠缠程度线性增加. 在外场撞击作用下的第二个周期内继续上升, 上升速率明显小于第一个周期, 并且对纠缠在 $n=2$ 时达到所有初态演化的最大值 $C \approx 0.07825$, 随即线性衰减, 当 $n=3$ 时纠缠消失, 两个原子的态分离. 当系统演化到 $n=5$ 附近重新出现对纠缠, 但峰值较低, 然后消失, $n>5$ 以后两个原子态一直处于完全分离状态. 需要指出的是, 这种情况下 $C=0$ 并不意味着这个时刻系统总

的量子态 ρ 处于自旋相干态, 恰恰相反, 量子态正远离自旋相干态, 从混沌区域初态的一阶关联函数演化曲线可以看出这点. 而处于混沌与规则的过渡区域的初态, 共生纠缠度 C 经过几次线性上升和衰减过程, 峰值逐渐减小, 在 $n < 13$ 演化的过程中有对纠缠消失和复出的过程, 当 $n > 13$ 对纠缠完全消失. 选择处于不动点的初态, C 在体系的 Hamilton 驱使下振荡演化, 每个周期内也是线性变化, 整个过程中没有纠缠消失现象, 即两个原子始终存在纠缠.

比较共生纠缠度的演化过程可以看出, 虽然混沌区域的初态演化出现了纠缠最大值, 但是仍然为弱纠缠, 并且纠缠存在的时间最短. 而不动点的纠缠程度最小, 但是纠缠存在整个演化过程. 因此可以看出对共生纠缠度而言也存在着的强烈的初态敏感性, 利用这个性质同样可以刻画 BEC 中的混沌现象.

5. 结 论

本文研究了周期脉冲撞击的两分量 BEC 系统的单粒子相干和对纠缠性质. 单粒子相干和对纠缠都可以揭示存在混沌的相空间结构: 处于混沌区域的初态演化, 单粒子相干衰减强烈, 相干消耗较多, 对纠缠提供了演化过程中的最大值, 在很短时间内两个原子就处于完全分离状态; 而对于规则区域, 单粒子相干近似周期衰减, 且相干消耗较少, 整个过程中的量子态最接近自旋相干态, 对纠缠一直存在整个的演化过程中. 尤为重要, 单粒子相干的这种性质和它的实验可测性为观察 BEC 中的量子混沌提供了直接的实验手段, 同时可以利用这点来预防 BEC 的瓦解和控制 BEC 体混沌行为.

感谢王晓光教授对本文的有益指导.

[1] Anderson M H, Ensher J R, Matthews M R, Wieman C E, Cornell E A 1995 *Science* **269** 198
 [2] Davis K B, Mewes M O, Andrews M R, van Druten N J, Durfee D S, Kurn D M, Ketterle W 1995 *Phys. Rev. Lett.* **75** 3969
 [3] Greiner M, Mandel O, Hansch T W, Bloch I 2002 *Nature* **419** 51
 [4] Smerzi A, Fantoni S 1997 *Phys. Rev. Lett.* **78** 3589
 [5] Yan D, Song L J, Chen D W 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 3679 (in Chinese) [严冬、宋立军、陈殿伟 2009 物理学报 **58** 3679]

[6] Nielsen M A, Chuang I L 2000 *Quantum Computation and Quantum Information* (Cambridge: Cambridge University Press) p20
 [7] Zhou M, Fang J Y, Huang C J 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 1916 (in Chinese) [周明、方家元、黄春佳 2003 物理学报 **52** 1916]
 [8] Ma Y, Fu L B, Yang Z A, Liu J 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 5623 (in Chinese) [马云、傅立斌、杨志安、刘杰 2006 物理学报 **55** 5623]

- [9] Mewes M O, Andrews M R, Kurn D M, Durfee D S, Townsend C G, Ketterle W 1997 *Phys. Rev. Lett.* **78** 582
- [10] Anderson B P, Kasevich M A 1998 *Science* **282** 1686
- [11] Xie Q T 2006 *Ph. D. Dissertation* (Changsha: Hunan Normal University) (in Chinese) [谢琼涛 2006 博士学位论文(长沙: 湖南师范大学)]
- [12] Liu J, Wang W G, Zhang C W, Niu Q, Li B W 2005 *Phys. Rev. A* **72** 063623
- [13] Liu J, Wang W G, Zhang C W, Niu Q, Li B W 2006 *Phys. Lett. A* **353** 216
- [14] Jin G R, Law C K 2008 *Phys. Rev. A* **78** 063620
- [15] Fang Y C, Yang Z A, Yang L Y 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 0661 (in Chinese) [房永翠、杨志安、杨丽云 2005 物理学报 **54** 0661]
- [16] Wang H L, Yang S P 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 4700 (in Chinese) [王海雷、杨世平 2008 物理学报 **57** 4700]
- [17] Wang G F, Fu L B, Zhao H, Liu J 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 5003 (in Chinese) [王冠芳、傅立斌、赵 鸿、刘 杰 2005 物理学报 **54** 5003]
- [18] Baym G, Pethick C J 1996 *Phys. Rev. Lett.* **76** 6
- [19] Shuryak E V 1996 *Phys. Rev. A* **54** 3151
- [20] Haake F 1991 *Quantum Signature of Chaos* (Springer: Berlin) p64
- [21] Schack R, D'Ariano G M, Caves C M 1994 *Phys. Rev. E* **50** 972
- [22] Schumm T, Hofferberth S, Andersson L M, Wildermuth S, Groth S, Bar-Joseph I, Schmiedmayer I, Krueger P 2005 *Nature* **1** 57
- [23] Chuu C-S, Schreck F, Meyrath T P, Hanssen J L, Price G N, Raizen M G 2005 *Phys. Rev. Lett.* **95** 260403
- [24] Jo G B, Shin Y, Will S, Pasquini T A, Saba M, Ketterle W, Pritchard D E 2007 *Phys. Rev. Lett.* **98** 030407
- [25] Widera A, Trotzky S, Cheinet P, Fölling S, Gerbier F, Bloch I 2008 *Phys. Rev. Lett.* **100** 140401
- [26] Wootters W K 1998 *Phys. Rev. Lett.* **80** 2245
- [27] Wang X G, Mølmer 2002 *Eur. Phys. J. D* **18** 385

Single-particle coherence and pairwise entanglement in a two-component Bose-Einstein condensate impacted by the periodic impulses*

Yan Dong^{1)2)†} Song Li-Jun¹⁾

1) (School of Science, Changchun University, Changchun 130022, China)

2) (College of Physics, Jilin University, Changchun 130022, China)

(Received 20 December 2009; revised manuscript received 13 January 2010)

Abstract

The influence of the quantum chaos on the single-particle coherence and the pairwise entanglement is investigated in a two-component Bose-Einstein condensate impacted by periodic impulses. The results reveal that the single-particle coherence decays strongly when driven by chaos and keeps a lower degree of coherence. Simultaneously, there appears the maximal pairwise entanglement and it disappears after a short time. By using the properties of the single-particle coherence, we can measure directly the structure of the phase space in which the chaos exists, and this contributes to prevent the collapse of a Bose-Einstein condensate and control the chaotic behavior.

Keywords: Bose-Einstein condensate, single particle coherence, pairwise entanglement, chaos

PACC: 0367, 0530, 4250

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 10947019) and the Department of Education of Jilin Province, China (Grant Nos. 2008191, 2009237).

† E-mail: ydbest@126.com